

## Funktionen und Gleichungen höherer Ordnung anwenden

Viele technische Zusammenhänge in realen Systemen lassen sich hinreichend genau nur durch Funktionen und Gleichungen höherer Ordnung beschreiben. Dazu gehören z.B. Beschleunigungsvorgänge, Wachstumsabläufe und Volumenbestimmungen.

Bei der Dimensionierung, der Planung und der Konstruktion müssen Technikerinnen und Techniker häufig komplexe Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge mithilfe von Funktionen und Gleichungen höherer Ordnung beschreiben und zur Problemlösung anwenden können.

Deshalb werden in den Lernbereichen 1 bis 3 quadratische Funktionen und Potenzfunktionen sowie deren Umkehrfunktionen erarbeitet. Weiterhin werden in den Lernbereichen 4 und 5 die Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen dargestellt.

Voraussetzung für dieses Lernmodul ist eine erfolgreiche Bearbeitung des Lernmoduls 2 dieses Faches

- Funktionen und Gleichungen erster Ordnung einordnen und anwenden

Alle weiteren notwendigen Informationen und Arbeitsunterlagen sind in diesem Lernmodul enthalten.

Dieses Lernmodul ist im häuslichen Studium zu erarbeiten.

Der benötigte Zeitaufwand liegt bei ca. 44 Stunden.

Zusätzlich finden in den semesterbezogenen Präsenzphasen 14 Stunden Festigung und Vertiefung fachspezifischer und fächerübergreifender Zusammenhänge sowie die Beschreibung typischer Aufgaben und Problemstellungen statt.

### LERNMODUL 3

#### Ziele

#### Ausgangssituation

#### Planung

**Komplexaufgabe  
des Lernmoduls****Bevölkerungswachstum**

Wachstums- oder Vermehrungszahlen von Lebewesen können bei günstigen Bedingungen exponentiell steigen.

Dieser mathematische Zusammenhang kann z.B. auch zur Ermittlung der Wachstumsrate der Bevölkerung eines Landes verwendet werden.

Aus regelmäßigen Volkszählungen, die alle 5 Jahre stattfanden, liegen nun die im Folgenden aufgeführten Einwohnerzahlen eines Landes vor.

Jahr	Bevölkerung
1980	5 650 000
1985	6 268 696
1990	6 955 140
1995	7 716 754
2000	8 561 766

Das Ziel ist nun, die weitere Entwicklung der Bevölkerungszahl zu berechnen, um für das Land schon heute eine Entscheidungsgrundlage für zukünftige soziale und wirtschaftliche Entwicklungen zu erhalten.

In den Lernbereichen 3 und 4 dieses Lernmoduls werden die relevanten Funktionen und deren Beziehungen zueinander erarbeitet, um das Projekt „Bevölkerungswachstum“ realisieren zu können.

<b>1 Quadratische Funktionen .....</b>	<b>4</b>
1.1 Parabeln .....	4
1.2 Allgemeine quadratische Funktion .....	20
1.3 Quadratische Gleichungen und deren Lösung .....	24
1.4 Schnittpunkte von Parabeln mit anderen Grafen .....	38
<b>2 Wurzelfunktionen.....</b>	<b>55</b>
<b>3 Potenzfunktionen.....</b>	<b>67</b>
3.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten.....	67
3.2 Potenzfunktionen mit ganzzahligen und rationalen Exponenten .....	71
<b>4 Exponentialfunktionen .....</b>	<b>94</b>
<b>5 Logarithmusfunktionen .....</b>	<b>111</b>
5.1 Logarithmensysteme .....	111
5.2 Exponentialgleichungen .....	122
<b>Lösungsanhang .....</b>	<b>129</b>

## Inhaltsverzeichnis

Lernbereich

## 1 Quadratische Funktionen

### 1.1 Parabeln

In der Wertetabelle wird der Seitenlänge eines Quadrates der Flächeninhalt zugeordnet: Seitenlänge ( $a$ )  $\rightarrow$  Flächeninhalt ( $a^2$ ).

$a$	1	2	3	4	5	6	7	8
$a^2$	1	4	9	16	25	36	49	64

Weil jedem Wert  $a$  genau ein Wert  $a^2$  zugeordnet wird, handelt es sich um eine Funktion.

Die Funktion  $f$  hat die Zuordnungsvorschrift  $f: a \rightarrow a^2$ . Die Funktion ist definiert für den Definitionsbereich  $D = \{a \in \mathbb{R} \mid 1 \leq a \leq 8\}$ .

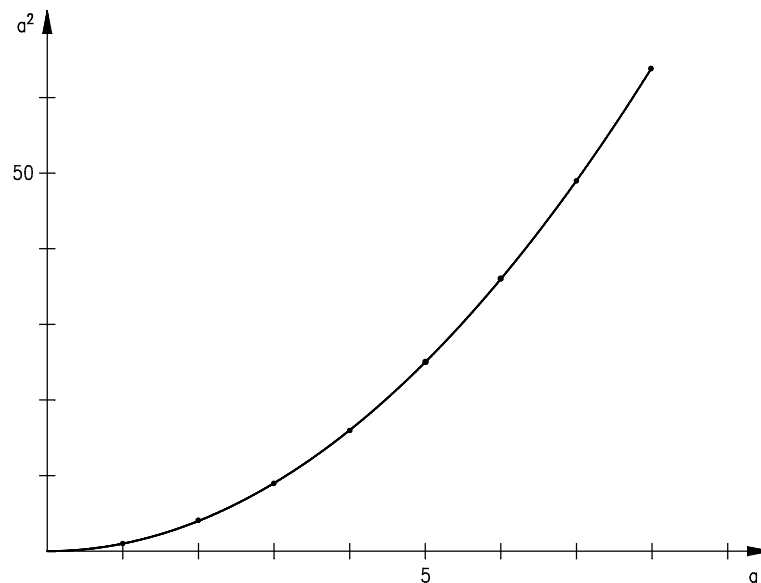


Abbildung 1 Graf der Funktion  $f(a)$

#### Lehrbeispiel 1

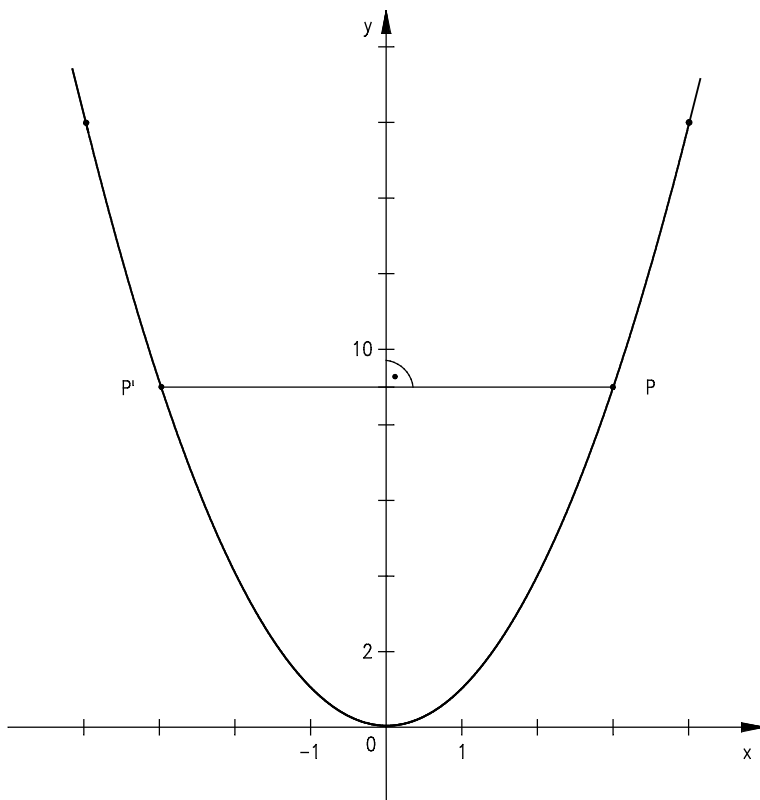
Legen Sie für die Funktion  $f(x) = x^2$  eine Wertetabelle an und zeichnen Sie den Grafen der Funktion!

#### Lösung

Wenn keine besondere Definitionsmenge angegeben ist, gilt:  $D = \mathbb{R}$ .

Da nur ein Ausschnitt des Grafen der Funktion gezeichnet werden kann, legt man je nach Aufgabenstellung sinnvoll Grenzen fest.

$x$	-4	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4
$f(x)$	16	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	16



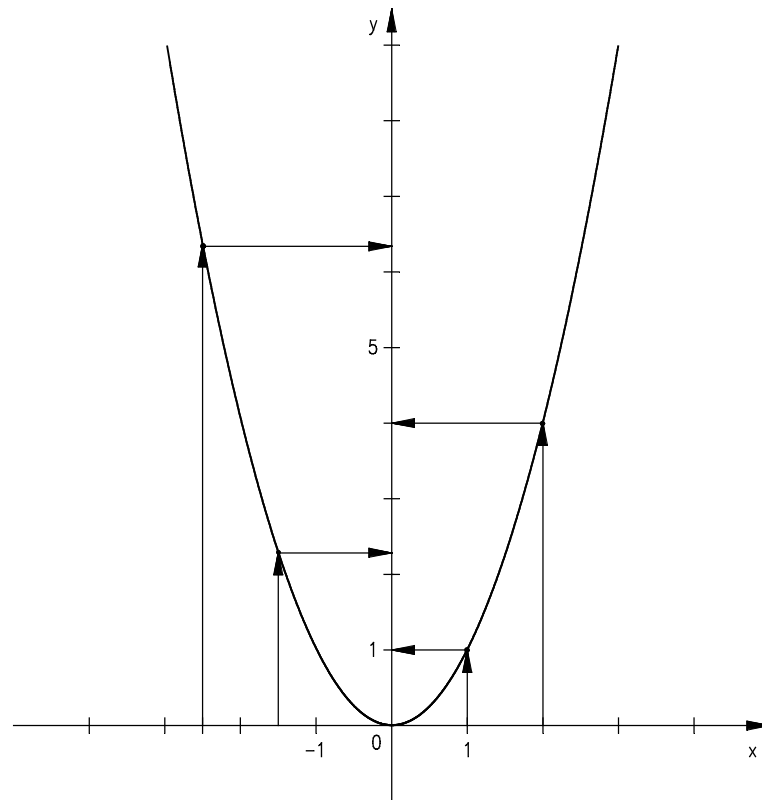
Der Graf der quadratischen Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^2$  ( $D = \mathbb{R}$ ) heißt **Normalparabel**. Wie am Beispiel von  $P$  und  $P'$  zu sehen ist, ist die Normalparabel **symmetrisch zur y-Achse**.

Der Funktionsgraf und die y-Achse schneiden sich im Ursprung, dem **Scheitelpunkt der Normalparabel**. An dieser Stelle ist der Funktionswert  $f(x) = 0$ . Die Funktion  $f$  hat **an der Stelle  $x = 0$  eine Nullstelle**. Die Normalparabel ist **nach oben geöffnet**.

### Lehrbeispiel 2

Zeichnen Sie die Normalparabel in ein Koordinatensystem für  $-3 \leq x \leq 3$ ! Bestimmen Sie mithilfe des Grafen die Funktionswerte  $f(-2,5)$ ;  $f(1)$ ;  $f(2)$ !

### Lösung



$$\begin{array}{llll}
 f(-2,5) = 6,25 & f(-1,5) = 2,25 & f(1) = 1 & f(2) = 4 \\
 -2,5 < -1,5 & & 1 < 2 & \\
 f(-2,5) > f(-1,5) & & f(1) < f(2) & 
 \end{array}$$

Es ist deutlich, dass die Normalparabel sich im negativen Bereich anders verhält als im positiven Bereich.

Man sagt: **Die Normalparabel fällt links vom Scheitelpunkt und steigt rechts vom Scheitelpunkt.**

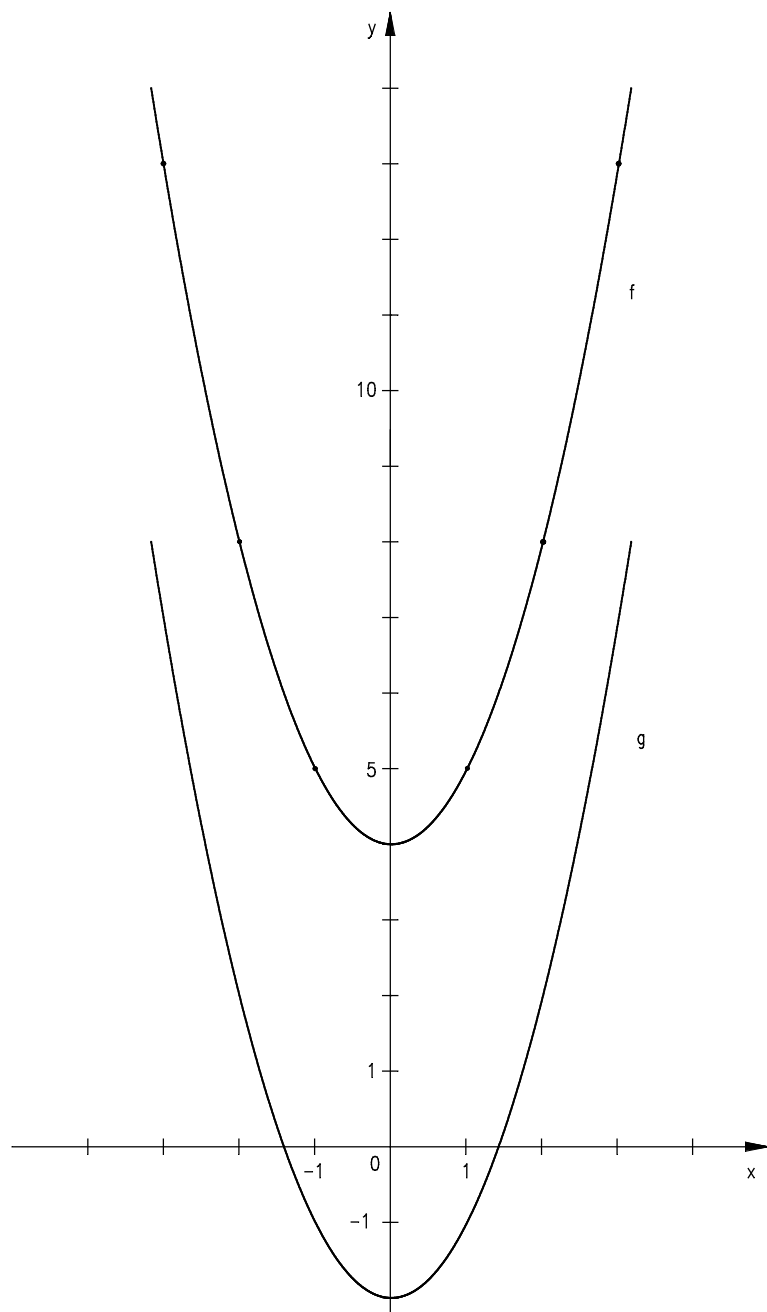
Aber für beide Seiten gilt: Die Funktionswerte  $f(x)$  sind nur positiv; d.h. die Wertemenge besteht aus allen nichtnegativen reellen Zahlen.  $W = \mathbb{R}_+$

### Lehrbeispiel 3

Zeichnen Sie die Grafen für die quadratischen Funktionen  $f(x) = x^2 + 4$  und  $g(x) = x^2 - 2$ ! Legen Sie zunächst jeweils eine Wertetabelle an!

**Lösung**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	13	8	5	4	5	8	13
g(x)	7	2	-1	-2	-1	2	7



Beide Grafen sind offensichtlich Normalparabeln, die im Fall von  $f(x)$  **nach oben**, im Fall von  $g(x)$  **nach unten verschoben** wurden.

Allgemein lässt sich formulieren:

Der Graf einer quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung  $y = x^2 + s$  ist eine **in Richtung der y-Achse verschobene Normalparabel**.

Für  $f(x) = x^2 + 4$  gilt:  $s = 4 (s > 0)$

Die Normalparabel ist um 4 Einheiten nach oben verschoben. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(0;4)$ .

Für  $g(x) = x^2 - 2$  gilt:  $s = -2 (s < 0)$

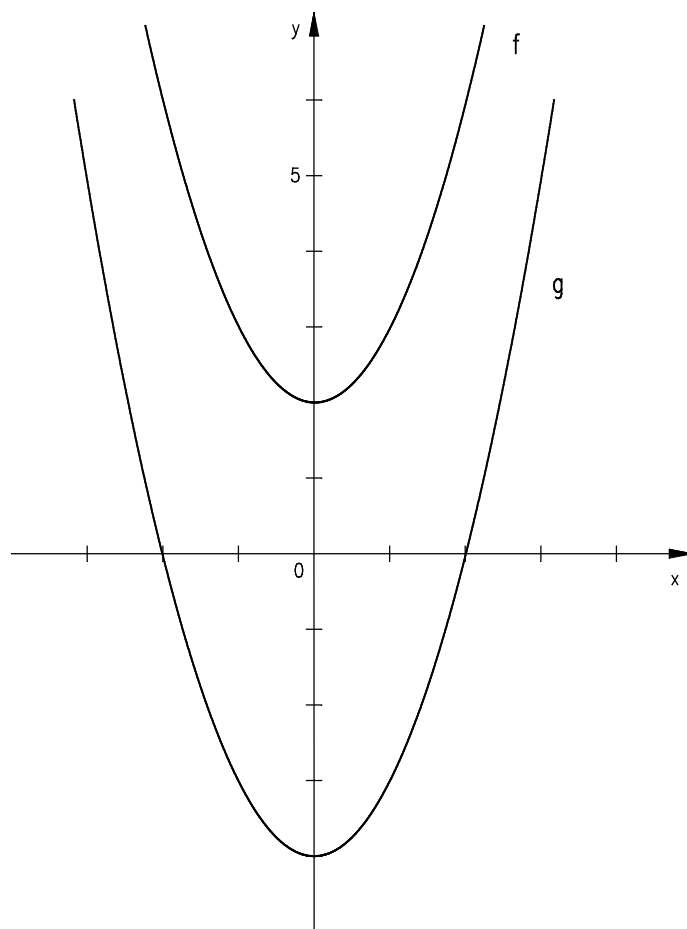
Die Normalparabel ist um 2 Einheiten nach unten verschoben. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(0;-2)$ .

**Allgemein für  $f(x) = x^2 + s$  gilt: Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(0;s)$ .**

#### Lehrbeispiel 4

Zeichnen Sie die Funktionsgrafen für  $f(x) = x^2 + 2$  und  $g(x) = x^2 - 4$ !  
Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen!

#### **Lösung**





Für  $f(x) = x^2 + 2$  ist festzustellen, dass es keine Stelle  $x$  gibt, bei der der Funktionswert  $f(x)$  Null wird. **Demnach gibt es auch keine Nullstelle.**

Der Graf von  $g(x) = x^2 - 4$  schneidet die  $x$ -Achse an den Stellen  $x = -2$  und  $x = 2$ . Für beide Stellen gilt:  $f(x) = 0$ .

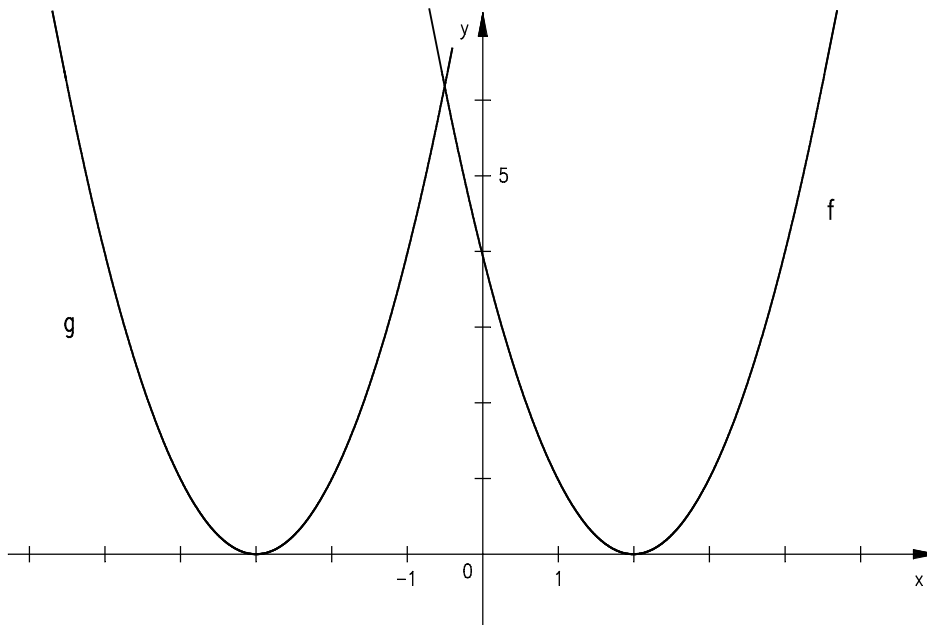
**Antwort:** Die Nullstellen der Funktion  $g(x) = x^2 - 4$  sind  $x = -2$  und  $x = 2$ .

### Lehrbeispiel 5

Zeichnen Sie die Grafen zu den angegebenen Funktionen! Bestimmen Sie den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Funktion!

$$f(x) = (x - 2)^2 \quad g(x) = (x + 3)^2$$

### Lösung



Beide Grafen sind Normalparabeln, die im Fall von  $f(x)$  nach rechts, im Fall von  $g(x)$  nach links verschoben wurden.

Allgemein lässt sich formulieren:

Der Graf einer quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung  $y = (x - r)^2$  ist eine **in Richtung der  $x$ -Achse verschobene Normalparabel.**

Für  $f(x) = (x - 2)^2$  gilt:  $r = 2 (r > 0)$

Die Normalparabel ist um 2 Einheiten nach rechts verschoben. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(2;0)$ .

Für  $g(x) = (x + 3)^2$  gilt:  $r = -3 (r < 0)$

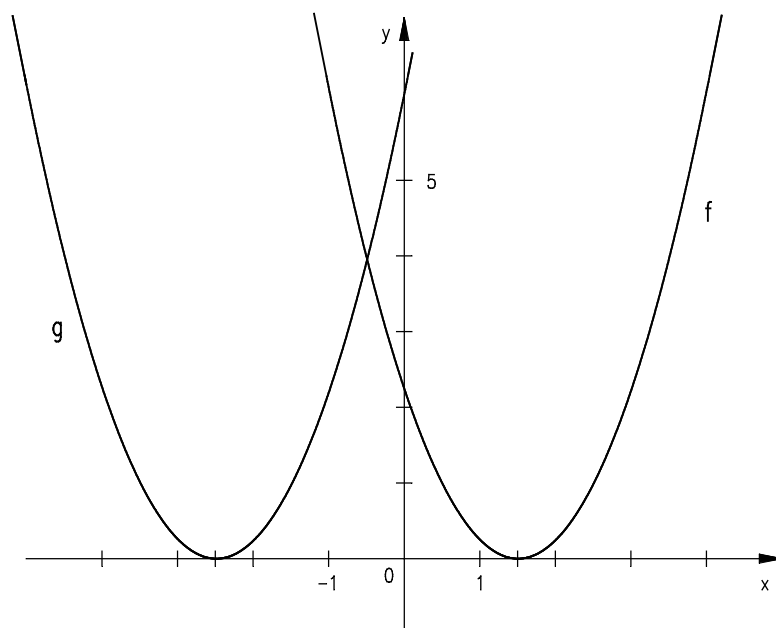
Die Normalparabel ist um 3 Einheiten nach links verschoben. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(-3;0)$ .

Allgemein für  $f(x) = (x - r)^2$  gilt: Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(r;0)$ .

### Lehrbeispiel 6

Zeichnen Sie die Funktionsgraphen für  $f(x) = (x - 1,5)^2$  und  $g(x) = (x + 2,5)^2$ ! Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen!

### **Lösung**



Beide Grafen haben ihren Scheitelpunkt auf der x-Achse. Demnach sind die Nullstellen identisch mit den Scheitelpunkten.

Für  $f(x) = (x - 1,5)^2$  gilt: Nullstelle  $x = 1,5$ .

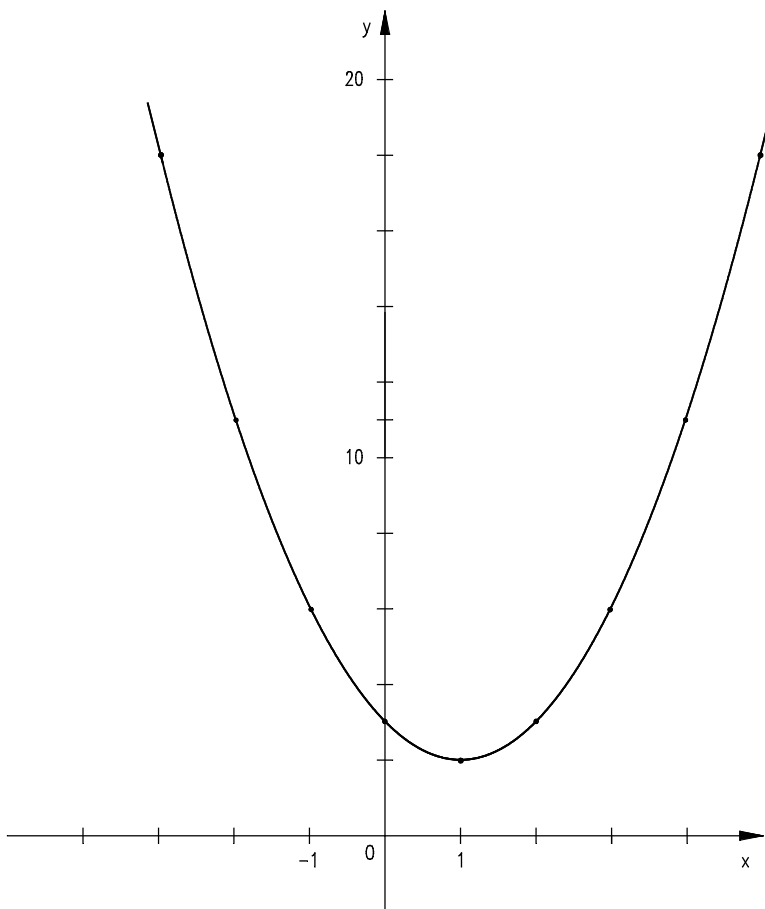
Für  $g(x) = (x + 2,5)^2$  gilt: Nullstelle  $x = -2,5$ .

### Lehrbeispiel 7

Zeichnen Sie den Grafen von  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$  und bestimmen Sie den Scheitelpunkt! Legen Sie zunächst eine Wertetabelle an mit x-Werten zwischen  $-3$  und  $5$ !

### **Lösung**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	18	11	6	3	2	3	6	11	18



Der Graf ist eine um **1 Einheit nach rechts** und um **2 Einheiten nach oben verschobene Normalparabel**.

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(1;2)$ .

Zwischen der Funktionsgleichung und dem Scheitelpunkt  $S$  lässt sich folgender Zusammenhang formulieren:

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2; r = 1; s = 2 \Rightarrow \text{Scheitelpunkt } S(1;2)$$

Der Graf einer Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = (x - r)^2 + s$  ist eine verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt  $S(r;s)$ . Diese Darstellung einer quadratischen Funktion heißt **Scheitelpunktform**.

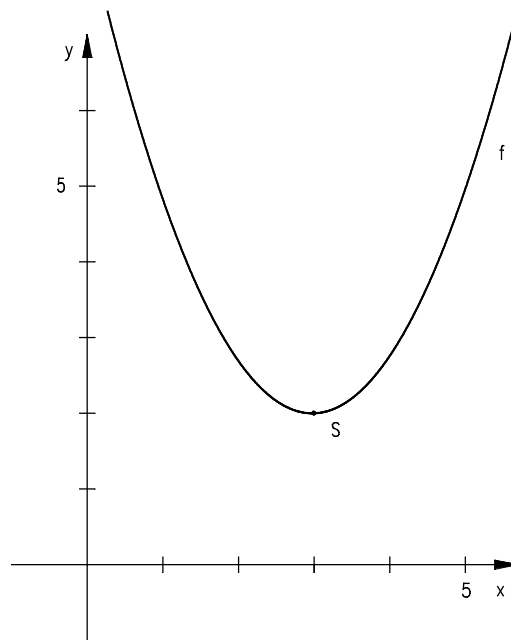
#### Lehrbeispiel 8

*Zeichnen Sie den Grafen der Funktion  $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ ! Bestimmen Sie zunächst den Scheitelpunkt!*

#### **Lösung**

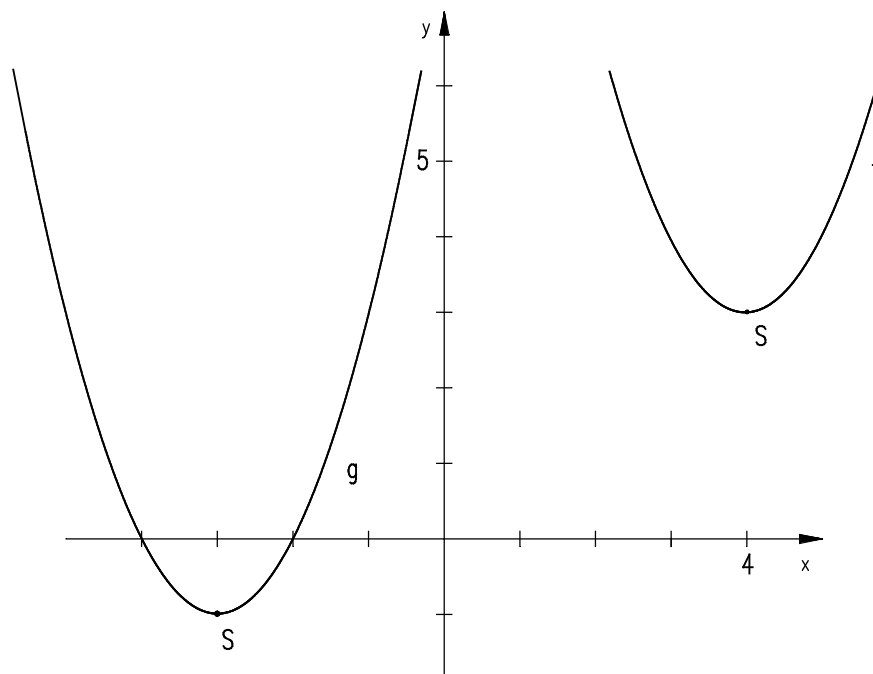
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(r;s)$ . Diese lassen sich aus der Funktionsgleichung ablesen:  $r = 3$ ;  $s = 2$ .

Scheitelpunktkoordinaten:  $S(3;2)$



#### Lehrbeispiel 9

*Bestimmen Sie jeweils den Scheitelpunkt der Parabel und geben Sie die Funktionsgleichung an!*



**Lösung**

Scheitelpunkt von g:  $S(-3;-1)$ ; Funktionsgleichung von g:  $g(x) = (x + 3)^2 - 1$

Scheitelpunkt von f:  $S(4;3)$ ; Funktionsgleichung von f:  $f(x) = (x - 4)^2 + 3$

Lehrbeispiel 10

*Überprüfen Sie, ob die Punkte P und Q auf dem Grafen von f liegen!*

$$f(x) = (x - 2,5)^2 + 3,6; \quad P(9,5;52,6); \quad Q(-1,5;18,6)$$

**Lösung**

$$f(x) = (x - 2,5)^2 + 3,6$$

$$P(9,5;52,6)$$

$$Q(-1,5;18,6)$$

$$52,6 = (9,5 - 2,5)^2 + 3,6$$

$$= 7^2 + 3,6$$

$$52,6 = 49 + 3,6$$

(w)

$$18,6 = (-1,5 - 2,5)^2 + 3,6$$

$$= (-4)^2 + 3,6$$

$$18,6 = 16 + 3,6$$

(f)

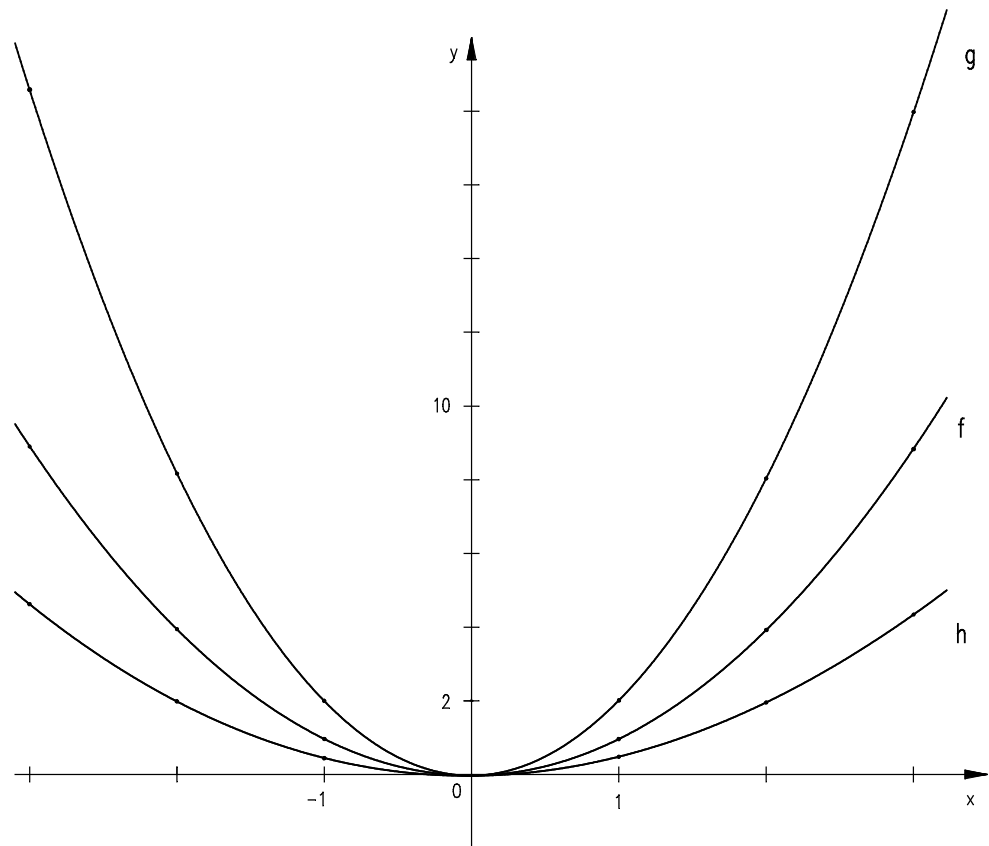
**Antwort:** Der Punkt P liegt auf dem Grafen, der Punkt Q liegt nicht auf dem Grafen.

Lehrbeispiel 11

*Zeichnen Sie die Grafen der gegebenen Funktionen!*

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = 2x^2 \quad h(x) = 1/2 x^2$$

### Lösung



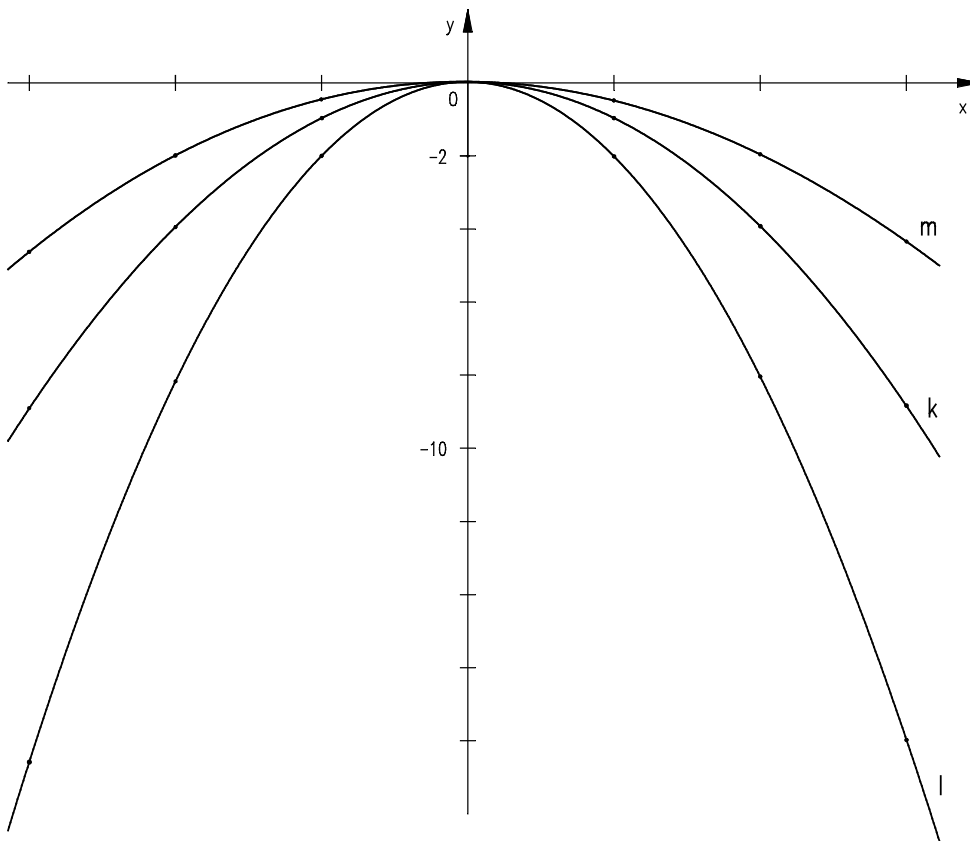
Den Grafen der Funktionen sind folgende Eigenschaften zu entnehmen:

- Der Graf einer quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = ax^2$  ( $a > 0$ ) ist eine nach oben geöffnete Parabel.
- Der Graf der Funktion  $g(x) = 2x^2$  ( $a > 1$ ) ist steiler als die Normalparabel. Der Scheitelpunkt ist  $S(0;0)$ ; die Nullstelle ist  $x = 0$ .
- Der Graf der Funktion  $h(x) = 1/2 x^2$  ( $0 < a < 1$ ) ist flacher als die Normalparabel. Der Scheitelpunkt ist  $S(0;0)$ ; die Nullstelle ist  $x = 0$ .
- Je größer  $a$  ist, desto steiler verläuft die Parabel.

### Lehrbeispiel 12

Zeichnen Sie die Grafen der gegebenen Funktionen!

$$k(x) = -x^2 \quad l(x) = -2x^2 \quad m(x) = -1/2 x^2$$

**Lösung**

Den Grafen der Funktionen sind folgende Eigenschaften zu entnehmen:

- Der Graf einer quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = ax^2$  ( $a < 0$ ) ist eine nach unten geöffnete Parabel.
- Die Grafen sind jeweils an der x-Achse gespiegelt:

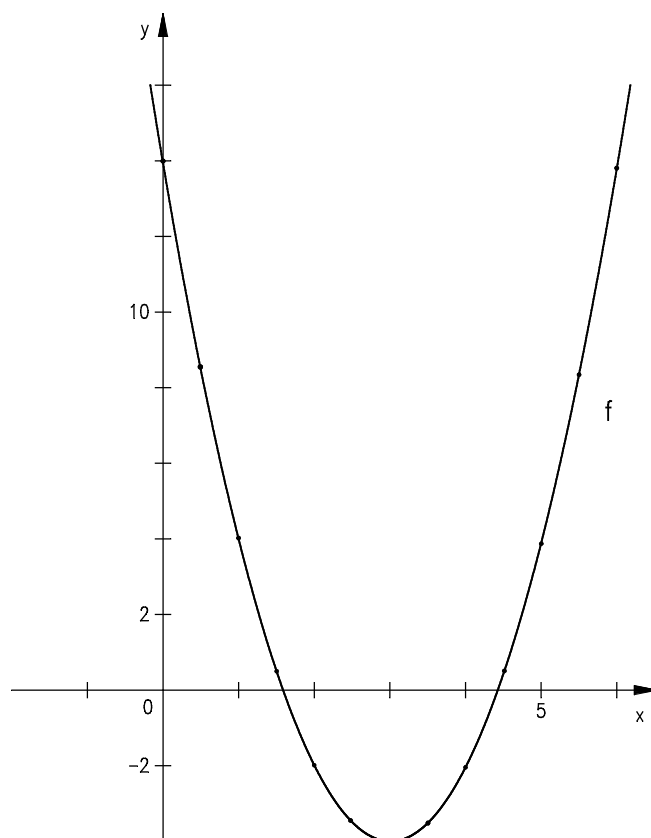
Der Graf von  $k(x) = -x^2$  durch Spiegelung von  $f(x) = x^2$ ; der Graf von  $l(x) = -2x^2$  durch Spiegelung von  $g(x) = 2x^2$ ; der Graf von  $m(x) = -\frac{1}{2}x^2$  durch Spiegelung von  $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

**Lehrbeispiel 13**

Zeichnen Sie den Grafen der Funktion  $f(x) = 2x^2 - 12x + 14$ ! Berechnen Sie die Funktionswerte für  $x$ -Werte zwischen 0 und 6 (Abstand 0,5)! Bestimmen Sie anhand des Grafen den Scheitelpunkt!

**Lösung**

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
f(x)	14	8,5	4	0,5	-2	-3,5	-4	-3,5	-2	0,5	4	8,5	14



**Antwort:** Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(3; -4)$ .

Mithilfe der Wertetabelle lässt sich häufig der Scheitelpunkt der Parabel ohne aufwändige Rechnungen nicht genau bestimmen. Für das Zeichnen einer Parabel ist die genaue Angabe der Scheitelpunktkoordinaten aber von großer Bedeutung.

#### Lehrbeispiel 14:

*Zeichnen Sie den Grafen der Funktion  $f(x) = 2x^2 - 8x - 4$ ! Legen Sie eine Wertetabelle an für  $x$ -Werte von  $-2$  bis  $5$ ! Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes!*

#### **Lösung**

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	20	6	-4	-10	-12	-10	-4	6

Aus der Wertetabelle ergibt sich nicht zweifelsfrei, dass der niedrigste Funktionswert  $-12$  ist.

Aus diesem Grund soll nun die Funktionsgleichung  $f(x) = 2x^2 - 8x - 4$  in die Scheitelpunktform umgeformt werden.

$$f(x) = 2x^2 - 8x - 4$$



**1. Schritt:**

$$f(x) = 2 [x^2 - 4x] - 4$$

Ausklammern des Faktors vor  $x^2$   
vor den beiden Summanden mit  
der Variablen  $x$

**2. Schritt:**

Aus dem Klammerterm wird ein  
vollständiges Binom erzeugt.

Wichtig:

Der Gleichungsterm darf sich  
nicht ändern.

Dafür muss die **quadratische**  
**Ergänzung** zunächst addiert und  
wieder subtrahiert werden

(hier:  $+4$   $-4$ ).

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 [x^2 - 4x + 4] - 8 - 4 \\ &= 2 (x - 2)^2 - 12 \end{aligned}$$

Aus der nun vorliegenden Scheitelpunktform können die Koordinaten des Scheitelpunktes abgelesen werden:  $S(2; -12)$ .

Lehrbeispiel 15

*Zeichnen Sie den Graf der Funktion  $f(x) = 4x^2 - 16x + 15$ ! Berechnen Sie zur Kontrolle die Koordinaten des Scheitelpunktes!*

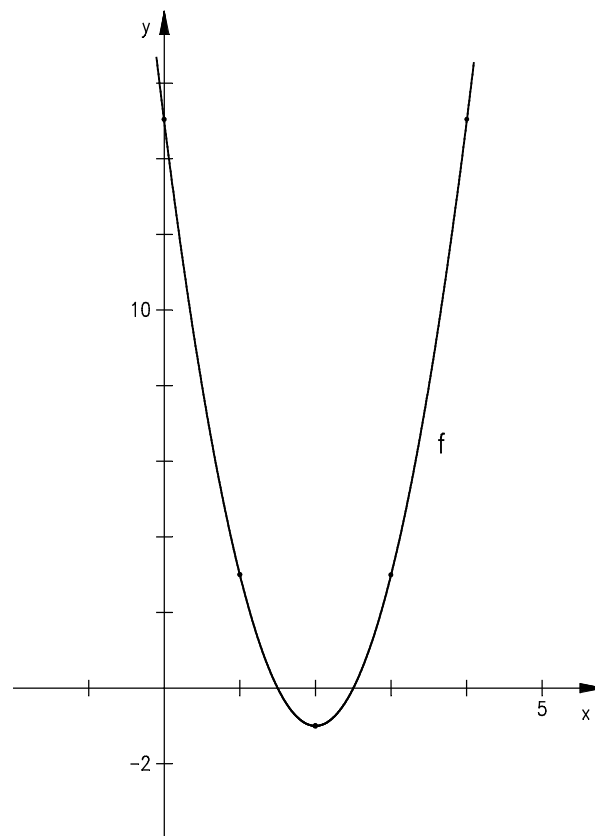
**Lösung**

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 16x + 15 \\ &= 4 (x^2 - 4x) + 15 \\ &= 4 (x^2 - 4x + 4 - 4) + 15 \\ f(x) &= 4 (x - 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

Scheitelpunkt  $S(2; -1)$

Von der  $x$ -Koordinate des Scheitelpunktes werden - je nach Aufgabenstellung - 2 oder 3 Werte nach links und rechts vorgegeben.

$x$	0	1	2	3	4
$f(x)$	15	3	-1	3	15



### Lehrbeispiel 16

Zeichnen Sie den Graf der Funktion  $f(x) = -5x^2 - 15x + 19$ ! Bestimmen Sie zunächst die Koordinaten des Scheitelpunktes!

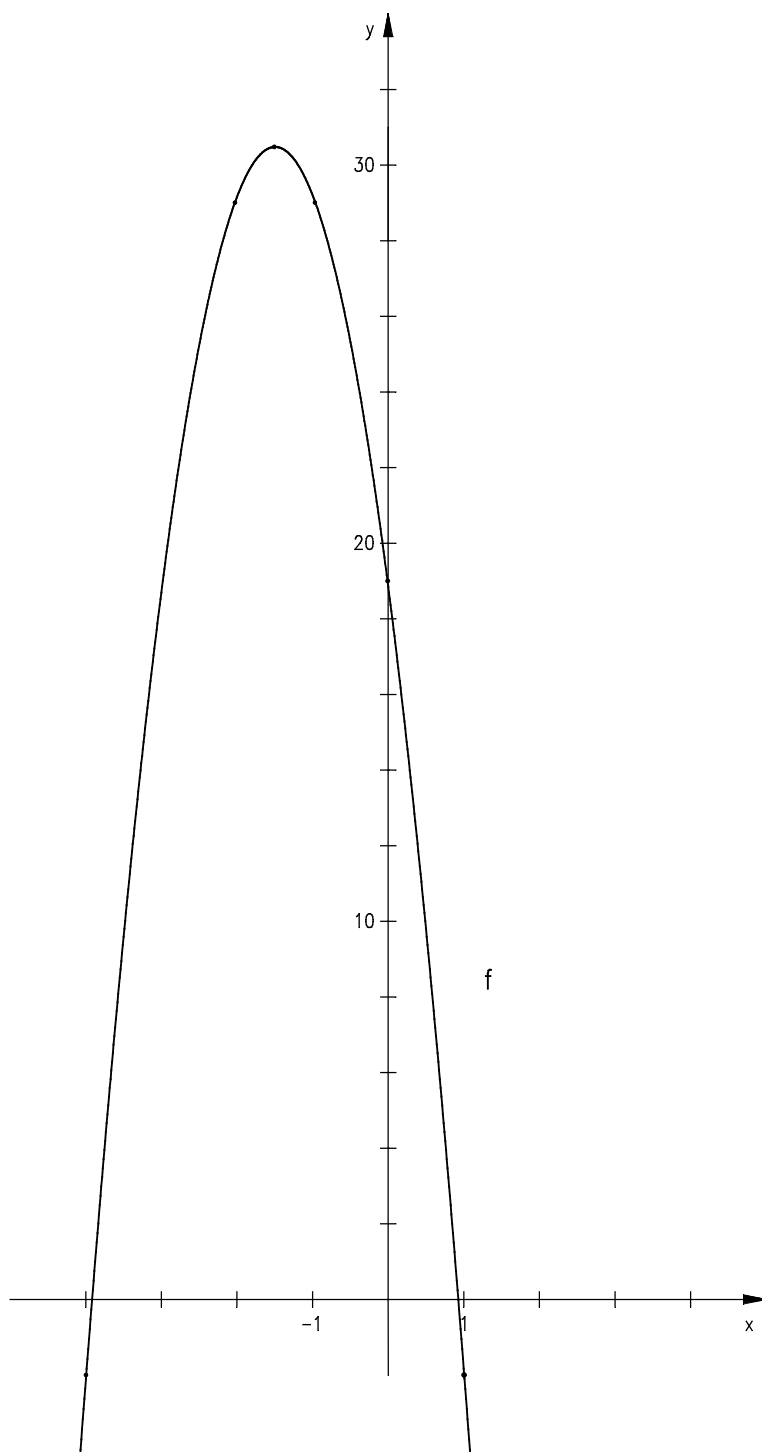
### Lösung

$$\begin{aligned} f(x) &= -5x^2 - 15x + 19 \\ &= -5(x^2 + 3x) + 19 \\ &= -5(x^2 + 3x + 2,25 - 2,25) + 19 \\ &= -5(x^2 + 3x + 2,25) + 30,25 \end{aligned}$$

$$f(x) = -5(x + 1,5)^2 + 30,25$$

Scheitelpunkt  $S(-1,5;30,25)$

x	-4	-3	-2	-1,5	-1	0	1
f(x)	-1	19	29	30,25	29	19	-1



## 1.2 Allgemeine quadratische Funktion

Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion lautet:  $y = ax^2 + bx + c$ .

Die Formvariablen **a** und **b** heißen **Koeffizienten der quadratischen Funktion**. Sie stehen für reelle Zahlen. Der Koeffizient a darf nicht Null sein.

### Lehrbeispiel 1

*Zeichnen Sie die Funktionsgrafen der quadratischen Funktionen in ein Koordinatensystem! Berechnen Sie zunächst jeweils den Scheitelpunkt S! Bestimmen Sie anhand des Grafen den Schnittpunkt mit der y-Achse und die Nullstellen!*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(x) &= 1,5x^2 - 6x + 4,5 \\ h(x) &= -0,5x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

### **Lösung**

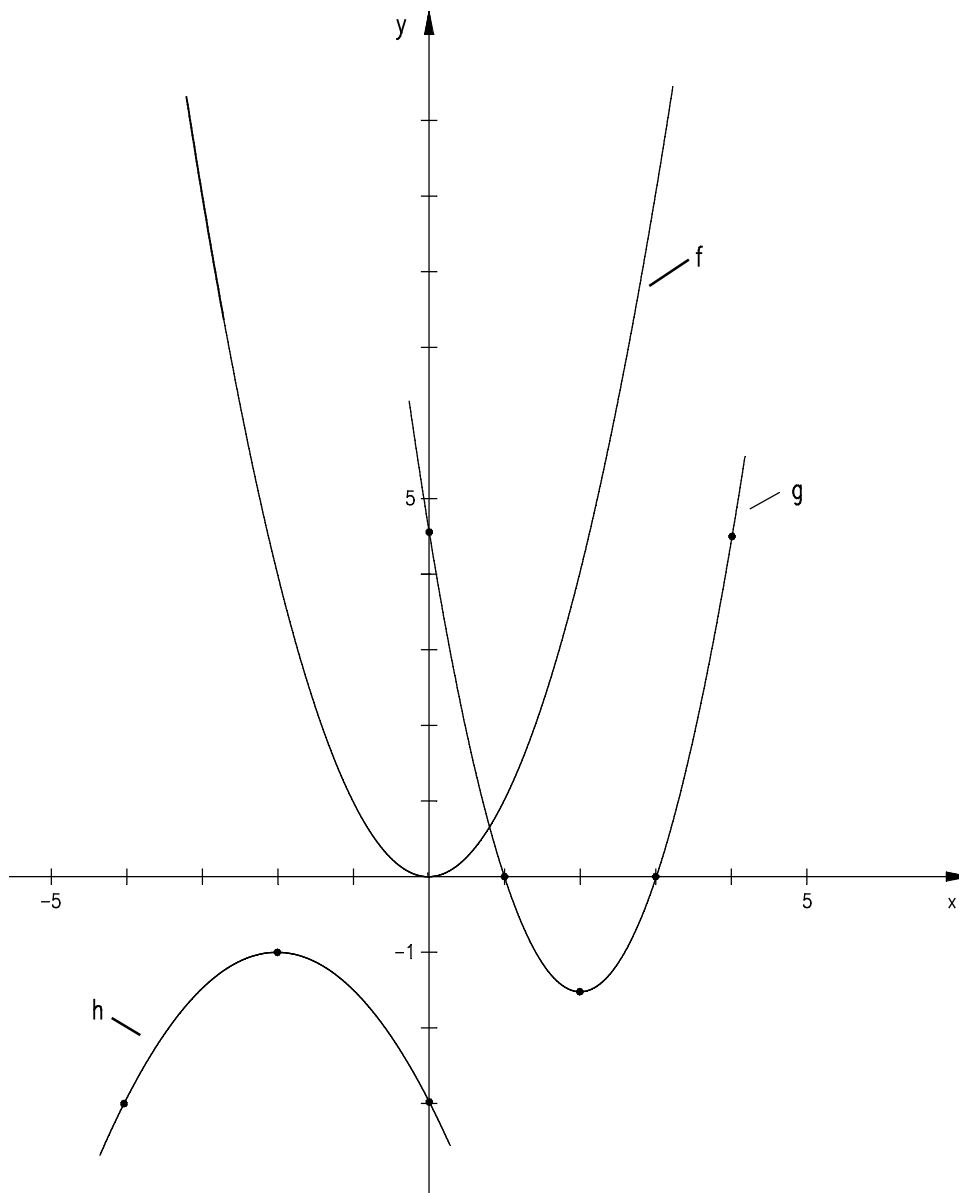
$$f(x) = x^2 \quad \text{Scheitelpunkt } S(0;0)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 1,5x^2 - 6x + 4,5 \\ &= 1,5(x^2 - 4x) + 4,5 \\ &= 1,5(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4,5 \\ &= 1,5(x^2 - 4x + 4) - 1,5 \end{aligned}$$

$$g(x) = 1,5(x - 2)^2 - 1,5 \quad \text{Scheitelpunkt } S(2; -1,5)$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -0,5x^2 - 2x - 3 \\ &= -0,5(x^2 + 4x) - 3 \\ &= -0,5(x^2 + 4x + 4 - 4) - 3 \\ &= -0,5(x^2 + 4x + 4) - 1 \end{aligned}$$

$$h(x) = -0,5(x + 2)^2 - 1 \quad \text{Scheitelpunkt } S(-2; -1)$$



Die Funktionsgraphen  $g(x)$  und  $h(x)$  sollen nun mit dem Grafen der Normalparabel  $f(x)$  verglichen werden.

Dabei ergeben sich für  $g(x)$  folgende Erkenntnisse:

- Die Koeffizienten sind  $a = 1,5$  ;  $b = -6$  ;  $c = 4,5$
- Der Graf ist eine **nach oben geöffnete Parabel**. **Begründung:  $a > 0$**
- Außerdem ist der Graf **steiler als die Normalparabel**. **Begründung:  $a > 1$**
- Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten  $P(0;4,5)$
- Der Graf schneidet die x-Achse in den **Nullstellen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 3$**

Für  $h(x)$  ergeben sich folgende Erkenntnisse:

- Die Koeffizienten sind  $a = -0,5$ ;  $b = -2$ ;  $c = -3$
- Der Graf ist eine **nach unten geöffnete Parabel**. **Begründung:  $a < 0$**
- Außerdem ist der Graf **flacher als die Normalparabel**.  
**Begründung:  $-1 < a < 0$**
- Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten  $Q(0; -3)$
- Der Graf schneidet nicht die x-Achse. **Es gibt keine Nullstellen.**

Zusammenfassend lassen sich folgende Aussagen treffen:

- (1) Der Graf einer quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung  **$f(x) = ax^2 + bx + c$  ist eine Parabel.**
- (2) Der **Koeffizient  $a$  bestimmt**, ob die Parabel **nach oben oder nach unten geöffnet** ist. Außerdem bestimmt er **die Steigung der Parabel**.
- (3) Der **Koeffizient  $c$  bestimmt den Schnittpunkt mit der y-Achse**. Er hat die Koordinaten  $(0; c)$ .
- (4) Eine quadratische Funktion hat **entweder eine Nullstelle ( $f(x) = x^2$ )**, zwei Nullstellen ( **$g(x) = 1,5x^2 - 6x + 4,5$** ) oder **keine Nullstellen ( $h(x) = -0,5x^2 - 2x - 3$ )**.

### Lehrbeispiel 2

*Zeichnen Sie die Grafen der angegebenen Funktionen in ein Koordinatensystem! Berechnen Sie jeweils die Koordinaten des Punktes, in dem die Funktionen ihren größten bzw. kleinsten Funktionswert annehmen! Beschreiben Sie das Steigungsverhalten der Parabel links und rechts von diesem Punkt! Legen Sie eine Wertetabelle mit sinnvollen x-Werten an!*

$$f(x) = -2x^2 - 6x - 1,5; g(x) = 0,5x^2 - 2x + 3$$

### **Lösung**

Der Punkt, bei dem der Funktionswert einer quadratischen Funktion ihren größten bzw. kleinsten Wert annimmt, ist ihr Scheitelpunkt.

$$\begin{aligned} \text{Für } f(x) \text{ gilt: } f(x) &= -2x^2 - 6x - 1,5 \\ &= -2(x^2 + 3x) - 1,5 \\ &= -2(x^2 + 3x + 2,25 - 2,25) - 1,5 \\ &= -2(x^2 + 3x + 2,25) + 3 \\ f(x) &= -2(x + 1,5)^2 + 3 \end{aligned}$$

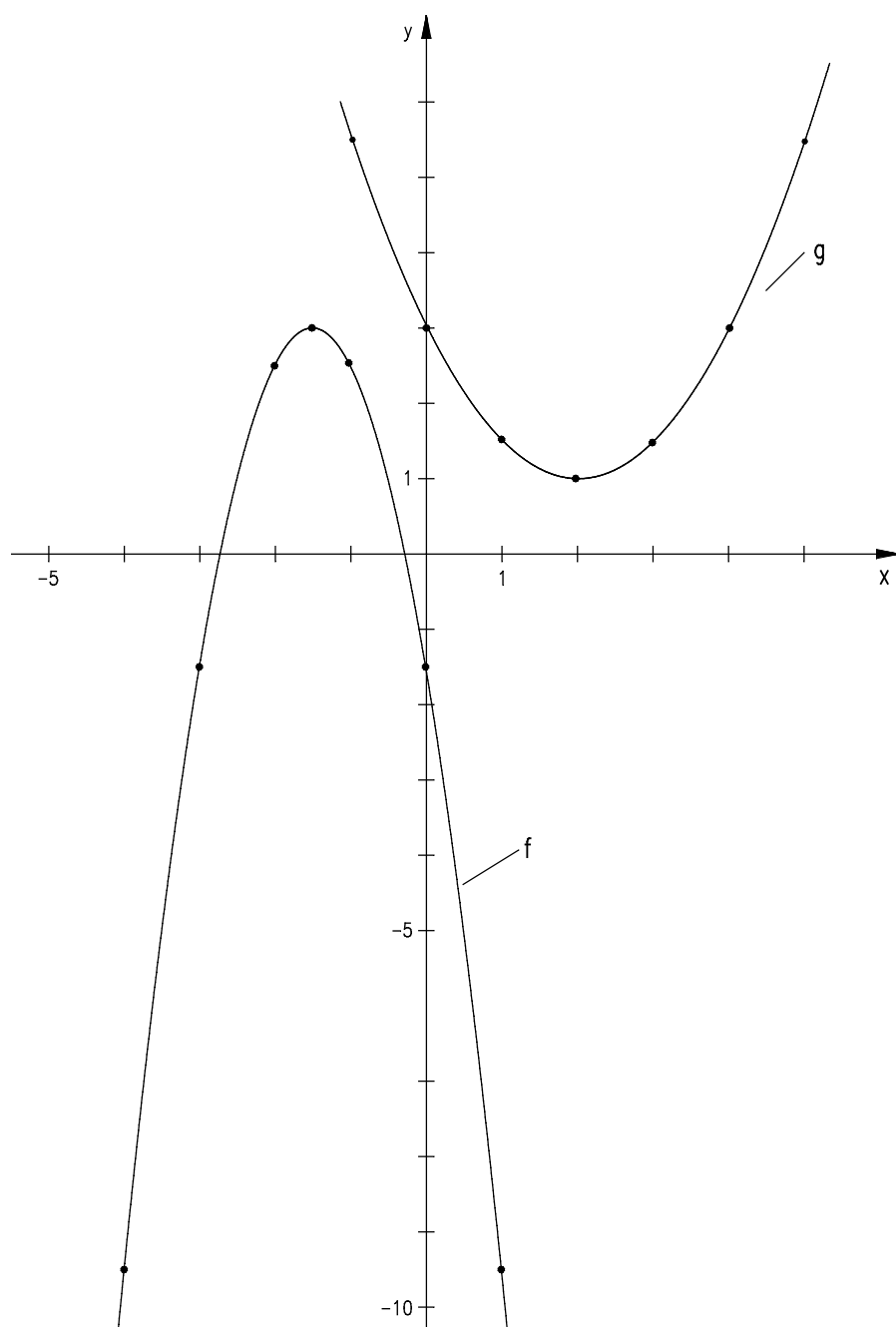
Scheitelpunkt  $S(-1,5; 3)$

x	-4	-3	-2	-1,5	-1	0	1
f(x)	-9,5	-1,5	2,5	3	2,5	-1,5	-9,5

$$\begin{aligned} \text{Für } g(x) \text{ gilt: } g(x) &= 0,5x^2 - 2x + 3 \\ &= 0,5(x^2 - 4x) + 3 \\ &= 0,5(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3 \\ &= 0,5(x^2 - 4x + 4) + 1 \\ g(x) &= 0,5(x - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Scheitelpunkt  $S(2;1)$ 

x	-1	0	1	2	3	4	5
g(x)	5,5	3	1,5	1	1,5	3	5,5



Steigungsverhalten von  $f$ : links vom Scheitelpunkt ( $x = -1,5$ ) steigt der Graf, rechts vom Scheitelpunkt fällt der Graf.

Steigungsverhalten von  $g$ : links vom Scheitelpunkt ( $x = 2$ ) fällt der Graf, rechts vom Scheitelpunkt steigt der Graf.

### 1.3 Quadratische Gleichungen und deren Lösung

In dem Koordinatensystem ist der Graf der Funktion  $y = x^2 - 9$  dargestellt. Der Graf schneidet die x-Achse an zwei Stellen; d.h. es existieren zwei Nullstellen:  $x_1 = -3$  und  $x_2 = 3$ . In den Nullstellen nimmt die Funktion den Wert 0 an.

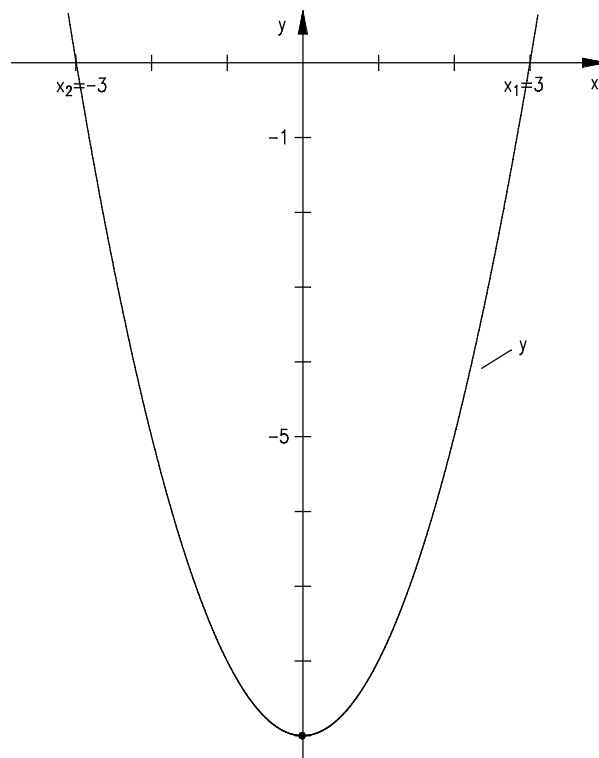


Abbildung 2 Funktionsgraf  $y = x^2 - 9$

$$\text{Dann ergibt sich für } y = 0 : \quad \begin{array}{l} x^2 - 9 = 0 \\ x^2 = 9 \end{array}$$

Da es offensichtlich zwei Nullstellen gibt, muss dies auch durch eine Rechnung nachgewiesen werden können.

$$\begin{array}{ll} x = +\sqrt{9} & \vee \quad x = -\sqrt{9} \\ x_1 = 3 & x_2 = -3 \end{array}$$

Für eine quadratische Gleichung der Form  $x^2 + q = y$  werden die Nullstellen so bestimmt, dass der Funktionswert  $y$  Null gesetzt wird. Die Nullstellen werden Lösungen der quadratischen Gleichung genannt.

Eine quadratische Gleichung der Form  $x^2 + q = 0$  hat für  $q < 0$  zwei Lösungen:

$$x_1 = \sqrt{q} ; \quad x_2 = -\sqrt{q}$$



Lehrbeispiel 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung  $4x^2 - 144 = 0$ !

**Lösung**

Im **1. Lösungsschritt** muss die Gleichung so umgeformt werden, dass der Faktor vor  $x^2$  1 ist.

$$\begin{array}{rcl} 4x^2 - 144 = 0 & | : 4 \\ x^2 - 36 = 0 & | +36 \\ x^2 = 36 \end{array}$$

$$x = \sqrt{36} \quad \vee \quad x = -\sqrt{36}$$

$$x_1 = 6 \quad x_2 = -6$$

$$L = \{-6; 6\}$$

Lehrbeispiel 2

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der angegebenen quadratischen Gleichung! Geben Sie zunächst die zugehörige Funktionsgleichung an und zeichnen Sie die entsprechende Parabel!

$$0 = x^2 + 2$$

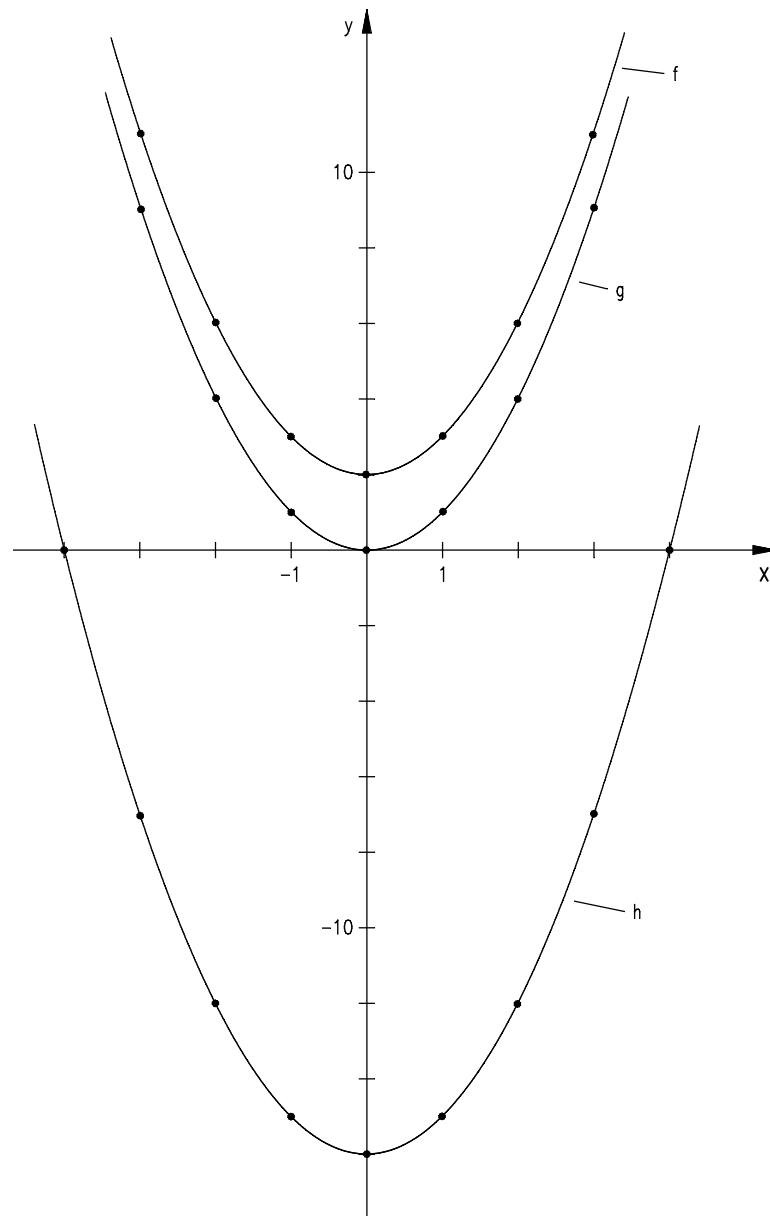
$$0 = x^2$$

$$0 = x^2 - 16$$

**Lösung**

$$\text{Quadratische Gleichung} \quad 0 = x^2 + 2 \quad 0 = x^2 \quad 0 = x^2 - 16$$

$$\text{Funktionsgleichung} \quad f(x) = x^2 + 2 \quad g(x) = x^2 \quad h(x) = x^2 - 16$$



**Antwort:** Die Gleichung  $y = x^2 + 2$  hat **keine Nullstelle**, d.h. sie hat **keine Lösung**.

Die Gleichung  $y = x^2$  hat **eine Nullstelle**, d.h. sie hat **eine Lösung**:  $L = \{0\}$ .

Die Gleichung  $y = x^2 - 16$  hat **zwei Nullstellen**, d.h. sie hat **zwei Lösungen**:  $L = \{-4; 4\}$

**Für quadratische Gleichungen der Form  $x^2 + q = 0$  gilt:**

**Ist  $q < 0$ : zwei Lösungen**

Beispiel:  $x^2 - 25 = 0$   $L = \{-5; 5\}$

**Ist  $q = 0$ : eine Lösung**

Beispiel :  $x^2 = 0$   $L = \{0\}$

**Ist  $q > 0$ : keine Lösung**

Beispiel :  $x^2 + 9 = 0$   $L = \{ \}$

Lehrbeispiel 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung  $x^2 - 2x = 0$ !

**Lösung**

Der Gleichungsterm kann durch Faktorzerlegung in ein Produkt umgewandelt werden.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 0 \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

**Zur Bestimmung der Lösungsmenge nutzt man die Regel, dass ein Produkt immer dann gleich Null ist, wenn mindestens ein Faktor Null ist.**

$$\begin{array}{lcl} x(x - 2) = 0 & & \\ x = 0 & \vee & (x - 2) = 0 \\ x_1 = 0 & & x_2 = 2 \end{array}$$

$$L = \{0; 2\}$$

**Jede quadratische Gleichung der Form  $x^2 + px = 0$  hat zwei Lösungen:**

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -p \quad L = \{0; -p\}$$

Lehrbeispiel 4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!  $0,5x^2 = 3,5x$

**Lösung**

Zunächst muss die Gleichung in die Form  $x^2 + px = 0$  umgeformt werden.

$$\begin{array}{lcl} 0,5x^2 = 3,5x & | - 3,5x & \\ 0,5x^2 - 3,5x = 0 & | : 0,5 & \\ x^2 - 7x = 0 & & \\ x(x - 7) = 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x = 0 & \vee & x - 7 = 0 \\ x_1 = 0 & & x_2 = 7 \end{array}$$

$$L = \{0; 7\}$$

### Lehrbeispiel 5

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!  $x^2 - 6x + 9 = 0$

### **Lösung**

Der Gleichungsterm  $x^2 - 6x + 9$  ist das vollständige 2. Binom und kann faktorisiert werden.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x - 3)^2 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$L = \{3\}$$

### Lehrbeispiel 6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!  $(x + 3)^2 - 2,25 = 0$

### **Lösung**

Durch Umformung der Gleichung kann der binomische Term auf der linken Seite isoliert werden.

$$\begin{aligned} (x + 3)^2 - 2,25 &= 0 & | + 2,25 \\ (x + 3)^2 &= 2,25 \end{aligned}$$

Auf beiden Gleichungsseiten muss die Wurzel gezogen werden. Dabei ist folgende Regel zu beachten:

**Für jede positive reelle Zahl gilt:**  $(\sqrt{a})^2 = a$     und     $(-\sqrt{a})^2 = a$ .

D.h. es gibt eine positive und eine negative Zahl, deren Quadrat a ist.

$$\begin{aligned} x + 3 &= \sqrt{2,25} & \vee & & x + 3 &= -\sqrt{2,25} \\ x_1 &= -3 + 1,5 & & & x_2 &= -3 - 1,5 \\ x_1 &= -1,5 & & & x_2 &= -4,5 \end{aligned}$$

$$L = \{-1,5; -4,5\}$$

### Lehrbeispiel 7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung  $(x - 0,4)^2 - 2,56 = 0$ !

### **Lösung**

$$\begin{aligned} (x - 0,4)^2 - 2,56 &= 0 & & & | + 2,56 \\ (x - 0,4)^2 &= 2,56 & & & | \sqrt{\phantom{x}} \\ x - 0,4 &= \sqrt{2,56} & \vee & & x - 0,4 &= -\sqrt{2,56} \\ x_1 &= 0,4 + 1,6 & & & x_2 &= 0,4 - 1,6 \\ x_1 &= 2 & & & x_2 &= -1,2 \end{aligned}$$

$$L = \{2; -1,2\}$$

Lehrbeispiel 8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung  $x^2 + 6x - 7 = 0$ !

**Lösung**

Der Gleichungsterm  $x^2 + 6x - 7$  ist kein vollständiges Binom. Um ein solches herzustellen, müssen der quadratische Term  $x^2$  und der lineare Term  $6x$  isoliert werden.

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 6x - 7 & = & 0 \\ x^2 + 6x & = & 7 \end{array} \quad | + 7$$

Nun kann auf der linken Seite der Gleichung durch Ergänzung ein vollständiges 1. Binom erzeugt werden. Man nennt diesen Term quadratische Ergänzung.

**Wichtig:** Die Addition muss auf beiden Seiten der Gleichung erfolgen.

$$x^2 + 6x + \boxed{9} = 7 + \boxed{9}$$

$\left[ (6/2)^2 \right]$

$$(x + 3)^2 = 16 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\begin{array}{lcl} x + 3 = \sqrt{16} & \vee & x + 3 = -\sqrt{16} \\ x_1 = -3 + 4 & & x_2 = -3 - 4 \\ x_1 = 1 & & x_2 = -7 \end{array}$$

$$L = \{1; -7\}$$

Lehrbeispiel 9

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung  $x^2 + 20x + 10 = -9$ !

**Lösung**

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 20x + 10 & = & -9 \\ x^2 + 20x & = & -19 \\ x^2 + 20x + 100 & = & -19 + 100 \end{array} \quad | -10$$

$$\begin{array}{rcl} (x + 10)^2 & = & 81 \\ x + 10 = \sqrt{81} & \vee & x + 10 = -\sqrt{81} \\ x_1 = -10 + 9 & & x_2 = -10 - 9 \\ x_1 = -1 & & x_2 = -19 \end{array} \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$L = \{-1; -19\}$$

Eine quadratische Gleichung in der Normalform  $x^2 + px + q = 0$  kann mithilfe der quadratischen Ergänzung gelöst werden.

Lehrbeispiel 10

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!  $2x^2 - 8x - 24 = 0$

### Lösung

Diese Gleichung der Form  $ax^2 + bx + c = 0$  kann nicht direkt mithilfe der quadratischen Ergänzung gelöst werden. Zunächst muss sie in die Normalform  $x^2 + px + q = 0$  umgeformt werden. Dazu muss der Faktor vor dem quadratischen Term 1 sein.

$$\begin{array}{rcll}
 2x^2 - 8x - 24 = 0 & & | : 2 & \\
 x^2 - 4x - 12 = 0 & & | + 12 & \\
 x^2 - 4x & = & 12 & \\
 x^2 - 4x + \boxed{4} = 12 + \boxed{4} & & & \\
 (x - 2)^2 = 16 & & | \sqrt{\phantom{x}} & \\
 x - 2 = \sqrt{16} & \vee & x - 2 = -\sqrt{16} & \\
 x_1 = 2 + 4 & & x_2 = 2 - 4 & \\
 x_1 = 6 & & x_2 = -2 & 
 \end{array}$$

$$L = \{6; -2\}$$

### Lehrbeispiel 11

Lösen Sie die Gleichung  $1/4x^2 + 1/2x - 2 = 0$ !

### Lösung

$$\begin{array}{rcll}
 1/4x^2 + 1/2x - 2 = 0 & & | : 1/4 & \\
 x^2 + 2x - 8 = 0 & & | + 8 & \\
 x^2 + 2x = 8 & & & \\
 x^2 + 2x + 1 = 9 & & & \\
 (x + 1)^2 = 9 & & | \sqrt{\phantom{x}} & \\
 x + 1 = \sqrt{9} & \vee & x + 1 = -\sqrt{9} & \\
 x_1 = -1 + 3 & & x_2 = -1 - 3 & \\
 x_1 = 2 & & x_2 = -4 & 
 \end{array}$$

$$L = \{2; -4\}$$

Da der Lösungsablauf immer nach einem bestimmten Schema durchgeführt wird, ist es möglich, eine **Lösungsformel** abzuleiten.

Gegeben: quadratische Gleichung in der Normalform  $x^2 + px + q = 0$ ;  $p, q \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl}
 x^2 + px + q & = & 0 \\
 x^2 + px & = & -q
 \end{array}
 \quad | -q$$

quadratische Ergänzung

$$x^2 + px + \underbrace{(p/2)^2}_{(p/2)^2} = -q + (p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = (p/2)^2 - q \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$x + p/2 = \sqrt{(p/2)^2 - q} \quad \vee \quad x + p/2 = -\sqrt{(p/2)^2 - q}$$

$$x_1 = -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

$$x_2 = -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

$$L = \{-p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q} ; -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}\}$$

### Lehrbeispiel 12

Bestimmen Sie die Lösungsmenge mithilfe der Lösungsformel!

$$x^2 + 1,4x = 4,8$$

### Lösung

Die Gleichung wird zunächst in die Normalform gebracht.

$$\begin{aligned} x^2 + 1,4x &= 4,8 & | - 4,8 \\ x^2 + 1,4x - 4,8 &= 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten p und q werden bestimmt:

$$p = +1,4 \quad q = -4,8$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q} & x_2 &= -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q} \\ x_1 &= -0,7 + \sqrt{0,49 + 4,8} & x_2 &= -0,7 - \sqrt{0,49 + 4,8} \\ x_1 &= -0,7 + 2,3 & x_2 &= -0,7 - 2,3 \\ x_1 &= 1,6 & x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$L = \{1,6; -3\}$$

Beim Lösen quadratischer Gleichungen mithilfe der Lösungsformel wird deutlich, dass dem Wurzelterm  $\sqrt{(p/2)^2 - q}$  eine entscheidende Bedeutung zukommt. Daher wird der Term

$(p/2)^2 - q$  **Diskriminante (D)** genannt.

Es sind drei Möglichkeiten denkbar:

(1)  $(p/2)^2 - q > 0$  :

Es existieren **zwei Lösungen**:  $x_1 = -p/2 + \sqrt{D}$  ;  $x_2 = -p/2 - \sqrt{D}$  ;  $L = \{x_1 ; x_2\}$

(2)  $(p/2)^2 - q = 0$  : Es existiert **eine Lösung**:  $x = -p/2$  ;  $L = \{-p/2\}$

(3)  $(p/2)^2 - q < 0$  : Es existiert **keine Lösung**, da aus einer negativen Zahl keine Wurzel gezogen werden kann.  $L = \{\}$

### Lehrbeispiel 13

Bestimmen Sie mithilfe der Diskriminanten die Anzahl der Lösungen! Geben Sie anschließend die Lösungsmenge an!  $x^2 - 7/4x - 1/2 = 0$

### Lösung

$$x^2 - 7/4x - 1/2 = 0 \quad p = -7/4 \quad q = -1/2$$

$$D = (p/2)^2 - q$$

$$D = (7/8)^2 + 1/2$$

$$D > 0 \quad \text{Es gibt zwei Lösungen.}$$

$$x_1 = -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

$$x_2 = -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

$$x_1 = 7/8 + \sqrt{49/64 + 32/64}$$

$$x_2 = 7/8 - \sqrt{49/64 + 32/64}$$

$$x_1 = 7/8 + 9/8$$

$$x_2 = 7/8 - 9/8$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1/4$$

$$L = \{2; -1/4\}$$

### Lehrbeispiel 14

Leiten Sie eine Lösungsformel her für eine quadratische Gleichung der Form  $ax^2 + bx + c = 0$ !

### Lösung

Zunächst muss die Normalform  $x^2 + px + q = 0$  hergestellt werden. Dieses wird dadurch erreicht, dass die ganze Gleichung durch den Faktor  $a$  dividiert wird.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a$$

$$x^2 + bx/a + c/a = 0$$

In der Normalform erscheinen die Koeffizienten  $p = b/a$  und  $q = c/a$ .

Nun wird in die Lösungsformel eingesetzt:

$$x_1 = -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

$$x_2 = -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

$$x_1 = -b/2a + \sqrt{(b/2a)^2 - c/a}$$

$$x_2 = -b/2a - \sqrt{(b/2a)^2 - c/a}$$

$$x_1 = -b/2a + \sqrt{b^2/4a^2 - c/a}$$

$$x_2 = -b/2a - \sqrt{b^2/4a^2 - c/a}$$

$$x_1 = -b/2a + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x_2 = -b/2a - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Lehrbeispiel 15*Lösen Sie die quadratische Gleichung, ohne in die Normalform umzuformen!*

$$5x^2 - 25x = -30$$

**Lösung**

$$\begin{array}{l} 5x^2 - 25x = -30 \quad | +30 \\ 5x^2 - 25x + 30 = 0 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{25 + \sqrt{625 - 4 \cdot 5 \cdot 30}}{2 \cdot 5}$$

$$x_1 = \frac{25 + \sqrt{25}}{10}$$

$$x_1 = \frac{25 + 5}{10} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{25 - \sqrt{625 - 4 \cdot 5 \cdot 30}}{2 \cdot 5}$$

$$x_2 = \frac{25 - \sqrt{25}}{10}$$

$$x_2 = \frac{25 - 5}{10} = 2$$

$$L = \{3; 2\}$$

Lehrbeispiel 16*Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Bruchgleichung!*

$$\frac{30}{x} - \frac{16}{x+1} = \frac{13}{x-2}$$

**Lösung**

$$\frac{30}{x} - \frac{16}{x+1} = \frac{13}{x-2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 2\}$$

$$| \cdot \text{HN: } x(x+1)(x-2)$$

$$\frac{30x \cdot (x+1) \cdot (x-2)}{x} - \frac{16x \cdot (x+1) \cdot (x-2)}{x+1} = \frac{13x \cdot (x+1) \cdot (x-2)}{x-2}$$

$$30 \cdot (x^2 - x - 2) - 16x^2 + 32x = 13x^2 + 13x$$

$$30x^2 - 30x - 60 - 16x^2 + 32x = 13x^2 + 13x$$

$$14x^2 + 2x - 60 = 13x^2 + 13x$$

$$x^2 - 11x - 60 = 0$$

$$p = -11$$

$$q = -60$$

$$x_1 = 11/2 + \sqrt{121/4 + 240/4}$$

$$x_1 = 11/2 + \sqrt{361/4}$$

$$x_1 = 11/2 + 19/2 = 15$$

$$x_2 = 11/2 - \sqrt{121/4 + 240/4}$$

$$x_2 = 11/2 - \sqrt{361/4}$$

$$x_2 = 11/2 - 19/2 = -4$$

$$L = \{15; -4\}$$

## Lehrbeispiel 17

**Geben Sie die Normalform der quadratischen Gleichung an!**

$$L = \{4; 2\}$$

## Lösung

Die Lösungsmenge L enthält die beiden Lösungen  $x_1 = 4$  und  $x_2 = 2$ . An diesen Stellen wird die Gleichung genau Null; d.h. diese beiden x-Werte machen jeweils einen Faktor zu Null.

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$(x - 4) \cdot (x - 2) = 0$$

Nun muss ausmultipliziert werden:

$$x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Wenn man nun die Koeffizienten  $p$  und  $q$  mit den Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  vergleicht, stellt man folgenden Zusammenhang fest:

$x_1 = 4$        $x_2 = 2$        $p = -6$        $q = 8$

[ ] [ + ] [ ] [ ] [ (-1) ] [ ]  
[ ] [ . ] [ ] [ ] [ ] [ ]

Nach dem **Satz von Vieta** gilt für die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  einer quadratischen Gleichung in der Normalform  $x^2 + px + q = 0$ :

$$\mathbf{p} = -(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \qquad \mathbf{q} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$$

### Lehrbeispiel 18

*Geben Sie die Normalform der quadratischen Gleichung an!*

$$L = \{-3; -2\}$$

## Lösung

$$L = \{-3; -2\} \quad x_1 = -3 \quad x_2 = -2$$

$$\begin{array}{ll} p = -(x_1 + x_2) & q = x_1 \cdot x_2 \\ = -[(-3) + (-2)] & = (-3) \cdot (-2) \\ p = 5 & q = 6 \end{array}$$

Normalform:  $x^2 + 5x + 6 = 0$

Lehrbeispiel 19*Geben Sie die Gleichung in der Normalform an!*

$$L = \{-3\}$$

*Führen Sie die Probe rechnerisch und zeichnerisch durch!***Lösung**

$$L = \{-3\} \quad x = -3$$

Da es nur einen x-Wert gibt, tritt dieser an die Stelle von  $x_1$  und  $x_2$ .

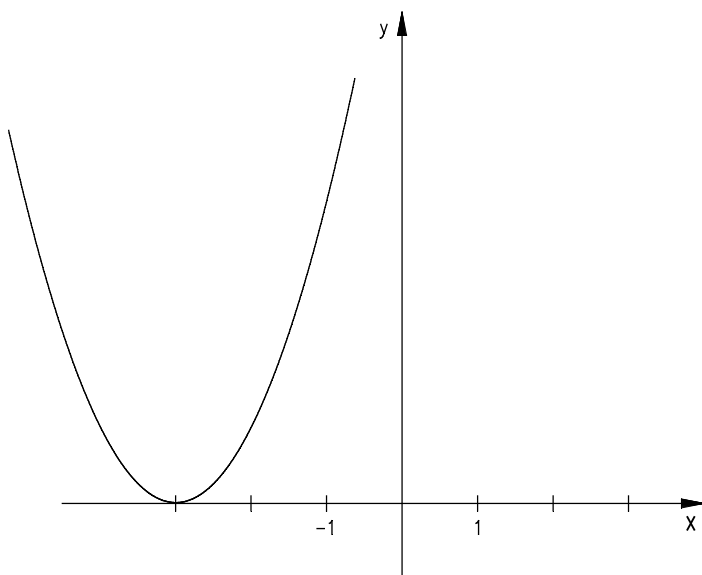
$$p = -[(-3) + (-3)] = 6 \quad q = (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$\text{Normalform: } x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_1 &= -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q} & x_2 &= -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q} \\ &= -3 + \sqrt{9 - 9} & &= -3 - \sqrt{9 - 9} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$L = \{-3\}$$

Aus der Normalform lässt sich das 1. Binom formen:  $(x + 3)^2 = 0$ . Bei der zugehörigen Parabel handelt es sich um eine um 3 Einheiten auf der x-Achse nach links verschobene Normalparabel.



### Lehrbeispiel 20

Leiten Sie mithilfe der Lösungsformel den Satz von Vieta her!

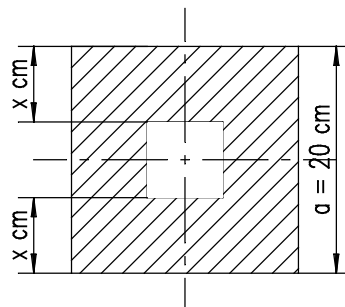
### Lösung

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q} & x_2 &= -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q} \\
 x_1 \cdot x_2 &= (-p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}) \cdot (-p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}) \\
 &= p^2/4 - [(p/2)^2 - q] \\
 &= p^2/4 - p^2/4 + q \\
 x_1 \cdot x_2 &= q \\
 -(x_1 + x_2) &= -[(-p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}) + (-p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q})] \\
 &= -[-p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q} - p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}] \\
 &= -[-p/2 - p/2] \\
 &= -[-2p/2] \\
 -(x_1 + x_2) &= p
 \end{aligned}$$

### Lehrbeispiel 21

In eine quadratische Blechplatte wird mittig eine quadratische Öffnung gestanzt (siehe Skizze).

Berechnen Sie die Randbreite  $x$  bei einer verbleibenden Restfläche  $A_R = 144 \text{ cm}^2$ ! Geben Sie eine sinnvolle Lösung an und begründen Sie diese!



### Lösung

Gesamtfläche der Platte	$A = a \cdot a = a^2$
Stanzfläche	$A_{St} = (a - 2x) \cdot (a - 2x) = a^2 - 4ax + 4x^2$
Restfläche	$A_R = A - A_{St}$ $= a^2 - (a^2 - 4ax + 4x^2)$ $= 4ax - 4x^2$
quadratische Gleichung	$4x^2 - 4ax + A_R = 0 \quad   : 4$
Normalform	$x^2 - ax + 1/4 A_R = 0$
Lösungsformel	$x_1 = a/2 + \sqrt{a^2/4 - 1/4 A_R}$ $x_2 = a/2 - \sqrt{a^2/4 - 1/4 A_R}$ $p = -a \quad q = 1/4 A_R$

$x_1$  ist als Lösung nicht sinnvoll, da  $x > a/2$  wird.

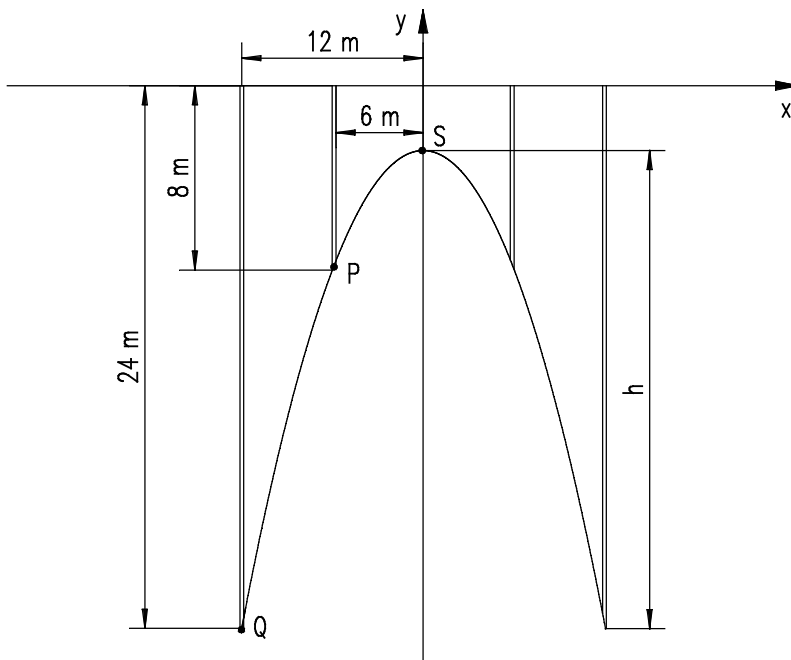
$$\begin{aligned} x_2 = x &= 20/2 - \sqrt{400/4 - 1/4 \cdot 144} \\ &= 10 - \sqrt{100 - 36} \\ &= 10 - 8 = 2 \end{aligned}$$

**Antwort:** Die Randbreite  $x$  beträgt 2 cm.

### Lehrbeispiel 22

Der Bogen einer Brücke hat die Form einer Parabel.

*Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung der quadratischen Funktion!  
Berechnen Sie anschließend die Höhe  $h$  des Parabelbogens!*



### **Lösung**

Aus der Zeichnung sind folgende Informationen zu entnehmen:

$$\begin{array}{lll} x = -6 & y = -8 & P(-6; -8) \\ x = -12 & y = -24 & Q(-12; -24) \end{array}$$

Da der Scheitelpunkt S der Parabel auf der y-Achse liegt, muss die Parabel folgender Funktionsgleichung genügen:

$$f(x) = ax^2 + s$$

Wenn die Punkt-Koordinaten von P und Q eingesetzt werden, ergibt sich ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

Für P(-6;-8)  $(I) -8 = a \cdot (-6)^2 + s$

Für Q(-12;-24)  $(II) -24 = a (-12)^2 + s$

$$-8 = 36a + s \quad | \cdot (-1)$$

$$\underline{-24 = 144a + s}$$

$$8 = -36a - s$$

$$\underline{-24 = 144a + s}$$

$$-16 = 108a$$

$$a = -4/27$$

eingesetzt in (I):  $-8 = 36 \cdot (-4/27) + s$

$$-2 \frac{2}{3} = s$$

**Antwort:** Die Funktionsgleichung  $f(x)$  lautet:  $f(x) = -4/27x^2 - 2 \frac{2}{3}$ .  
Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten: S(0;-2 2/3)

Die Höhe h des Brückenbogens errechnet sich:

$$h = 24 \text{ m} - 2 \frac{2}{3} \text{ m}$$

$$h = 21 \frac{1}{3} \text{ m}$$

**Antwort:** Der Brückenbogen hat eine Höhe von 21 1/3 m.

## 1.4 Schnittpunkte von Parabeln mit anderen Grafen

### Lehrbeispiel 1

*Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion  $f(x) = x^2 - 5x + 6,25$ ! Bestimmen Sie anhand des Grafen die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen! Überprüfen Sie durch eine Rechnung!*

### **Lösung**

$$f(x) = x^2 - 5x + 6,25$$

$$\text{Scheitelpunktform: } f(x) = x^2 - 5x + 2,5^2 - 2,5^2 + 6,25$$

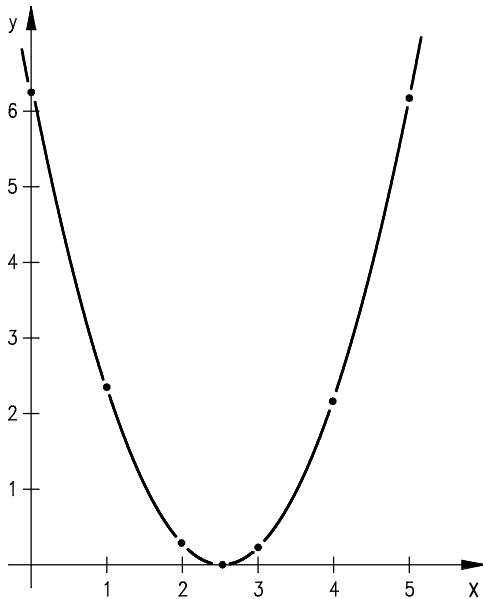
$$f(x) = (x - 2,5)^2$$

Scheitelpunkt: S(2,5;0)

Wertetabelle

x	0	1	2	2,5	3	4	5
f(x)	6,25	2,25	0,25	0	0,25	2,25	6,25

## Graf



## Schnittpunkte

- mit der x-Achse (Nullstellen)  $x = 2,5$   $y = 0$
- mit der y-Achse  $x = 0$   $y = 6,25$

## Überprüfung durch Rechnung

Die Bedingung für die Nullstellen lautet:  $f(x) = 0$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6,25$$

$$x^2 - 5x + 6,25 = 0$$

$$x_1 = 5/2 + \sqrt{(5/2)^2 - 6,25}$$

$$x_2 = 5/2 - \sqrt{(5/2)^2 - 6,25}$$

$$x_1 = 5/2 + \sqrt{0}$$

$$x_2 = 5/2 - \sqrt{0}$$

$$x = 5/2$$

Die Bedingung für den Schnittpunkt mit der y-Achse lautet:  $x = 0$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6,25$$

$$= 0 - 0 + 6,25$$

$$= 6,25$$

$$y = 6,25$$

**Antwort:** Die Rechnung bestätigt die abgelesenen Werte.

### Lehrbeispiel 2

Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen und den Schnittpunkt mit der y-Achse der gegebenen Funktion  $f(x) = -0,4x^2 + 2,4x - 2,6$ !

### **Lösung**

Nullstellen

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -0,4x^2 + 2,4x - 2,6 &= 0 \quad | : (-0,4) \\ x^2 - 6x + 6,5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \sqrt{9 - 6,5} & x_2 &= 3 - \sqrt{9 - 6,5} \\ x_1 &\approx 3 + 1,6 & x_2 &\approx 3 - 1,6 \\ x_1 &= 4,6 & x_2 &= 1,4 \end{aligned}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:  $x = 0$

$$f(x) = -2,6 \quad y = -2,6$$

### Lehrbeispiel 3

Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von  $f(x) = x^2 - x - 2$ ! Bestimmen Sie die Nullstellen, indem Sie die quadratische Gleichung lösen!

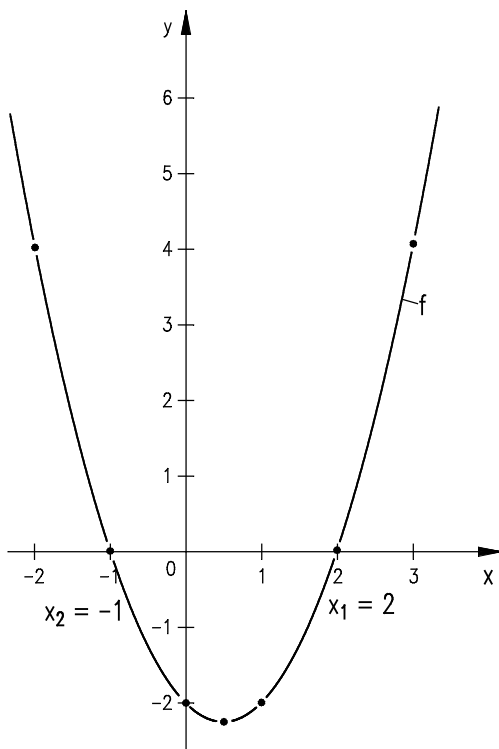
### **Lösung**

Scheitelpunktform

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x + (1/2)^2 - (1/2)^2 - 2 \\ &= (x - 1/2)^2 - 2,25 \\ &S(1/2; -2,25) \end{aligned}$$

x	-2	-1	0	1/2	1	2	3
f(x)	4	0	-2	-2,25	-2	0	4





Nullstellen abgelesen:  $x_1 = 2$       $x_2 = -1$

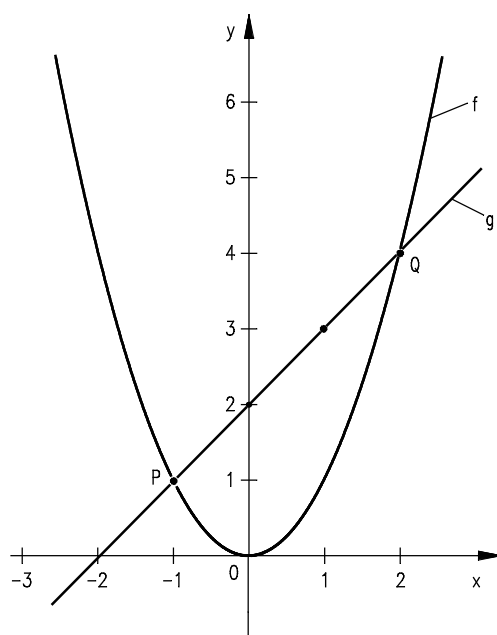
$$\begin{aligned} x_1 &= 1/2 + \sqrt{(1/2)^2 + 2} & x_2 &= 1/2 - \sqrt{(1/2)^2 + 2} \\ x_1 &= 1/2 + 1,5 & x_2 &= 1/2 - 1,5 \\ x_1 &= 2 & x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$L = \{2; -1\}$$

Die quadratische Gleichung  $x^2 - x - 2 = 0$  kann durch Umformen in einen quadratischen und einen linearen Term aufgespalten werden.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 & | +x + 2 \\ x^2 &= x + 2 \end{aligned}$$

Wenn man nun beide Gleichungsseiten jeweils gesondert betrachtet, hat man auf der linken Seite einen quadratischen Funktionsterm der Form  $f(x) = x^2$ , auf der rechten Seite einen linearen Funktionsterm der Form  $g(x) = x + 2$ . Beide Funktionen sollen in ein Koordinatensystem übertragen werden.



Beide Grafen schneiden sich in den Punkten  $P(-1;1)$  und  $Q(2;4)$ . Die x-Koordinaten der Schnittpunkte sind  $-1$  und  $2$ ; sie sind also identisch mit den Nullstellen der Parabel  $f(x) = x^2 - x - 2$  bzw. den Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 - x - 2 = 0$ .

Eine quadratische Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$  lässt sich grafisch lösen, indem die Schnittpunkte einer Normalparabel  $f(x) = x^2$  und der linearen Funktion  $g(x) = -px - q$  ermittelt werden.

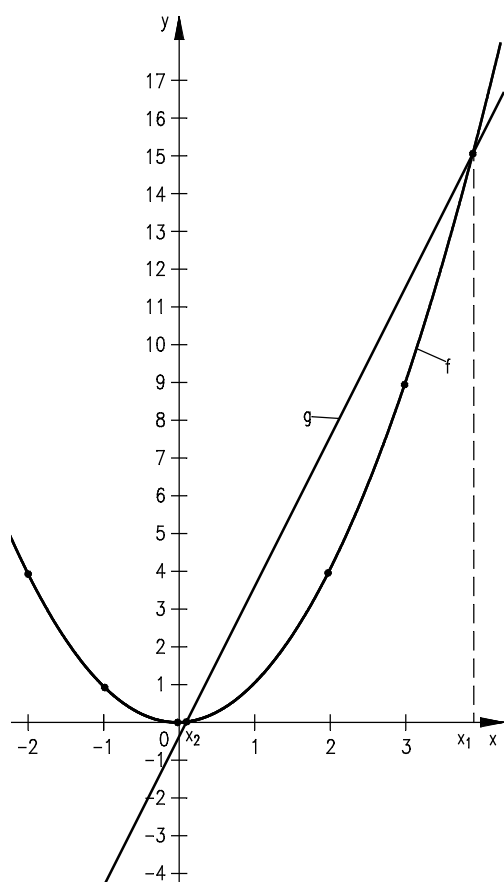
#### Lehrbeispiel 4

Lösen Sie die quadratische Gleichung  $x^2 - 4x + 0,4 = 0$  grafisch! Führen Sie eine Kontrollrechnung durch!

#### **Lösung**

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 0,4 &= 0 & | + 4x - 0,4 \\ x^2 &= 4x - 0,4 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = 4x - 0,4$$



Kontrollrechnung:  $x^2 - 4x + 0,4 = 0$

$$x_1 = 2 + \sqrt{4 - 0,4} \qquad x_2 = 2 - \sqrt{4 - 0,4}$$

$$x_1 \approx 2 + 1,9 \qquad x_2 \approx 2 - 1,9$$

$$x_1 = 3,9 \qquad x_2 = 0,1$$

$$L = \{3,9; 0,1\}$$

### Lehrbeispiel 5

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen von  $f(x) = x^2 - 3x - 10$  und  $g(x) = -2x - 5$ ! Kontrollieren Sie durch eine Zeichnung!

### Lösung

Die Schnittpunkte müssen die Bedingung erfüllen, dass die x-Koordinaten und die y-Koordinaten beider Funktionen gleich sind.

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 3x - 10 = -2x - 5$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind die gesuchten x-Koordinaten.

$$x^2 - 3x - 10 = -2x - 5 \quad | + 2x + 5$$

$$x^2 - x - 5 = 0$$

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 + 5}$$

$$x_1 \approx 1/2 + 2,3$$

$$= 2,8$$

$$x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 + 5}$$

$$x_2 \approx 1/2 - 2,3$$

$$= -1,8$$

Werden beide x-Werte in eine Funktionsgleichung eingesetzt, ergeben sich die y-Koordinaten.

$$\text{Für } x_1 = 2,8$$

$$g(x) = -2x - 5$$

$$= -2 \cdot 2,8 - 5$$

$$= -5,6 - 5$$

$$g(x) = -10,6$$

$$\text{Für } x_2 = -1,8$$

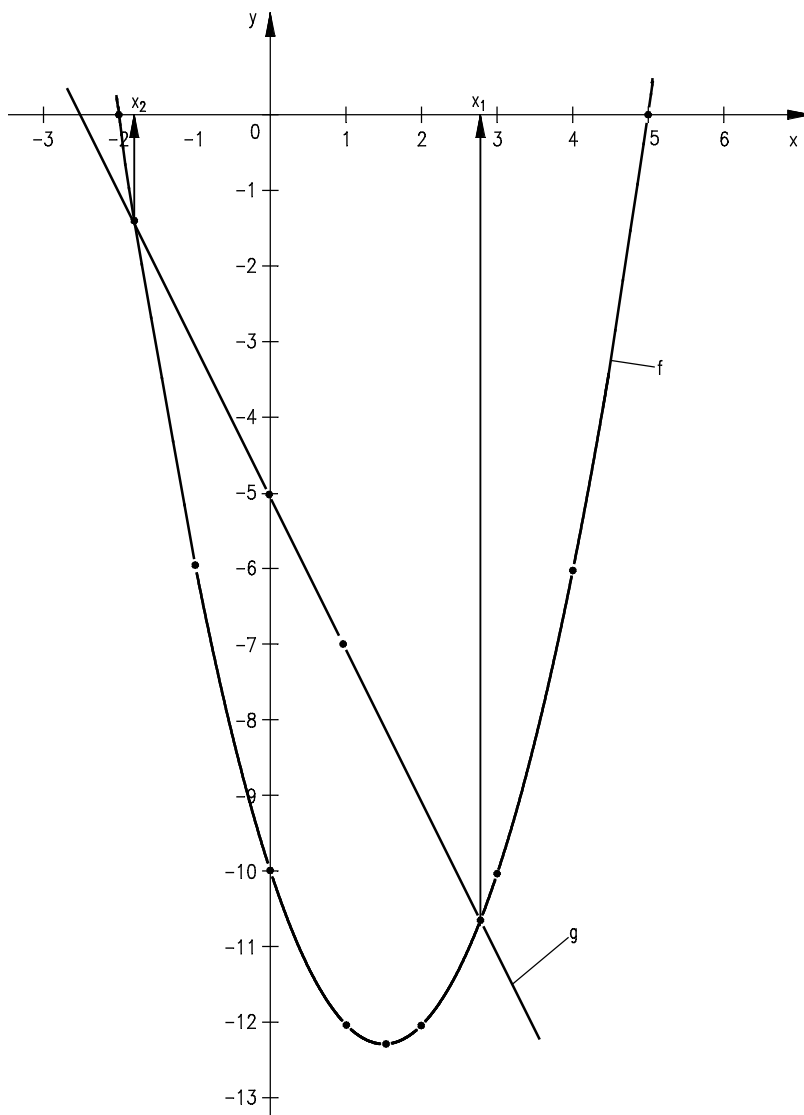
$$g(x) = -2 \cdot (-1,8) - 5$$

$$= 3,6 - 5$$

$$g(x) = -1,4$$

**Antwort:** Die beiden Schnittpunkte haben die Koordinaten (2,8; -10,6) und (-1,8; -1,4).

## Kontrollzeichnung

Lehrbeispiel 6

Berechnen Sie, in welchen Punkten sich die beiden Funktionsgrafen  $f(x) = 2x^2 - 20x + 48$  und  $g(x) = 4x - 32$  schneiden!

**Lösung**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 2x^2 - 20x + 48 &= 4x - 32 & | -4x + 32 \\
 2x^2 - 24x + 80 &= 0 & | : 2 \\
 x^2 - 12x + 40 &= 0
 \end{aligned}$$

$$x_1 = 6 + \sqrt{36 - 40} \qquad x_2 = 6 - \sqrt{36 - 40}$$

Da die Diskriminante  $< 0$  ist, gibt es keine Lösung; d.h. es gibt keinen Schnittpunkt beider Grafen.

### Lehrbeispiel 7

Bestimmen Sie zunächst grafisch die Schnittpunkte der beiden quadratischen Funktionsgraphen von  $f(x) = -x^2 - 3x + 0,75$  und  $g(x) = 2x^2 + 4x + 3$ ! Kontrollieren Sie anschließend durch eine Rechnung!

### Lösung

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 - 3x + 0,75 \\ &= -[x^2 + 3x + (3/2)^2 - (3/2)^2] + 0,75 \\ &= -[x^2 + 3x + 9/4] + 3 \\ f(x) &= -(x + 3/2)^2 + 3 \end{aligned}$$

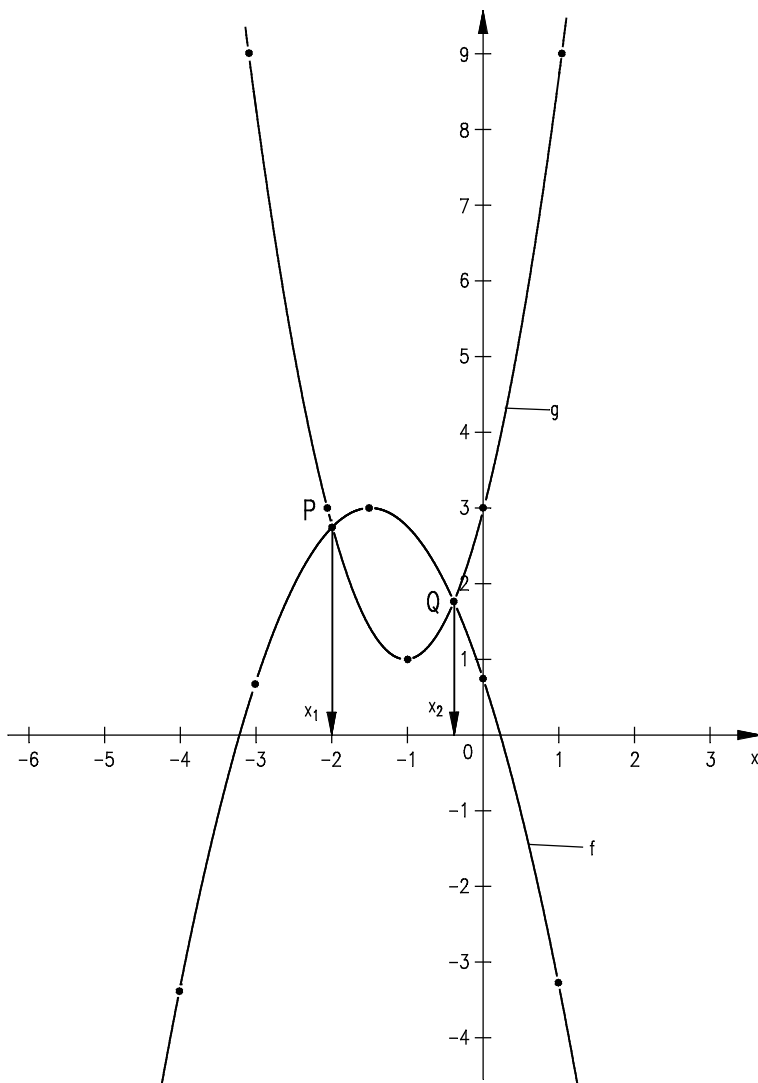
Scheitelpunkt  $S(-3/2; 3)$

x	-4	-3	-2	-3/2	-1	0	1
f(x)	-3,25	0,75	2,75	3	2,75	0,75	-3,25

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 + 4x + 3 \\ &= 2(x^2 + 2x) + 3 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3 \\ g(x) &= 2(x + 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

Scheitelpunkt  $S(-1; 1)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
g(x)	19	9	3	1	3	9	19



Auch hier gilt die Bedingung: In den Schnittpunkten P und Q müssen die Funktionswerte  $f(x)$  und  $g(x)$  gleich sein.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -x^2 - 3x + 0,75 &= 2x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung, die sich durch Umformung ergibt, sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte.

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 0,75 &= 2x^2 + 4x + 3 & | -2x^2 - 4x - 3 \\ -3x^2 - 7x - 2,25 &= 0 \end{aligned}$$

$$a = -3 \quad b = -7 \quad c = -2,25$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_1 &= \frac{7 + \sqrt{49 - 27}}{-6} & x_2 &= \frac{7 - \sqrt{49 - 27}}{-6} \\ x_1 &\approx \frac{7 + 4,7}{-6} = -1,95 & x_2 &\approx \frac{7 - 4,7}{-6} = -0,4 \end{aligned}$$

Beide x-Werte werden in eine der beiden Funktionsgleichungen eingesetzt:

Für  $x_1 = -1,95$

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 + 4x + 3 \\ &= 2 \cdot (-1,95)^2 + 4 \cdot (-1,95) + 3 \\ &\approx 2,8 \end{aligned}$$

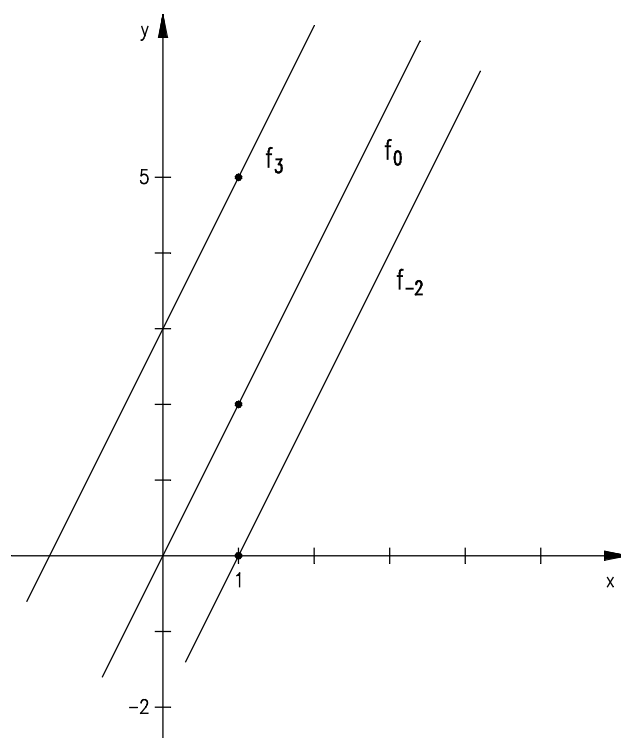
Für  $x_2 = -0,4$

$$\begin{aligned} g(x) &= 2 \cdot (-0,4)^2 + 4 \cdot (-0,4) + 3 \\ &\approx 1,7 \end{aligned}$$

**Antwort:** Die Schnittpunkte haben die Koordinaten  $P(-1,95;2,8)$  und  $Q(-0,4;1,7)$ .

Im nachfolgenden Koordinatensystem sind Geraden dargestellt, die eine **Geradenschar** bilden mit der Funktionsgleichung  $f_c(x) = 2x + c$ .

Diese Geradenschar deckt die gesamte Ebene ab, da alle Geraden mit gleich großem Steigungsfaktor  $m$  parallel verlaufen. Jeder Punkt  $P$  der Ebene liegt also auf einer Geraden der Geradenschar.





Lehrbeispiel 8

Bestimmen Sie die Gerade der Geradenschar mit  $f_c(x) = 2x + c$ , auf der der Punkt  $P(3;5)$  liegt!

**Lösung**

Die Koordinaten des Punktes P müssen der Funktionsgleichung  $f_c(x)$  genügen.

$$f_c(x) = 2x + c$$

$$5 = 2 \cdot 3 + c$$

$$-1 = c$$

**Antwort:** Der Punkt P liegt auf der Geraden  $f_c(x) = 2x - 1$  der gegebenen Geradenschar.

Lehrbeispiel 9

Bestimmen Sie die Geradengleichung aus der Geradenschar  $f_c(x) = -mx + c$ , die mit der Parabel  $g(x) = -2(x + 3)^2 + 2,5$  die Schnittpunkte  $P(-4;Y_p)$  und  $Q(X_q;-5,5)$  gemeinsam hat! Kontrollieren Sie durch eine Zeichnung!

**Lösung**

$$g(x) = -2(x + 3)^2 + 2,5$$

$$\text{Für P: } g(x) = -2(-4 + 3)^2 + 2,5$$

$$= -2 + 2,5$$

$$= 0,5$$

$$P(-4;0,5)$$

$$\text{Für Q: } -5,5 = -2(x + 3)^2 + 2,5$$

$$= -2x^2 - 12x - 18 + 2,5$$

$$0 = -2x^2 - 12x - 10$$

$$0 = x^2 + 6x + 5$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{9 - 5}$$

$$= -3 + 2$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -3 - \sqrt{9 - 5}$$

$$= -3 - 2$$

$$x_2 = -5$$

Beide x-Koordinaten müssen auf Plausibilität untersucht werden. Dabei ergibt sich, dass nur für  $x_1 = -1$  die Bedingung erfüllt wird, dass die Gerade einen negativen Steigungsfaktor hat.

$$Q(-1;-5,5)$$

Die Gerade  $f_c(x) = -mx + c$  schneidet die Parabel  $g(x)$  in den Punkten  $P(-4;0,5)$  und  $Q(-1;-5,5)$ .

Steigungsfaktor m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5,5 - 0,5}{-1 - (-4)} = \frac{-6}{3}$$

$$m = -2$$

$$f_c(x) = -2x + c$$

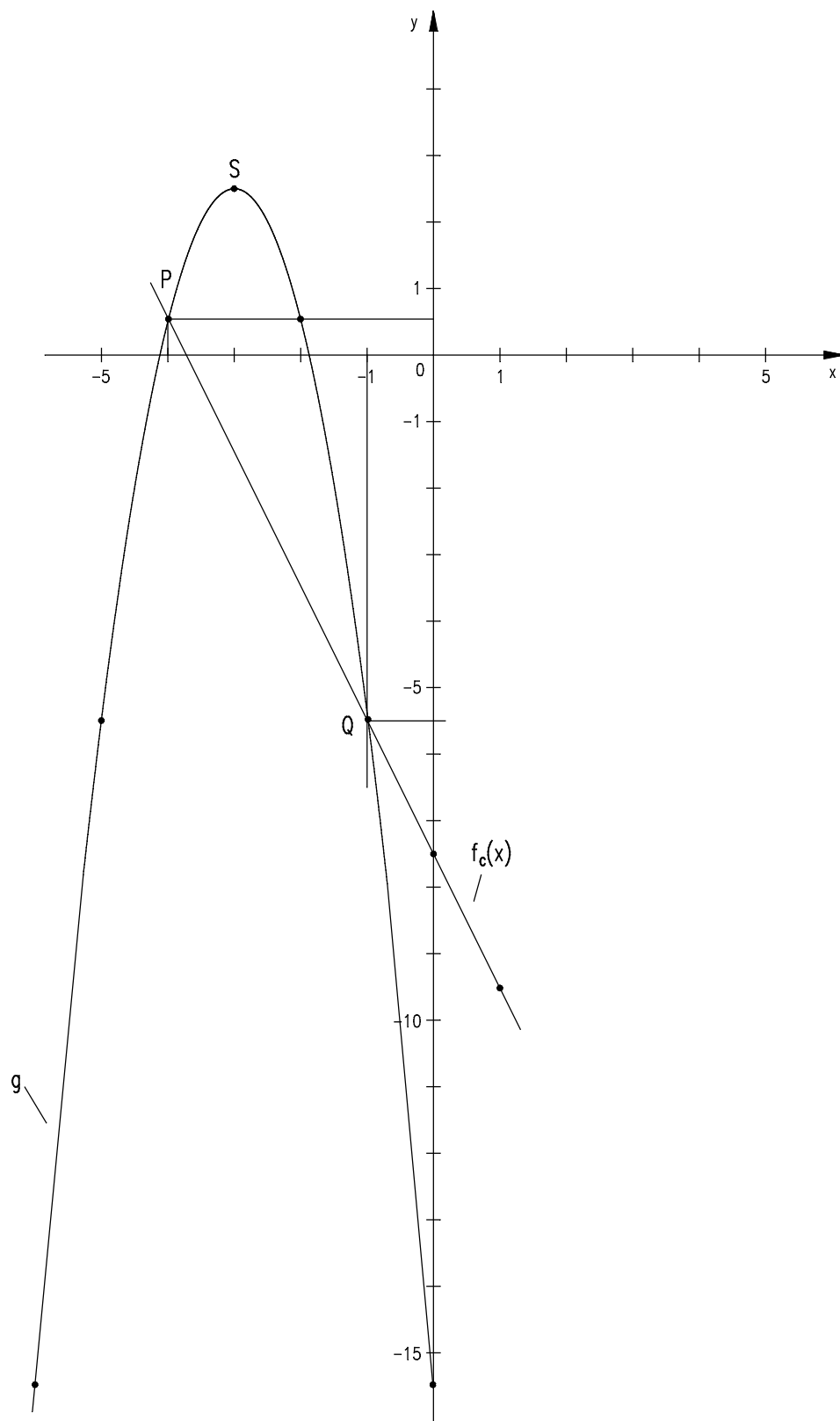
Beide Punkte müssen die Geradengleichung erfüllen.

$$\begin{aligned} \text{Für P: } 0,5 &= -2(-4) + c \\ -7,5 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für Q: } -5,5 &= -2(-1) + c \\ -7,5 &= c \end{aligned}$$

**Antwort:** Die Gerade  $f_c(x) = -2x - 7,5$  schneidet die Parabel in den gegebenen Punkten P und Q.

Kontrollzeichnung



**Aufgaben**
Aufgabe 1

Geben Sie zu den angegebenen Scheitelpunkten einer verschobenen Normalparabel jeweils die Funktionsgleichung an und bestimmen Sie die Nullstellen! Kontrollieren Sie durch eine Zeichnung!

1.1  $S(-3;4)$

1.2  $S(-1;-1)$

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, ob die Punkte P und Q auf dem Grafen von f liegen!

$$f(x) = (x - 30)^2 - 21 \qquad P(27;-12) \quad Q(30;-21)$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Stelle, an der die Funktion f den kleinsten Funktionswert annimmt!

3.1  $f(x) = x^2 + 0,5x + 1,5$

3.2  $f(x) = x^2 - 2,5x + 6,25$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils den Scheitelpunkt der Parabel!

4.1  $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

4.2  $f(x) = -1/2x^2 - x - 5/4$

Aufgabe 5

Zerlegen Sie die Zahl 12 so in eine Summe  $m + n$ , dass das Produkt  $m \cdot n$  seinen größten Wert annimmt!

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung!

6.1  $x^2 - 16/25 = 0$

6.2  $2,5x^2 - 12,5 = 0$

6.3  $1/3x^2 + 2/3x = 0$

6.4  $x^2 + 0,2x + 0,01 = 1,69$

6.5  $1/2x^2 + 4x = -8$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge mithilfe der p-q-Formel! Entscheiden Sie zunächst, wie viele Lösungen existieren!

7.1  $x^2 + 0,5x = 0,36$

7.2  $x^2 + 5x + 6,25 = 0$

7.3  $x^2 - 2,5x = -2$

Aufgabe 8

Lösen Sie die quadratische Gleichung, ohne sie in die Normalform umzuwandeln!

8.1  $0,4x^2 - 5x = -10$

8.2  $4(x + 3)(x - 2) = 7(x + 4)(x - 3)$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Bruchgleichung!

9.1  $\frac{x-5}{3} - \frac{x+8}{x} + \frac{8}{x} = 0$

9.2  $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{22-7x}{2-x} - \frac{6x-6}{3x^2-12} = 0$

Aufgabe 10

Geben Sie die zur Lösungsmenge gehörende Gleichung in der Normalform an!

10.1  $L = \{-2; 5\}$

10.2  $L = \{4\}$

Aufgabe 11

Eine 3 cm vom Mittelpunkt eines Kreises entfernte Sehne ist um 3 cm länger als der Kreisradius.

Berechnen Sie den Radius  $r$  und die Sehne  $s$ !

Aufgabe 12

Bestimmen Sie die Nullstellen und den Schnittpunkt mit der y-Achse der gegebenen Funktion!

$f(x) = 1/4x^2 + 1/2x - 2$

Aufgabe 13

Bestimmen Sie grafisch die Lösungsmenge!

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

Aufgabe 14

Bestimmen Sie die Schnittpunkte P und Q der beiden Funktionsgrafen!

$$f(x) = x^2 + 3x - 3 \quad g(x) = -2,5x + 2,5$$

Aufgabe 15

Bestimmen Sie die Schnittpunkte P und Q der beiden quadratischen Funktionsgrafen!

$$f(x) = -0,5x^2 - 4x - 6 \quad g(x) = 2x^2 + 12x + 14$$

Aufgabe 16

Bestimmen Sie die Geradengleichung aus der Geradenschar  $f_c(x) = mx + c$ , die mit der Parabel  $g(x)$  die Schnittpunkte P und Q gemeinsam hat!

$$g(x) = x^2 - 2x + 2 \quad P(0; y_P) \quad Q(5; y_Q)$$

**2 Wurzelfunktionen****Lernbereich**Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie für die angegebenen Funktionswerte der Funktion  $f(x) = x^2$  die zugehörigen  $x$ -Werte! Legen Sie eine Wertetabelle an!

$$y = 0 \quad (1; 16; 20; 30; 40)$$

**Lösung**

$$\begin{aligned} y &= 0 & y &= x^2 \\ & & 0 &= x^2 \\ x &= \sqrt{0} \vee x = -\sqrt{0} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 1 & y &= x^2 \\ & & 1 &= x^2 \\ x &= \sqrt{1} \vee x = -\sqrt{1} \\ x_1 &= 1 & x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} y = 16 & x_1 = 4 & x_2 = -4 \\ y = 20 & x_1 \approx 4,47 & x_2 \approx -4,47 \\ y = 30 & x_1 \approx 5,48 & x_2 \approx -5,48 \\ y = 40 & x_1 \approx 6,32 & x_2 \approx -6,32 \end{array}$$

y	0	1	16	20	30	40
$x_1$	0	1	4	4,47	5,48	6,32
$x_2$		-1	-4	-4,47	-5,48	-6,32

**Antwort:** Den  $y$ -Werten lassen sich jeweils zwei  $x$ -Werte zuordnen  
(Ausnahme:  $y = 0$ ).

Die beiden Pfeildiagramme stellen die Funktion  $f(x) = x^2$  und ihre Umkehrung dar.

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow x^2 & y \rightarrow \sqrt{y} \\ & y \rightarrow -\sqrt{y} \\ 1 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 1 \\ -1 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow -1 \\ 2 \rightarrow 4 & 16 \rightarrow 4 \\ -2 \rightarrow 4 & 16 \rightarrow -4 \\ 3 \rightarrow 9 & 20 \rightarrow 4,47 \\ -3 \rightarrow 9 & 20 \rightarrow -4,47 \end{array}$$

**Die Umkehrung der Funktion  $f(x) = x^2$  ist nicht eindeutig. Es handelt sich dabei also nicht um eine Funktion.**

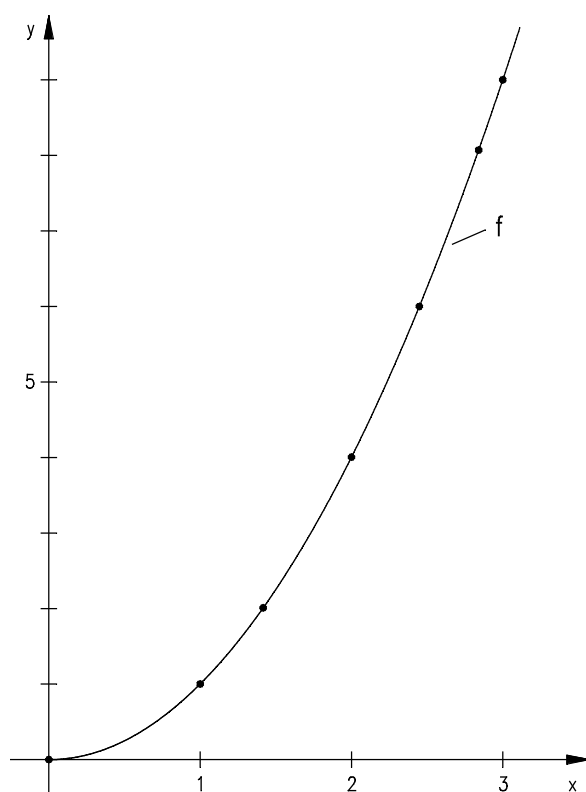
### Lehrbeispiel 2

Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktion  $f(x) = x^2$  für den Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}_+$ . Geben Sie die x-Werte für die Funktionswerte an!

$$y = 1 \ (2;4;6;8;9)$$

### Lösung

y	1	2	4	6	8	9
x	1	$\sqrt{2} \approx 1,41$	2	$\sqrt{6} \approx 2,45$	$\sqrt{8} \approx 2,83$	3



Die Umkehrung der quadratischen Funktion  $f(x) = x^2$  ist eindeutig für  $D = \mathbb{R}_+$ . Die Umkehrfunktion von  $f$  heißt Wurzelfunktion. Ihre Zuordnungsvorschrift lautet:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}; \quad D = \mathbb{R}_+ \quad \text{Die Wertemenge } W \text{ besteht aus allen positiven reellen Zahlen: } W = \mathbb{R}_+.$$

### Lehrbeispiel 3

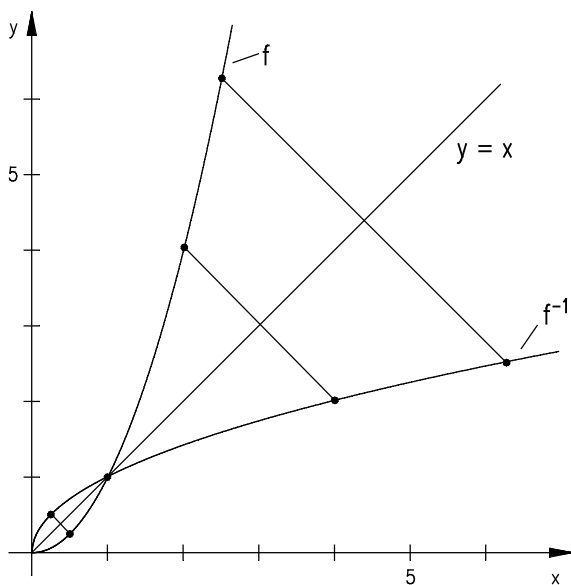
Zeigen Sie durch Umformung der Funktionsgleichung  $y = x^2$ , dass die zugehörige Umkehrfunktion  $y = \sqrt{x}$  lautet!



**Lösung**

Funktionsgleichung	$y = x^2$
Nach x aufgelöst	$x^2 = y$ $x = \sqrt{y}$
Vertauschen von x und y	$y = \sqrt{x}$

Im Koordinatensystem sind die Grafen der Funktionen  $f(x) = x^2$  und  $f(x)^{-1} = \sqrt{x}$  für  $D = \mathbb{R}_+$  abgebildet. Beide Grafen liegen symmetrisch zur Winkelhalbierenden des I. Quadranten.



Tritt in einer Gleichung die **Lösungsvariable im Radikanden einer Wurzel** auf, so spricht man von einer **Wurzelgleichung**.

**Lehrbeispiel 4**

*Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Wurzelgleichung! Geben Sie zunächst die Definitionsmenge an! Führen Sie die Probe durch!*

$$\sqrt{x+4} = 4$$

**Lösung**

$$\sqrt{x+4} = 4 \quad D = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -4\}$$

Das Beseitigen der Wurzel erreicht man dadurch, dass **beide Seiten der Gleichung quadriert** werden.

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+4})^2 &= 4^2 \\ x+4 &= 16 \quad | -4 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Probe durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned}\sqrt{12+4} &= 4 \\ \sqrt{16} &= 4 \\ 4 &= 4 \quad (W) \\ L &= \{12\}\end{aligned}$$

### Lehrbeispiel 5

*Lösen Sie die Wurzelgleichung!*

$$\sqrt{2x+1} = -7$$

### **Lösung**

$$D = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -\frac{1}{2}\}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1} &= -7 \\ (\sqrt{2x+1})^2 &= (-7)^2 \\ 2x+1 &= 49 \quad | -1 \\ 2x &= 48 \quad | :2 \\ x &= 24\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}\sqrt{2 \cdot 24 + 1} &= -7 \\ \sqrt{49} &= -7 \quad (f)\end{aligned}$$

In diesem Lehrbeispiel ist offensichtlich geworden, dass  **$x = 24$  keine Lösung der Ausgangsgleichung** ist. ( $\sqrt{a}$  ist die **nichtnegative Zahl**, deren Quadrat  $a$  ist.)

Dies zeigt, dass **beidseitiges Quadrieren einer Gleichung keine Äquivalenzumformung darstellt**.

Falls eine Zahl Lösung der Ausgangsgleichung ist, muss sie auch zwingend Lösung der quadratischen Gleichung sein. **Umgekehrt gilt dies nicht!** Darum ist **bei Wurzelgleichungen immer eine Probe** durch zu führen, indem die Lösung in die Ausgangsgleichung eingesetzt wird.

### Lehrbeispiel 6

*Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Wurzelgleichung!*

$$\sqrt{3x+1} + 1 = x$$

### **Lösung**

$$\sqrt{3x+1} + 1 = x \quad D = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -\frac{1}{3}\}$$

Bevor quadriert wird, muss zunächst der Wurzelterm auf einer Seite der Gleichung isoliert werden.

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (x-1)^2$$

$$3x+1 = x^2 - 2x + 1$$

Die quadratische Gleichung wird in die Normalform umgeformt.

$$x^2 - 2x + 1 = 3x + 1 \quad | -3x - 1$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 5 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \quad \quad x_2 = 5$$

$$0 \geq -1/3 \quad \quad 5 \geq -1/3$$

$$0 \in D \quad \quad 5 \in D$$

Probe

$$\sqrt{3 \cdot 0 + 1} + 1 = 0 \quad \quad \sqrt{3 \cdot 5 + 1} + 1 = 5$$

$$\sqrt{1} + 1 = 0 \quad \quad \sqrt{16} + 1 = 5$$

$$1 + 1 = 0 \quad (f) \quad \quad 4 + 1 = 5 \quad (w)$$

$$L = \{5\}$$

### Lehrbeispiel 7

*Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Wurzelgleichung!*

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 5$$

### **Lösung**

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 5 \quad D = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1 \wedge x \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 4\}$$

Die Gleichung muss so umgeformt werden, dass ein Wurzelterm auf einer Seite isoliert wird.

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 5 \quad | -\sqrt{x-4}$$

$$\sqrt{x+1} = 5 - \sqrt{x-4}$$

Im zweiten Lösungsschritt werden beide Seiten quadriert. Dabei ist darauf zu achten, dass auf der rechten Seite ein Binom entstanden ist.

$$(\sqrt{x+1})^2 = (5 - \sqrt{x-4})^2$$

$$x + 1 = 25 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{x-4} + x - 4$$

$$x + 1 = 25 - 10\sqrt{x-4} + x - 4$$

Im folgenden Lösungsschritt wird wiederum der Wurzelterm auf einer Seite isoliert; anschließend werden beide Seiten erneut quadriert.

$$-20 = -10\sqrt{x-4} \quad | :(-10)$$

$$2 = (\sqrt{x-4})^2$$

$$4 = x - 4 \quad | +4$$

$$x = 8$$

$$8 \geq 4$$

$$8 \in D$$

Probe:

$$\sqrt{8+1} + \sqrt{8-4} = 5$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$$

$$3 + 2 = 5 \quad (w)$$

$$L = \{8\}$$

### Lehrbeispiel 8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Wurzelgleichung!

$$\sqrt{2x+20} + \sqrt{x+3} = \sqrt{29+2x}$$

### Lösung

$$\sqrt{2x+20} + \sqrt{x+3} = \sqrt{29+2x} \quad | (\dots)^2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -10 \wedge x \geq -3 \wedge x \geq -14,5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$$

$$(\sqrt{2x+20} + \sqrt{x+3})^2 = (\sqrt{29+2x})^2$$

$$(2x+20) + 2\sqrt{2x+20}\sqrt{x+3} + (x+3) = 29+2x \quad | -3x-23$$

$$(2\sqrt{2x+20}\sqrt{x+3})^2 = (6-x)^2$$

$$4(2x+20)(x+3) = 36 - 12x + x^2$$

$$4(2x^2 + 26x + 60) = 36 - 12x + x^2$$

$$8x^2 + 104x + 240 = 36 - 12x + x^2 \quad | -(36 - 12x + x^2)$$

$$7x^2 + 116x + 204 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-116 + \sqrt{13456 - 5712}}{14}$$

$$= \frac{-116 + 88}{14}$$

$$x_1 = -2$$

$$-2 \geq -3 \quad -2 \in D$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-116 - \sqrt{13456 - 5712}}{14}$$

$$= \frac{-116 - 88}{14}$$

$$x_2 = \frac{-204}{14}$$

$$\frac{-204}{14} < -3 \quad \frac{-204}{14} \notin D$$

Probe:

$$\begin{aligned}\sqrt{2 \cdot (-2) + 20} + \sqrt{-2 + 3} &= \sqrt{29 + 2 \cdot (-2)} \\ \sqrt{16} + \sqrt{1} &= \sqrt{25} \\ 4 + 1 &= 5 \quad (\text{w}) \\ L &= \{-2\}\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 9*Lösen Sie das Gleichungssystem!*

$$\begin{aligned}\text{(I)} \quad x + 2y &= 17 \\ \text{(II)} \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 1\end{aligned}$$

**Lösung**

$$\begin{aligned}\text{(I)} \quad x + 2y &= 17 \\ \text{(II)} \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 1 \quad D = \{x \in \mathbb{R}; x, y \geq 0\}\end{aligned}$$

Mithilfe des Einsetzungsverfahrens wird Gleichung (II) auf eine Wurzelgleichung mit einer Unbekannten reduziert.

$$\text{Aus Gleichung (I):} \quad x = 17 - 2y$$

$$\begin{aligned}\text{Eingesetzt in Gleichung (II):} \quad \sqrt{17 - 2y} - \sqrt{y} &= 1 && | +\sqrt{y} \\ (\sqrt{17 - 2y})^2 &= (1 + \sqrt{y})^2 \\ 17 - 2y &= 1 + 2\sqrt{y} + y && | -1 - y \\ (16 - 3y)^2 &= (2\sqrt{y})^2 \\ 256 - 96y + 9y^2 &= 4y \\ 9y^2 - 100y + 256 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{100 + \sqrt{10000 - 9216}}{18} & y_2 &= \frac{100 - \sqrt{10000 - 9216}}{18} \\ &= \frac{100 + 28}{18} & &= \frac{100 - 28}{18} \\ y_1 &= 7 \frac{1}{9} & y_2 &= 4 \\ x_1 &= 2 \frac{7}{9} & x_2 &= 9\end{aligned}$$

Probe:

für  $x_1; y_1$ :

$$(I) \quad 2\frac{7}{9} + 2 \cdot 7\frac{1}{9} = 17$$

$$2\frac{7}{9} + 14\frac{2}{9} = 17 \quad (w)$$

$$(II) \quad \sqrt{2\frac{7}{9}} - \sqrt{7\frac{1}{9}} = 1 \quad (f)$$

für  $x_2; y_2$ :

$$(I) \quad 9 + 2 \cdot 4 = 17$$

$$9 + 8 = 17 \quad (w)$$

$$(II) \quad \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$$

$$3 - 2 = 1 \quad (w)$$

$$L = \{9; 4\}$$

### Lehrbeispiel 10

*Lösen Sie die Wurzelgleichung!*

$$\sqrt{5x - 63} = \frac{24}{\sqrt{x + 5}} - \sqrt{x + 5}$$

### **Lösung**

$$\sqrt{5x - 63} = \frac{24}{\sqrt{x + 5}} - \sqrt{x + 5} \quad D = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 12,6\}$$

Im ersten Lösungsschritt wird die Gleichung auf den Hauptnenner gebracht.

$$\begin{aligned} \sqrt{5x - 63} \sqrt{x + 5} &= 24 - \sqrt{x + 5} \sqrt{x + 5} \\ &= 24 - (x + 5) \\ &= 19 - x \end{aligned}$$

$$(\sqrt{5x - 63} \sqrt{x + 5})^2 = (19 - x)^2$$

$$(5x - 63)(x + 5) = 361 - 38x + x^2$$

$$5x^2 - 38x - 315 = 361 - 38x + x^2$$

$$4x^2 = 676 \quad |:4$$

$$x^2 = 169$$

$$x_1 = 13$$

$$x_2 = -13$$

Probe:

$$\sqrt{65-63} = \frac{24}{\sqrt{13+5}} - \sqrt{13+5}$$

$$\sqrt{2} = \frac{24}{\sqrt{18}} - \sqrt{18}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{18} = 24 - \sqrt{18}\sqrt{18}$$

$$\sqrt{36} = 24 - 18$$

$$6 = 6 \quad (w)$$

$$L = \{13\}$$

Wie am Beispiel der Funktion  $f(x) = x^2$  und ihrer Umkehrfunktion  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  gezeigt wurde, hat nicht jede Funktion eine Umkehrfunktion. Dies ist nur dann der Fall, wenn für  $x_1 \neq x_2$  stets auch  $f(x_1) \neq f(x_2)$  bzw. wenn  $f(x_1) = f(x_2)$  nur für  $x_1 = x_2$  gilt.

### Lehrbeispiel 11

Untersuchen Sie, ob  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  mit  $D = x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  eine Umkehrfunktion besitzt.

Geben Sie, falls diese vorhanden, die Funktion  $f^{-1}$  an! Zeichnen Sie die Grafen in ein Koordinatensystem und untersuchen Sie diese!

### **Lösung**

Die Existenz einer Umkehrfunktion wird mithilfe der Gleichung  $f(x_1) = f(x_2)$  nachgewiesen.

$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2}$$

$$x_1(1+x_2) = x_2(1+x_1)$$

$$x_1 + x_1 x_2 = x_2 + x_1 x_2 \quad | -x_1 x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Das Ergebnis bedeutet, dass die Funktion  $f(x)$  eine Umkehrfunktion  $f^{-1}(x)$  besitzt.

Im zweiten Schritt wird durch Umformen der Funktionsgleichung die Umkehrfunktion bestimmt.

$$y = \frac{x}{1+x}$$

$$D = x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

nach  $x$  auflösen

$$y(1+x) = x$$

$$y + xy = x$$

$$y = x - xy$$

$$= x(1-y)$$

$$x = \frac{y}{1-y}$$

Vertauschen der Variablen  $y = \frac{x}{1-x}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

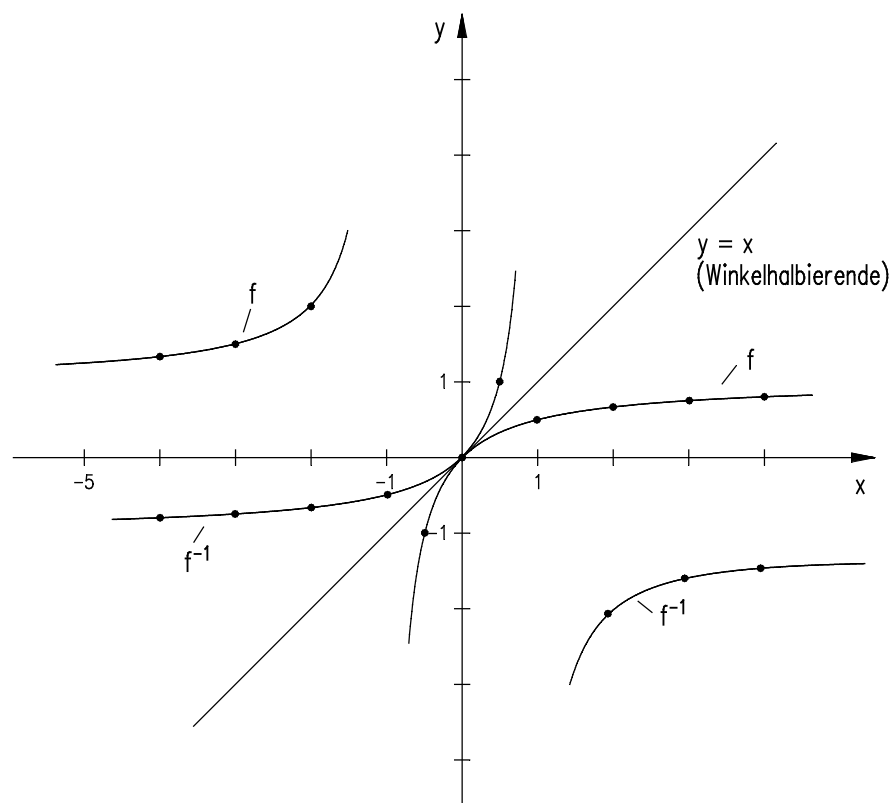
$$D = x \in \mathbb{R} \setminus \{+1\}$$

Wertetabelle für  $f(x)$

x	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
f(x)	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

Wertetabelle für  $f^{-1}(x)$

x	-4	-3	-2	0	0,5	2	3	4
$f^{-1}(x)$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$



Die Grafen von  $f(x)$  und  $f^{-1}(x)$  verlaufen symmetrisch zur Winkelhalbierenden des I. Quadranten.

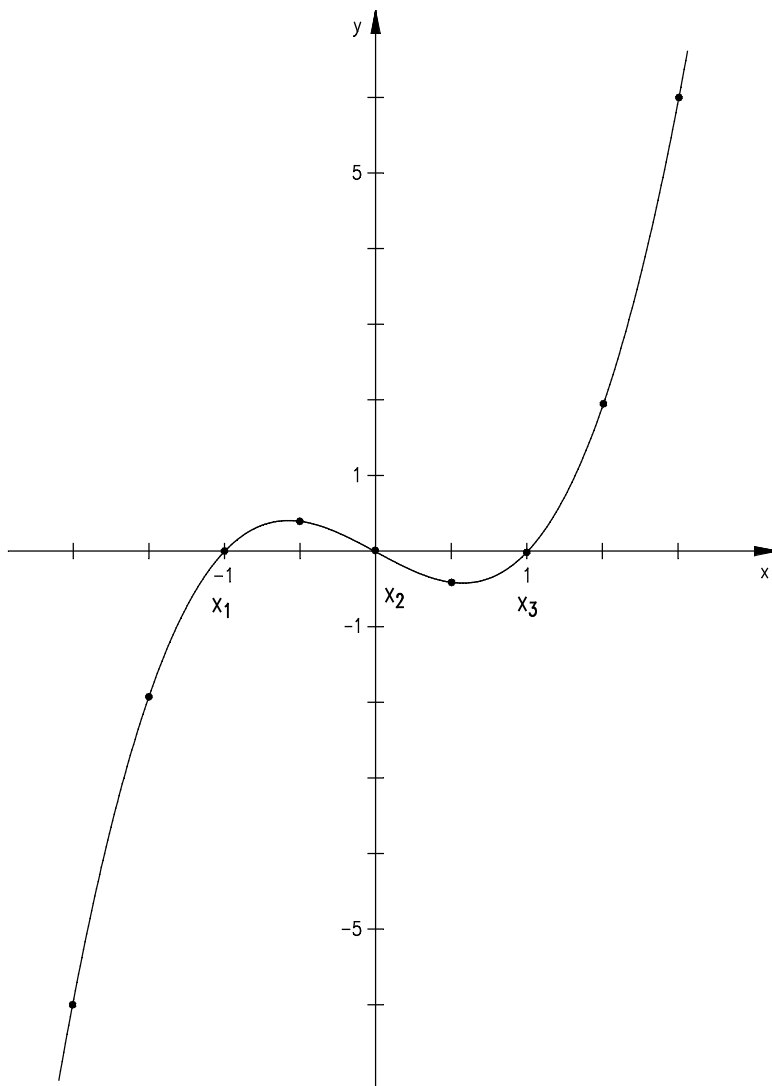


Lehrbeispiel 12

Untersuchen Sie, ob die Funktion  $f(x) = x^3 - x$  eine Umkehrfunktion besitzt! Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphens!

**Lösung**

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-24	-13,125	-6	-1,875	0	0,375	0	-0,375	0	1,875	6



Für  $x_1, x_2, x_3$  gilt:  $x_1 \neq x_2 \neq x_3$        $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

**Antwort:** Die Funktion  $f(x) = x^3 - x$  hat keine Umkehrfunktion, da die Bedingung  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$  nicht erfüllt ist.

**Aufgaben**
Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion  $f^{-1}$ !

1.1  $f(x) = 2\sqrt{x}$

1.2  $f(x) = -\sqrt[4]{x}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Wurzelgleichung! Geben Sie zunächst die Definitionsmenge an und führen Sie die Probe durch!

2.1  $\sqrt{13 - 4x} + x = 2$

2.2  $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = 4$

2.3  $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+8}$

2.4  $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-6} = -\sqrt{x-14}$

2.5  $\frac{4\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} - \frac{4(5-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - 15 = 0$

2.6  $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge! Lösungsvariable ist  $x$ !

3.1  $\sqrt{a+x} - \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b}$

3.2  $\sqrt{(a+b)x} = \sqrt{a^2 - b^2}$

Aufgabe 4

Lösen Sie das Gleichungssystem!

(I)  $4\sqrt{x} - 12 = 3\sqrt{y} - 7$

(II)  $3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 5\sqrt{y} + 11$

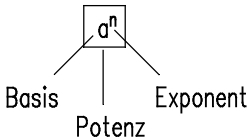
### 3 Potenzfunktionen

#### Lernbereich

#### 3.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

Ein Produkt aus gleichen Faktoren kann verkürzt als **Potenz** geschrieben werden.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$



Basis  
Potenz  
Exponent

$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

Es wird vereinbart:  $a^1 = a$ .

##### Lehrbeispiel 1

*Geben Sie als Potenz an!*

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}; \quad x \cdot x \cdot x \cdot x$$

##### **Lösung**

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$$

##### Lehrbeispiel 2

*Schreiben Sie die Potenz als Produkt und berechnen Sie den Wert der Potenz!*

$$(-5)^4; (-3)^5$$

##### **Lösung**

$$(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = +625$$

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$$

Bei **negativer Basis** und **geradem Exponenten** ist der **Wert der Potenz positiv**.  
 Bei **negativer Basis** und **ungeradem Exponenten** ist der **Wert der Potenz negativ**.

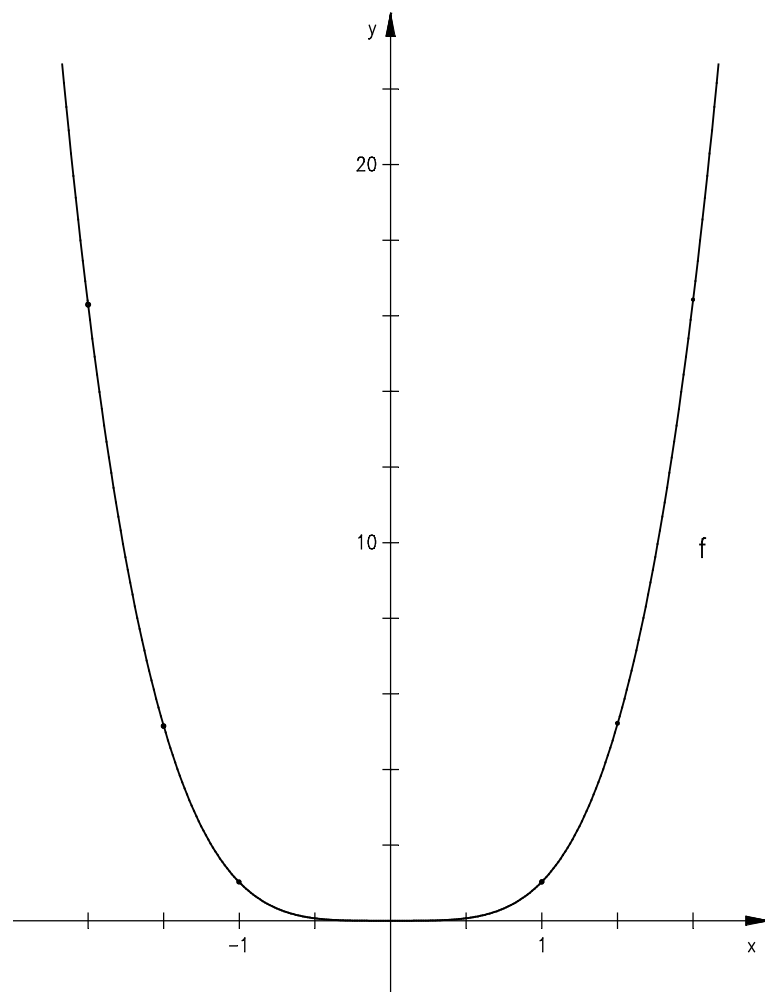
Der Kantenlänge  $a$  eines Würfels wird sein Volumen  $V$  zugeordnet:  $a \rightarrow V$ . Die entsprechende Funktion hat die Zuordnungsvorschrift  $f: a \rightarrow a^3$ , die Funktionsgleichung lautet  $f(a) = a^3$ .

### Lehrbeispiel 3

Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktion  $f(x) = x^4$ ! Legen Sie zunächst eine Wertetabelle an für  $x$ -Werte von  $-2,5$  bis  $2,5$  (Schrittweite  $0,5$ )!

### Lösung

x	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
f(x)	39,0625	16,0	5,0625	1,0	0,0625	0	0,0625	1,0	5,0625	16,0	39,0625



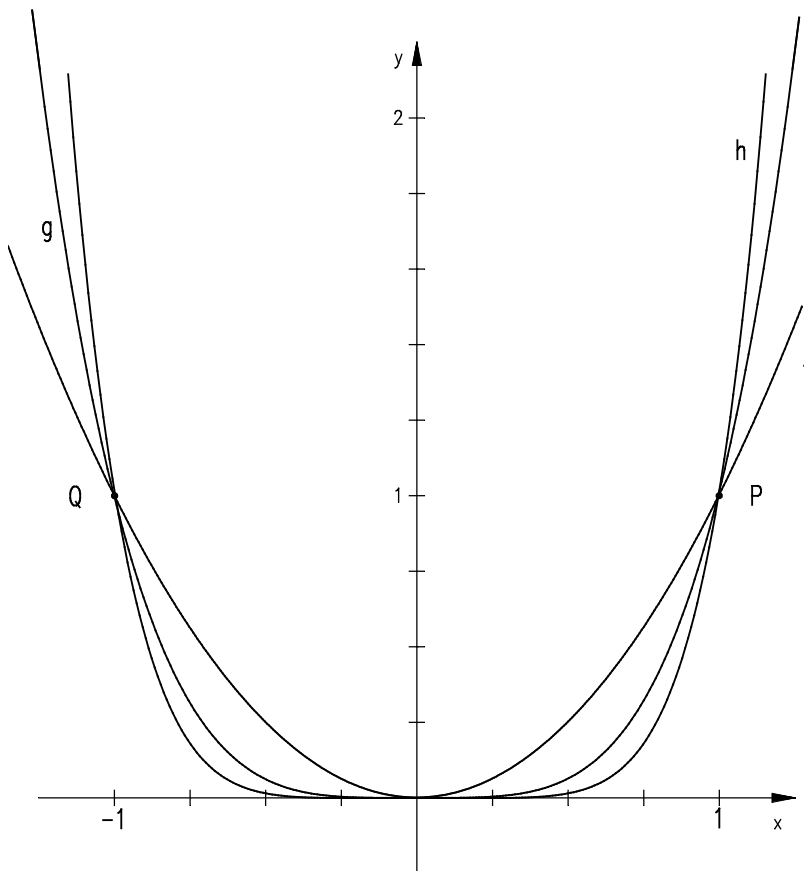
Eine Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  heißt **Potenzfunktion**.

Die Definitionsmenge ist - wenn nicht anders vorgegeben - die Menge der reellen Zahlen:

$$D = \mathbb{R}$$

Im Koordinatensystem sind die Grafen der Potenzfunktionen

$$f(x) = x^2, g(x) = x^4, h(x) = x^6 \text{ dargestellt.}$$



Aus den Funktionsgraphen der Potenzfunktionen mit geradem Exponenten lassen sich folgende Eigenschaften von Potenzfunktionen mit der Funktionsgleichung  $y = x^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $D = \mathbb{R}$  ablesen:

- Die Funktionsgraphen verlaufen durch die Punkte **P(1;1)** und **Q(-1;1)**.
- Der **Scheitelpunkt** aller Grafen hat die Koordinaten **S(0;0)**.
- Die Funktionsgraphen **fallen links vom Scheitelpunkt und steigen rechts vom Scheitelpunkt**.
- Die **y-Achse ist Symmetrieachse**.
- Die Potenzfunktion mit  $y = x^{2n}$  hat keine negativen Funktionswerte; die Wertemenge ist  $W = \mathbb{R}_+$ .

#### Lehrbeispiel 4

$P(-3; \quad)$  und  $Q(1,5; \quad)$  sind Punkte des Grafen der Potenzfunktion  $f(x) = x^6$ .

*Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate von P und Q und geben Sie die Koordinaten des Bildpunktes an!*

### Lösung

$$P(-3; )$$

$$f(x) = x^6 = (-3)^6 = 729$$

$$P(-3;729)$$

$$P'(-3;729)$$

$$Q(1,5; )$$

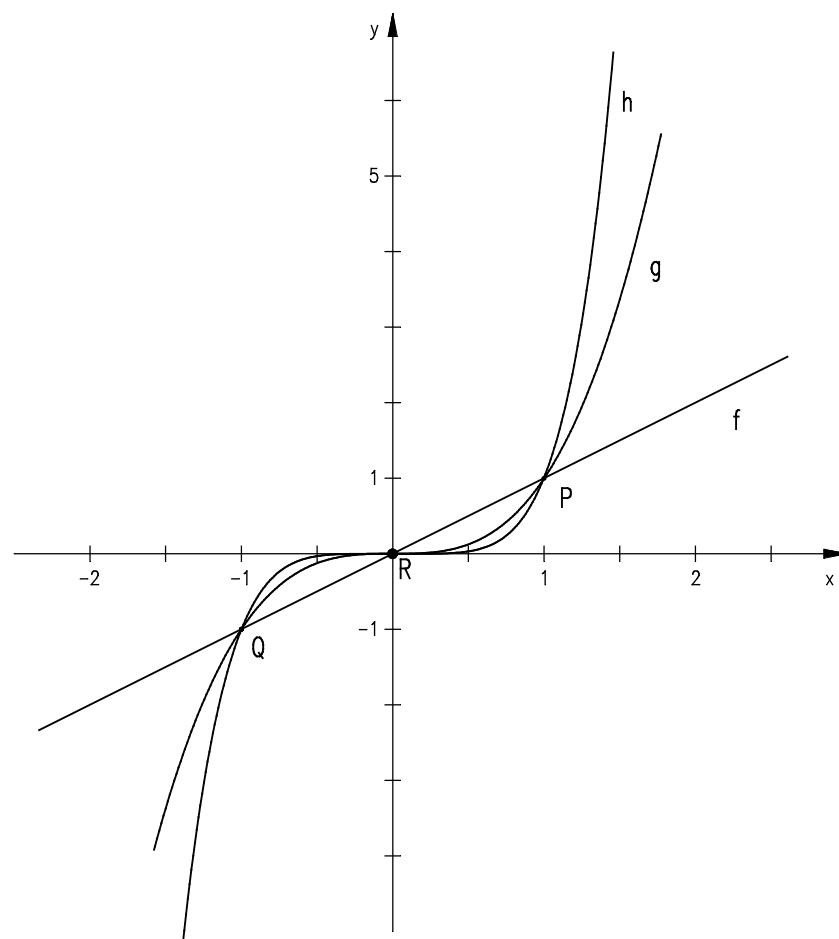
$$f(x) = x^6 = 1,5^6 = 11,390625$$

$$Q(1,5;11,390625)$$

$$Q'(-1,5;11,390625)$$

Im Koordinatensystem sind die Grafen der Potenzfunktionen

$f(x) = x$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $h(x) = x^5$  dargestellt.



Aus den Funktionsgraphen der Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten lassen sich folgende Eigenschaften von Potenzfunktionen mit der Funktionsgleichung  $y = x^{2n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $D = \mathbb{R}$  ablesen:

- Die Funktionsgraphen verlaufen durch die Punkte **P(1;1)**, **Q(-1;-1)** und **R(0;0)**
- Die Grafen **steigen im gesamten Bereich**
- Der Punkt **R(0;0)** ist **Symmetriepunkt**
- Die **Wertemenge** ist die Menge der reellen Zahlen: **W =  $\mathbb{R}$**

Lehrbeispiel 5

$P(2; )$  und  $Q(-3; )$  sind Punkte des Grafen der Potenzfunktion  $f(x) = x^5$ .

*Bestimmen Sie jeweils die fehlenden Koordinaten von P und Q und geben Sie die Koordinaten des jeweiligen Bildpunktes an!*

**Lösung**

$P(2; )$

$Q(-3; )$

$$f(x) = x^5 = 2^5 = 32$$

$$f(x) = x^5 = (-3)^5 = -243$$

$P(2;32)$

$Q(-3;-243)$

$P'(-2;-32)$

$Q'(3;243)$

**3.2 Potenzfunktionen mit ganzzahligen und rationalen Exponenten**Lehrbeispiel 1

*Berechnen Sie jeweils den Wert der Terme!*

$$5 \cdot 3^4; \quad 125 : 5^2$$

**Lösung**

$$5 \cdot 3^4 = 5 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 5 \cdot 81 = 405$$

$$125 : 5^2 = 125 : (5 \cdot 5) = 125 : 25 = 5$$

**Potenzrechnung geht vor Punktrechnung.**

Lehrbeispiel 2

*Vereinfachen Sie den Term!*

$$3x^3 + 7x^3; \quad 8a^2 + 12a^2 - 4a^2; \quad 5y^4 - 2y^3 + 7y^4 - 3y^3$$

**Lösung**

$$3x^3 + 7x^3 = (3 + 7) x^3 = 10x^3$$

$$8a^2 + 12a^2 - 4a^2 = 16a^2$$

$$5y^4 - 2y^3 + 7y^4 - 3y^3 = 5y^4 + 7y^4 - 2y^3 - 3y^3 = 12y^4 - 5y^3$$

**Potenzen mit gleichen Basen und gleichen Exponenten können in Summen und Differenzen zusammen gefasst werden.**

### Lehrbeispiel 3

Vereinfachen Sie, indem Sie den Term als Potenz angeben!

$$a^3 \cdot a^4$$

### **Lösung**

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{3+4} = a^7$$

**Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem ihre Exponenten addiert werden. Die Basis wird beibehalten.**

**Für alle  $a \in \mathbb{R}$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$**

### Lehrbeispiel 4

Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich!

$$3x^5 \cdot 6x^2; \quad -5a^2y \cdot 2ay^2; \quad s^2(2s - 3t^2); \quad x^2y^3(x^3y^2 - 1)$$

### **Lösung**

$$3x^5 \cdot 6x^2 = 3 \cdot 6 \cdot x^5 \cdot x^2 = 18 x^{5+2} = 18x^7$$

$$-5a^2y \cdot 2ay^2 = -5 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a \cdot y \cdot y^2 = -10a^3y^3$$

$$s^2(2s - 3t^2) = 2s^3 - 3s^2t^2$$

$$x^2y^3(x^3y^2 - 1) = x^5y^5 - x^2y^3$$

### Lehrbeispiel 5

Vereinfachen Sie, indem Sie den Term als Potenz angeben!

$$b^5 : b^3$$

### **Lösung**

$$b^5 : b^3 = \frac{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b}{b \cdot b \cdot b} = b^{5-3} = b^2$$

**Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem ihre Exponenten subtrahiert werden. Die Basis wird beibehalten.**

**Für alle  $a \in \mathbb{R}^*$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt:  $a^m : a^n = a^{m-n}$**



Lehrbeispiel 6*Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich!*

$$4a^6 : 2a^3; \quad \frac{35x^6 \cdot 72y^5 \cdot 6y}{15y^3 \cdot 12x^5}$$

**Lösung**

$$4a^6 : 2a^3 = 2 a^{6-3} = 2a^3$$

$$\frac{35x^6 \cdot 72y^5 \cdot 6y}{15y^3 \cdot 12x^5} = \frac{35 \cdot 72 \cdot 6 \cdot x^{6-5} \cdot y^{5+1-3}}{15 \cdot 12} = 84xy^3$$

Lehrbeispiel 7*Vereinfachen Sie den Term!*

$$a^5 : a^5$$

**Lösung**

$$a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$$

Bei dieser - durchaus richtigen - Lösung ist man nicht stehen geblieben. Eine andere Darstellung soll dies deutlich machen:

$$a^5 : a^5 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = 1$$

**Wenn Zähler und Nenner eines Bruches gleich sind, bezeichnet der Bruch die Zahl 1.**

**Also wird vereinbart für alle  $a \in \mathbb{R}^*$ :  $a^0 = 1$**

Lehrbeispiel 8*Vereinfachen Sie!*

$$\frac{121a^5b^6}{11a^4b^6} \cdot \frac{32cd^3}{16cd^3}$$

**Lösung**

$$\frac{121a^5b^6}{11a^4b^6} \cdot \frac{32cd^3}{16cd^3} = \frac{121 \cdot 32 a^{5-4} b^{6-6} c^{1-1} d^{3-3}}{11 \cdot 16} = 22a$$

### Lehrbeispiel 9

Schreiben Sie die Potenz zunächst ausführlich ohne Klammern. Geben Sie anschließend das Ergebnis als Produkt von Potenzen an!

$$(xy)^4$$

### **Lösung**

$$(xy)^4 = (xy) \cdot (xy) \cdot (xy) \cdot (xy) = xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = x^4 y^4$$

**Ein Produkt wird mit einer natürlichen Zahl potenziert, indem jeder Faktor des Produktes mit der natürlichen Zahl potenziert wird.**

**Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$**

### Lehrbeispiel 10

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$(xy)^3 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^3 ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^6 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^6$$

### **Lösung**

$$(xy)^3 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^3 = \left(\frac{xy}{y}\right)^3 = x^3$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^6 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^6 = \left(\frac{xy}{xy}\right)^6 = 1^6 = 1$$

### Lehrbeispiel 11

Schreiben Sie die Potenz zunächst ausführlich ohne Klammern! Geben Sie anschließend das Ergebnis als Quotient von Potenzen an!

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3$$

### **Lösung**

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \left(\frac{a}{x}\right) \cdot \left(\frac{a}{x}\right) \cdot \left(\frac{a}{x}\right) = \frac{a \cdot a \cdot a}{x \cdot x \cdot x} = \frac{a^3}{x^3}$$

**Ein Bruch wird mit einer natürlichen Zahl potenziert, indem Zähler und Nenner des Bruches jeweils mit der natürlichen Zahl potenziert werden.**

**Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $b \neq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $(a / b)^n = a^n / b^n$**

Lehrbeispiel 12*Vereinfachen Sie so weit wie möglich!*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \frac{a^2}{b^4} ; \quad \left(\frac{3x}{2y}\right)^4 \cdot \frac{16y^6}{81x}$$

**Lösung**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \frac{a^2}{b^4} = \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{a^2}{b^4} = \frac{a^4 \cdot b^4}{b^4 \cdot a^2} = a^2$$

$$\left(\frac{3x}{2y}\right)^4 \cdot \frac{16y^6}{81x} = \frac{3^4 x^4}{2^4 y^4} \cdot \frac{16y^6}{81x} = x^3 y^2$$

Lehrbeispiel 13*Lösen Sie die Klammern auf! Führen Sie die Lösung auf zwei verschiedene Weisen durch!*

$$(x^3)^2$$

**Lösung**

$$\begin{aligned} (x^3)^2 &= (x \cdot x \cdot x)^2 & (x^3)^2 &= (x^3)(x^3) \\ &= x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 & &= x^{3+3} \\ &= x^{2+2+2} = x^6 & &= x^6 \end{aligned}$$

Beide Lösungswege machen deutlich, dass der Exponent des Ergebnisses sich als Produkt der beiden Exponenten ergibt.

**Eine Potenz wird potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden. Die Basis bleibt unverändert.****Für alle  $a \in \mathbb{R}$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$** Lehrbeispiel 14*Vereinfachen Sie so weit wie möglich!*

$$\left(\frac{ab^2c^3}{x^2y^3}\right)^3 ; \quad \left(\frac{5x^0y^2}{2a^0b}\right)^3$$

**Lösung**

$$\left(\frac{ab^2c^3}{x^2y^3}\right)^3 = \frac{a^3b^6c^9}{x^6y^9}$$

$$\left( \frac{5x^0 y^2}{2a^0 b} \right)^3 = \left( \frac{5 \cdot 1 \cdot y^2}{2 \cdot 1 \cdot b} \right)^3 = \frac{125y^6}{8b^3}$$

### Lehrbeispiel 15

*Dividieren Sie die Potenzen ausführlich am Bruchstrich!*

$$b^4 : b^7$$

### **Lösung**

$$b^4 : b^7 = \frac{b \cdot b \cdot b \cdot b}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{1}{b^3}$$

Der gefundene Lösungsterm  $1/b^3$  soll nun mit dem Potenzgesetz zur Division von Potenzen in Beziehung gesetzt werden.

Es gilt:  $a^m : a^n = a^{m-n}$  für  $m > n$ . Im Lehrbeispiel  $b^4 : b^7$  ist  $m < n$ . Damit das Potenzgesetz aber auch für diesen Fall angewendet werden kann, wird eine Schreibweise mit negativen Exponenten eingeführt.

**Für alle  $a \in \mathbb{R}^*$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $1 / a^n = a^{-n}$**

### Lehrbeispiel 16

*Schreiben Sie die Potenzen mit negativen Exponenten!*

$$\frac{1}{x^3} ; \quad \frac{1}{a^5}$$

### **Lösung**

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$\frac{1}{a^5} = a^{-5}$$

### Lehrbeispiel 17

*Schreiben Sie die Potenz mit positivem Exponenten!*

$$\frac{10}{a^{-3}} ; \quad \frac{x^3 y}{x^{-2}} ; \quad a^{-5} : a^2$$

### **Lösung**

$$\frac{10}{a^{-3}} = 10a^3$$

$$\frac{x^3 y}{x^{-2}} = x^3 y x^2 = x^5 y$$

$$a^{-5} : a^2 = \frac{1}{a^5} : a^2 = \frac{1}{a^5 a^2} = \frac{1}{a^7}$$

**Für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gelten dieselben Gesetze wie für Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten.**

### Lehrbeispiel 18

*Vereinfachen Sie so weit wie möglich! Schreiben Sie das Ergebnis mit positivem Exponenten!*

$$a^6 \cdot a^{-3}; \quad b^0 \cdot b^{-1}; \quad x^{-4} : x^{-2}; \quad (y^{-2})^{-2}; \quad (m^{-1} \cdot n^{-2})^{-1}$$

### **Lösung**

$$a^6 a^{-3} = a^{6+(-3)} = a^3$$

$$b^0 b^{-1} = b^{0+(-1)} = b^{-1} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{x^{-4}}{x^{-2}} = x^{-4-(-2)} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$(y^{-2})^{-2} = y^{(-2)(-2)} = y^4$$

$$(m^{-1} n^{-2})^{-1} = m^{(-1)(-1)} n^{(-2)(-1)} = mn^2$$

### Lehrbeispiel 19

*Schreiben Sie die Potenzen mit positivem Exponenten!*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$$

### **Lösung**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^3} = \frac{1}{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{b^3}{a^3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

**Für alle  $a, b \in \mathbb{R}^*$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $(a / b)^{-n} = (b / a)^n$**

### Lehrbeispiel 20

Vereinfachen Sie und geben Sie das Ergebnis mit positiven Exponenten an!

$$(ab)^3 a^{-5} b^{-2}$$

$$\frac{(x^2 y)^{-3}}{(-y^2 x)^{-4}}$$

$$b^{-3} \left( -\frac{1}{b} \right)^{-3}$$

### **Lösung**

$$(ab)^3 a^{-5} b^{-2} = \frac{a^3 b^3}{a^5 b^2} = \frac{b}{a^2}$$

$$\frac{(x^2 y)^{-3}}{(-y^2 x)^{-4}} = \frac{x^{-6} y^{-3}}{+ y^{-8} x^{-4}} = \frac{+ y^8 x^4}{x^6 y^3} = \frac{+ y^5}{x^2}$$

$$b^{-3} \left( -\frac{1}{b} \right)^{-3} = \frac{1}{b^3} (-b)^3 = -1$$

### Lehrbeispiel 21

Multiplizieren Sie die Terme und schreiben Sie das Ergebnis mit positiven Exponenten!

$$(x^2 - y)(x - y^2); \quad (a^{-3} - b^2)^2; \quad (x^2 - y^{-3})(x^2 + y^{-3})$$

### **Lösung**

$$(x^2 - y)(x - y^2) = x^3 - x^2 y^2 - xy + y^3$$

$$(a^{-3} - b^2)^2 = a^{-6} - 2a^{-3} b^2 + b^4 = \frac{1}{a^6} - \frac{2b^2}{a^3} + b^4$$

$$(x^2 - y^{-3})(x^2 + y^{-3}) = x^4 - y^{-6} = x^4 - \frac{1}{y^6}$$

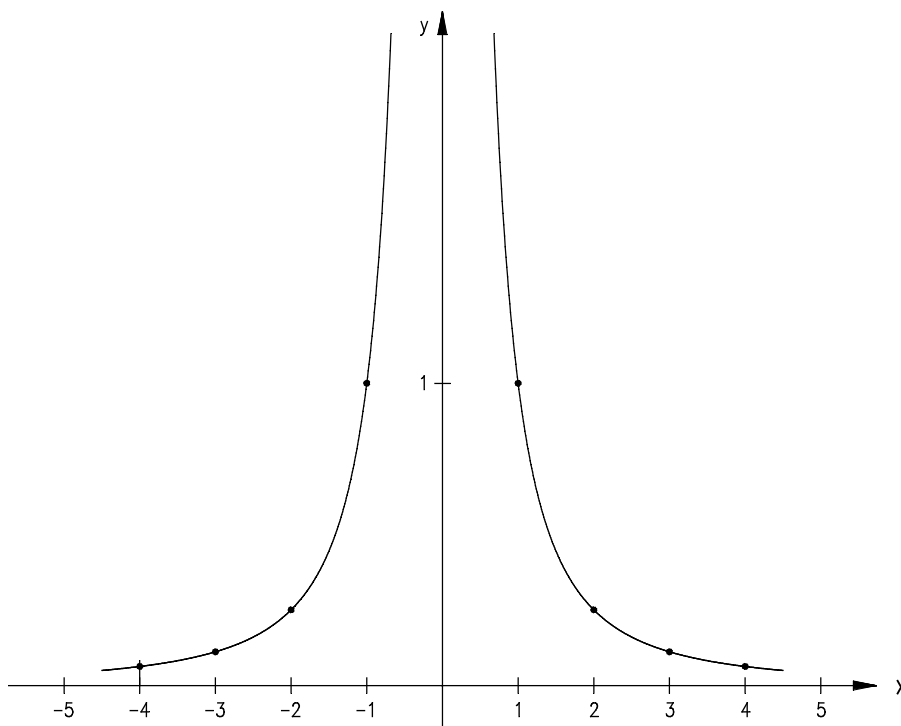
Lehrbeispiel 22

Zeichnen Sie den Graf der Funktion  $f(x) = 1/x^2$ ! Legen Sie zunächst eine Wertetabelle an für  $x$ -Werte von  $-4$  bis  $4$ , Schrittweite  $1$ ! Geben Sie die Definitionsmenge an!

**Lösung**

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	–	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$

Definitionsmenge:  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

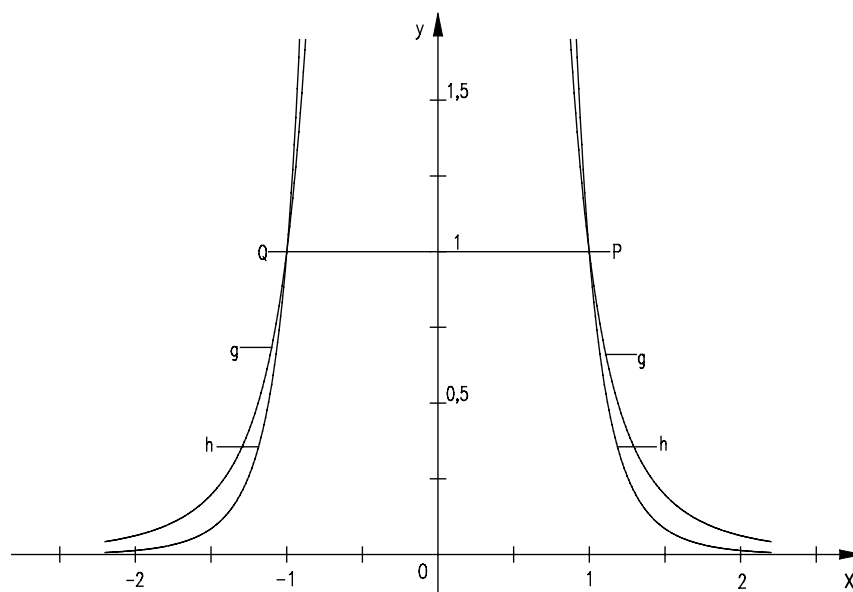
Lehrbeispiel 23

Zeichnen Sie die Funktionsgrafen für  $g(x) = x^{-4}$  und  $h(x) = x^{-6}$  in ein Koordinatensystem! Legen Sie eine Wertetabelle an für  $-2 \leq x \leq 2$ ! Runden Sie die Werte auf 2 Nachkommastellen!

**Lösung**

x	-2	-1,5	-1	-0,75	0,75	1	1,5	2
g(x)	0,06	0,20	1	3,16	3,16	1	0,2	0,06
h(x)	0,02	0,09	1	5,62	5,62	1	0,09	0,02

Definitionsmenge:  $D = \mathbb{R}^*$



Aus den Funktionsgraphen von  $f(x) = x^{-2}$ ,  $g(x) = x^{-4}$  und  $h(x) = x^{-6}$  lassen sich folgende Erkenntnisse gewinnen:

- **Alle Grafen** verlaufen durch die Punkte **P(1;1)** und **Q(-1;1)**.
- Die **Grafen** sind **symmetrisch zur y-Achse**.
- Die Wertemenge  $W$  ist die Menge aller positiven reellen Zahlen:  **$W = \mathbb{R}_+^*$**

**Diese Eigenschaften gelten für alle Potenzfunktionen mit der Funktionsgleichung:**

$$y = x^{-2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad D = \mathbb{R}^*$$

#### Lehrbeispiel 24

*P und Q sind Punkte des Grafen der Potenzfunktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^{-4}$ ! Bestimmen Sie zunächst jeweils die fehlende Koordinate von P und Q! Geben Sie anschließend die Koordinaten des Bildpunktes P' und Q' an!*

$$P(2; \quad); \quad Q(-1; \quad)$$

#### **Lösung**

$$\begin{aligned} P(2; \quad) \\ f(x) &= x^{-4} \\ f(2) &= 2^{-4} \\ &= \frac{1}{2^4} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(-1; \quad) \\ f(x) &= x^{-4} \\ f(-1) &= (-1)^{-4} \\ &= \frac{1}{(-1)^4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$P(2; \frac{1}{16})$$

$$Q(-1;1)$$

$$P'(-2; \frac{1}{16})$$

$$Q'(1;1)$$



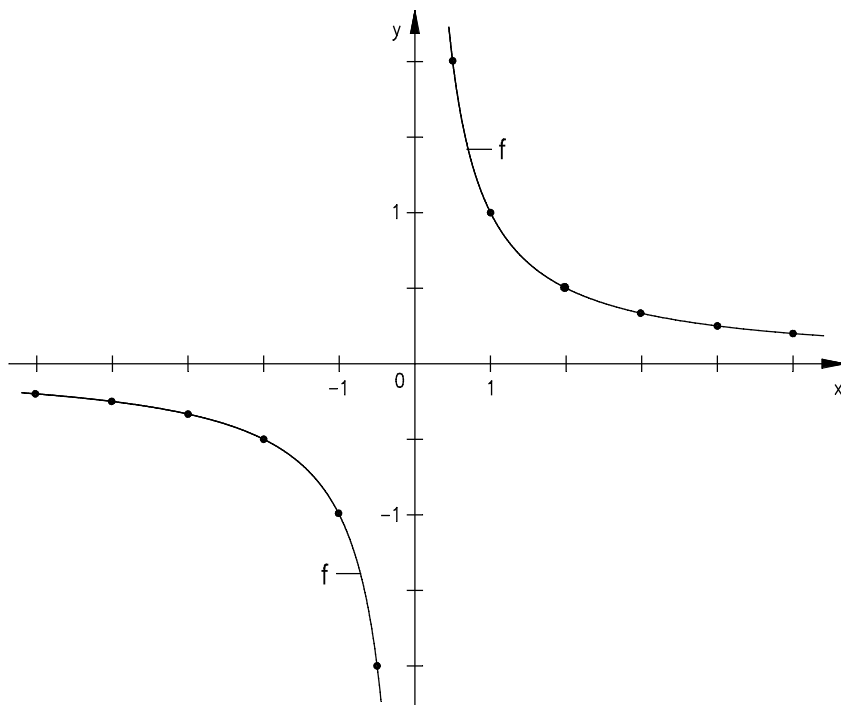
Lehrbeispiel 25

Zeichnen Sie den Grafen der Potenzfunktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^{-1}$ !  
 Legen Sie zunächst eine Wertetabelle an mit  $x$ -Werten von  $-5$  bis  $5$  (Schrittweite  $0,5$ )!  
 Runden Sie sinnvoll! Geben Sie die Definitionsmenge an!

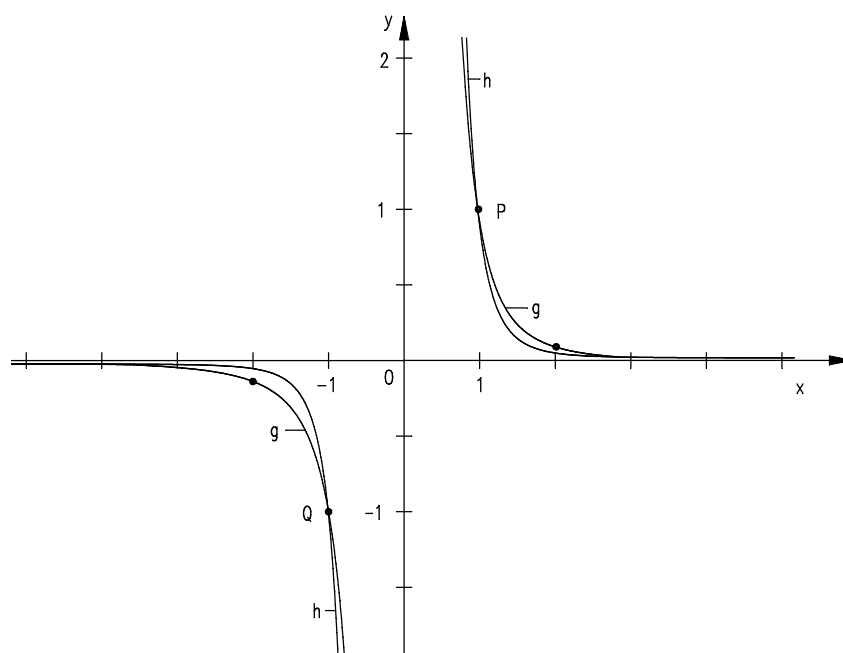
**Lösung**

x	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5
f(x)	-0,2	-0,22	-0,25	-0,29	-0,33	-0,4	-0,5	-0,67	-1	-2

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
f(x)	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,29	0,25	0,22	0,2



Im Koordinatensystem sind die Funktionsgrafen von  $g(x) = x^{-3}$  und  $h(x) = x^{-5}$  dargestellt.



Aus den Grafen für Potenzfunktionen mit der Funktionsgleichung  $y = x^{-2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $D = \mathbb{R}^*$  sind folgende Erkenntnisse zu gewinnen:

- Die Grafen verlaufen durch die Punkte  $P(1;1)$  und  $Q(-1;-1)$ .
- Die Grafen sind punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.
- Die Wertemenge  $W$  ist die Menge aller von Null verschiedenen reellen Zahlen:  
 $W = \mathbb{R}^*$ .

#### Lehrbeispiel 26

*P und Q sind Punkte des Grafen der Potenzfunktion  $g(x) = x^{-3}$ ! Bestimmen Sie zunächst jeweils die fehlende Koordinate von P und Q! Geben Sie anschließend die Koordinaten des Bildpunktes  $P'$  und  $Q'$  an!*

$P(-0,5; \quad); Q(2; \quad)$

#### Lösung:

$$\begin{aligned} P(-0,5; \quad) \\ g(x) &= x^{-3} \\ g(-0,5) &= (-0,5)^{-3} \\ &= \frac{1}{-0,125} \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(2; \quad) \\ g(x) &= x^{-3} \\ g(2) &= 2^{-3} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$P(-0,5;-8)$

$Q(2;\frac{1}{8})$

$P'(0,5;8)$

$Q'(-2;-\frac{1}{8})$

Lehrbeispiel 27

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer Potenzfunktion mit  $f(x) = x^{-n}$ , deren Graf durch den Punkt  $P(x;y)$  geht!

$$P\left(3; \frac{1}{81}\right)$$

**Lösung**

$$P\left(3; \frac{1}{81}\right)$$

$$f(x) = x^{-n}$$

$$\frac{1}{81} = 3^{-n}$$

$$\frac{1}{81} = 3^{-4}$$

$$f(x) = x^{-4}$$

Lehrbeispiel 28

Das Produkt zweier Zahlen  $x$  und  $y$  beträgt 20.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der zugehörigen Potenzfunktion und zeichnen Sie den Grafen im Bereich  $-2 \leq x \leq 2$ ! Runden Sie auf eine Nachkommastelle!

**Lösung**

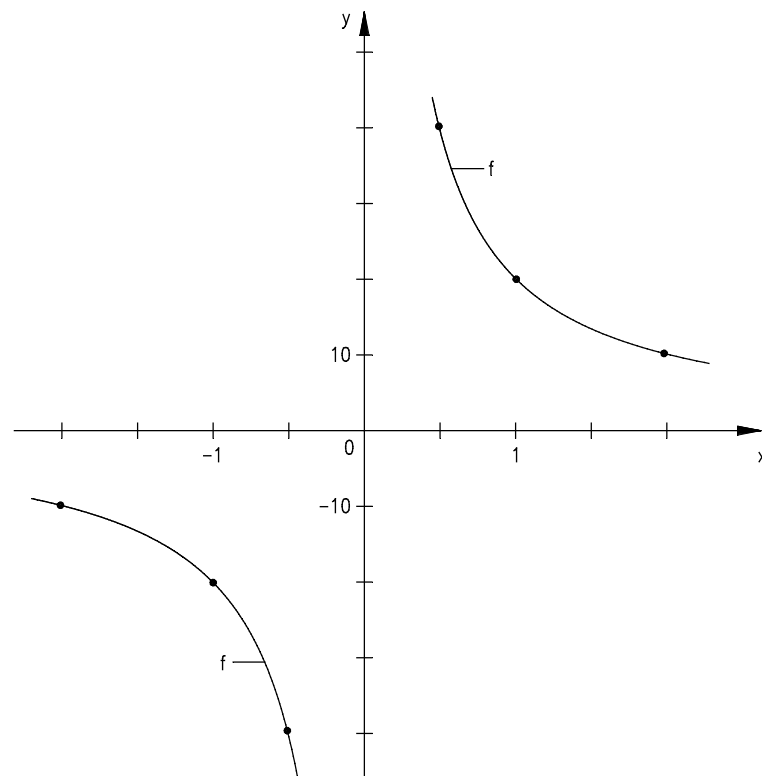
$$x \cdot y = 20$$

$$y = 20 / x$$

$$y = 20 x^{-1}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0,5	1	1,5	2
f(x)	-10	-13,3	-20	-40	40	20	13,3	10



Das Volumen  $V$  eines Würfels beträgt  $27 \text{ cm}^3$ .

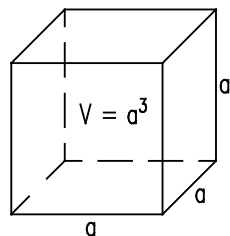


Abbildung 3 Würfel

Um die Kantenlänge  $a$  des Würfels zu bestimmen, wird eine Zahl gesucht, die mit 3 potenziert 27 ergibt.

Diese Zahl ist die 3. Wurzel aus 27.

$\sqrt[3]{27} = 3$ , denn  $3^3 = 27$ . Lies: Dritte Wurzel aus 27 gleich 3.

$\sqrt[n]{a}$  ist die nichtnegative Zahl, die mit  $n$  potenziert  $a$  ergibt.

$\sqrt[n]{a}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$   
Wurzelexponent      Radikand

Das Wurzelziehen - auch Radizieren genannt - ist die Umkehrung des Potenzierens. Bei der zweiten Wurzel (Quadratwurzel) wird der Wurzelexponent weggelassen:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$$

Beispiele:  $\sqrt[5]{32} = 2$ , denn  $2^5 = 32$

$$\sqrt[3]{125} = 5, \quad \text{denn } 5^3 = 125$$

$$\sqrt[1]{a} = a, \quad \text{denn } a^1 = a$$

### Lehrbeispiel 29

Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich!

$$\sqrt{a^2}; \sqrt[4]{x^4}; \sqrt[5]{b^{10}}; \sqrt[3]{y^9}; \sqrt[3]{8a^3 64b^3}$$

### **Lösung**

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt[4]{x^4} = x$$

$$\sqrt[5]{b^{10}} = \sqrt[5]{b^{2 \cdot 5}} = \sqrt[5]{(b^2)^5} = b^2$$

$$\sqrt[3]{y^9} = \sqrt[3]{y^{3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{(y^3)^3} = y^3$$

$$\sqrt[3]{8a^3 64b^3} = \sqrt[3]{2^3 a^3 4^3 b^3} = 2a 4b = 8ab$$

### Lehrbeispiel 30

Berechnen Sie den Wert der Potenz  $(3^{\frac{1}{2}})^2$ , indem Sie das Potenzgesetz  $(a^m)^n$  anwenden!

### **Lösung**

$$(3^{\frac{1}{2}})^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2}$$

$$= 3^{\frac{2}{2}}$$

$$= 3^1 = 3$$

$3^{\frac{1}{2}}$  ist demnach diejenige Zahl, deren Quadrat 3 ergibt. Daraus lässt sich folgender Zusammenhang herleiten:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \quad \text{denn } (\sqrt{3})^2 = 3$$

Für alle  $a \in \mathbb{R}_+$  und alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt:  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Beispiele:  $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$ , denn  $(16^{\frac{1}{2}})^2 = 16$   
 $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$ , denn  $(x^{\frac{1}{5}})^5 = x$

### Lehrbeispiel 31

*Geben Sie als Potenz bzw. als Wurzel an!*

$$\sqrt[n]{ab}; \sqrt[4]{m}; z^{\frac{1}{6}}; (xy)^{\frac{1}{q}}$$

### **Lösung**

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[4]{m} = m^{\frac{1}{4}}$$

$$z^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{z}$$

$$(xy)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{xy}$$

Das folgende Beispiel zeigt, wie Potenzen der Form  $a^{\frac{m}{n}}$  als Wurzelterm geschrieben werden können.

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{2 \cdot \frac{1}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

Eine weitere Möglichkeit:

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} \cdot 2} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{a})^2$$

Die Möglichkeit der Darstellung gilt ebenso für negative gebrochene Exponenten.

$$a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} \cdot (-2)} = (a^{\frac{1}{3}})^{-2} = (\sqrt[3]{a})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{a})^2}$$

Allgemein kann formuliert werden:

**Für alle  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt:**

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{oder} \quad a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

### Lehrbeispiel 32

*Geben Sie als Potenz mit gebrochenem Exponenten bzw. als Wurzel an!*

$$\sqrt[3]{x^4}; (\sqrt{a})^{-3}; (\sqrt[8]{y})^{-4}; a^{\frac{3}{5}}; b^{-\frac{3}{2}}$$

**Lösung**

$$\sqrt[3]{x^4} = (x^4)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$$

$$(\sqrt{a})^{-3} = (a^{\frac{1}{2}})^{-3} = a^{-\frac{3}{2}}$$

$$(\sqrt[8]{y})^{-4} = (y^{\frac{1}{8}})^{-4} = y^{-\frac{4}{8}}$$

$$a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$$

$$b^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{b^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{b^3}}$$

**Für Potenzen mit rationalen Exponenten gelten die selben Gesetze wie für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.**

Lehrbeispiel 33

*Wenden Sie das entsprechende Potenzgesetz an!*

$$a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}; \quad x^{-\frac{1}{3}} : x^{-\frac{1}{6}}; \quad (y^{\frac{1}{3}})^6$$

**Lösung**

$$a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{4}}$$

$$x^{-\frac{1}{3}} : x^{-\frac{1}{6}} = x^{-\frac{1}{3} - (-\frac{1}{6})} = x^{-\frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = x^{-\frac{1}{6}}$$

$$(y^{\frac{1}{3}})^6 = y^{\frac{1}{3} \cdot 6} = y^2$$

Lehrbeispiel 34

*Vereinfachen Sie so weit wie möglich!*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}; \quad \left(\frac{x^{0,5}}{3}\right)^4; \quad \left(\frac{z^{-4}}{y^{-2}}\right)^{-0,5}$$

**Lösung**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{ab}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$\left(\frac{x^{0,5}}{3}\right)^4 = \frac{x^2}{3^4} = \frac{x^2}{81}$$

$$\left(\frac{z^{-4}}{y^{-2}}\right)^{-0,5} = \frac{z^2}{y}$$

### Lehrbeispiel 35

Schreiben Sie zunächst als Potenz und vereinfachen so weit wie möglich!

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} ; \sqrt[5]{x^3 y^2} \cdot \sqrt[5]{x^2 y^3}$$

### Lösung

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a$$

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{x^3 y^2} \cdot \sqrt[5]{x^2 y^3} &= (x^3 y^2)^{\frac{1}{5}} \cdot (x^2 y^3)^{\frac{1}{5}} = (x^3 x^2 y^2 y^3)^{\frac{1}{5}} \\ &= (x^5 y^5)^{\frac{1}{5}} = xy \end{aligned}$$

### Lehrbeispiel 36

Vereinfachen Sie den Term!

$$(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b})^6 ; (\sqrt[4]{x^3} \cdot x^{-\frac{1}{4}})^{-4}$$

### Lösung

$$(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b})^6 = (a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}})^6 = a^2 b^3$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[4]{x^3} \cdot x^{-\frac{1}{4}})^{-4} &= (x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{4}})^{-4} = x^{-\frac{12}{4}} \cdot x \\ &= x^{-3} \cdot x = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

### Lehrbeispiel 37

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$\frac{\sqrt[4]{x^2 y^4}}{\sqrt[4]{x^2 y}} ; \frac{\sqrt[3]{2a^4 b^6}}{\sqrt[3]{250a}}$$

### Lösung

$$\frac{\sqrt[4]{x^2 y^4}}{\sqrt[4]{x^2 y}} = \sqrt[4]{\frac{x^2 y^4}{x^2 y}} = \sqrt[4]{y^3}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2a^4 b^6}}{\sqrt[3]{250a}} = \sqrt[3]{\frac{2a^4 b^6}{250a}} = \sqrt[3]{\frac{a^3 b^6}{125}} = \frac{a \sqrt[3]{b^6}}{5} = \frac{ab^{\frac{6}{3}}}{5} = \frac{ab^2}{5}$$



Lehrbeispiel 38

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in  $\mathbb{R}_+$ ! Runden Sie auf die zweite Nachkommastelle!

$$150x^{-5} - 0,3 = 1,8 - (1,1 - 30x^{-5})$$

**Lösung**

$$150x^{-5} - 0,3 = 1,8 - (1,1 - 30x^{-5})$$

$$150x^{-5} - 0,3 = 1,8 - 1,1 + 30x^{-5}$$

$$120x^{-5} = 1 \quad | : 120$$

$$x^{-5} = \frac{1}{120}$$

$$(x^{-5})^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{120}\right)^{-\frac{1}{5}}$$

$$x = 120^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{120}$$

$$x \approx 2,61$$

$$L = \{2,61\}$$

Lehrbeispiel 39

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$4 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 5$$

**Lösung**

$$4 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

$$(x^{\frac{1}{3}})^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

$$x = \frac{125}{64}$$

Probe:

$$4 \cdot \left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$4 \cdot \frac{5}{4} = 5$$

$$5 = 5 \text{ (w)}$$

### Lehrbeispiel 40

*Vereinfachen Sie!*

$$\frac{a^{-5} a^{\frac{1}{2}} a}{a^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{3}{2}}}$$

### **Lösung**

$$\begin{aligned} \frac{a^{-5} a^{\frac{1}{2}} a}{a^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{3}{2}}} &= a^{-5+\frac{1}{2}+1-(-\frac{5}{2})-(-\frac{3}{2})} = a^{-5+\frac{1}{2}+1+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \end{aligned}$$

### **Aufgaben**

#### Aufgabe 1

*P und Q sind Punkte des Grafen der Potenzfunktion f. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten von P und Q!*

1.1  $f(x) = x^4$     P(-2; )    Q( ;81)

1.2  $f(x) = x^7$     P(-3; )    Q( ; -1)

1.3  $f(x) = x^{-6}$     P(-2; )    Q( ;64)

1.4  $f(x) = x^{-5}$     P(0,5; )    Q( ;1024)

#### Aufgabe 2

*P ist ein Punkt auf dem Grafen der Funktion  $f(x) = x^4$ . Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden  $g(x)$  durch P, wenn P die x-Koordinate 1,5 hat.*

#### Aufgabe 3

*Vereinfachen Sie den Term!*

3.1  $4x^5 + 3x^5$

3.2  $6(x-y)^k - 5(x-y)^k$

3.3  $1 + x^3 - 0,4 + 2x^3 - \frac{1}{4}x^3$

3.4  $at^n + t^n$

Aufgabe 4*Vereinfachen Sie!*

4.1  $x^3 \cdot x^4$

4.2  $e^x \cdot e^x$

4.3  $s^5 : s^3$

4.4  $z^{n+1} \cdot z^n$

4.5  $b^x : b^{x-1}$

Aufgabe 5*Vereinfachen Sie den Term!*

5.1 
$$\frac{56 r^2 s^{-1} r^{-1}}{s^3 r^{-2} \cdot 1,4}$$

5.2 
$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-z} : \left(\frac{p}{2q}\right)^{-z}$$

5.3  $(z^{n+3} - 3z^n - z^{n-3}) : z^{-3}$

5.4 
$$\frac{(x y^2 z)^{-2}}{a^2 b^{-1}} : \frac{(x^2 y)^2}{(a b)^{-1}}$$

Aufgabe 6*Bringen Sie die Terme auf einen gemeinsamen Nenner und vereinfachen Sie die Summe!*

6.1 
$$\frac{1-x^5}{x^7} + \frac{1}{x^2}$$

6.2 
$$\frac{3x^5+2}{2x^5} + \frac{3x^8-2}{3x^8} - \frac{5x^{10}-2}{2x^{10}}$$

Aufgabe 7*Berechnen Sie!*

7.1  $\sqrt[3]{10^6}$

7.2  $\sqrt[4]{10^{-8}}$

7.3  $\sqrt[5]{7^5}$

7.4  $(\sqrt[3]{2})^3$

7.5  $(\sqrt{2})^4$

### Aufgabe 8

*Schreiben Sie die Potenz als Wurzel!*

8.1  $3^{\frac{1}{2}}$

8.2  $2^{-3/4}$

8.3  $y^{-0,2}$

### Aufgabe 9

*Schreiben Sie als Potenz!*

9.1  $\sqrt[3]{6}$

9.2  $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

9.3  $\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$

### Aufgabe 10

*Vereinfachen Sie den Wurzelterm, indem Sie sie zunächst als Potenz schreiben!*

10.1  $\sqrt[8]{s^6}$

10.2  $\frac{1}{\sqrt[10]{2^8}}$

10.3  $\frac{1}{\sqrt[15]{x^{3k}}}$

10.4  $\sqrt[4]{100}$

10.5  $\sqrt[10]{25^4}$

### Aufgabe 11

*Berechnen Sie!*

11.1  $\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[3]{6}$

11.2  $\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{5}$

11.3  $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$

11.4  $3^{-1/2} \cdot (2/3)^{-1/2}$

11.5  $(3^{-3/4})^{-4/5}$

Aufgabe 12*Vereinfachen Sie!*

$$12.1 \quad \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$12.2 \quad \sqrt[n]{\sqrt{a}}$$

$$12.3 \quad \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{b^3}}$$

$$12.4 \quad \frac{(10^n : 2^n)^2}{(\sqrt{5})^2}$$

Aufgabe 13*Geben Sie die Lösungsmenge an!*

$$13.1 \quad 8x^3 + 27 = 0$$

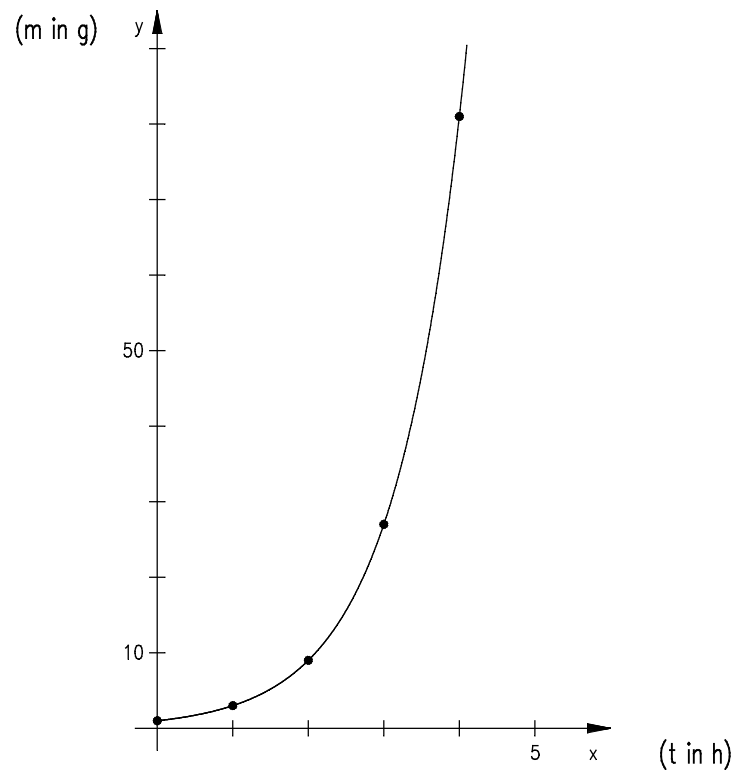
$$13.2 \quad 10^3 x^5 = 10^{-2}$$

Lernbereich

## 4 Exponentialfunktionen

In der Wertetabelle und im Koordinatensystem ist das Wachstum einer Bakterienkultur dargestellt.

Zeit t in (h)	0	1	2	3	4	5
Masse m in (g)	1	3	9	27	81	243



Der Wertetabelle ist zu entnehmen, dass die Masse m sich stündlich verdreifacht. Die Zuordnung Zeit  $\rightarrow$  Masse kann mit folgendem Term beschrieben werden:

$$\text{Masse } (x) \rightarrow 3^x$$

Der Graf zeigt deutlich, dass es sich bei der Zuordnung um eine Funktion handelt. Die zugehörige Funktionsgleichung lautet demnach:  $f(x) = 3^x$ , mit  $D = \mathbb{R}_+$ .

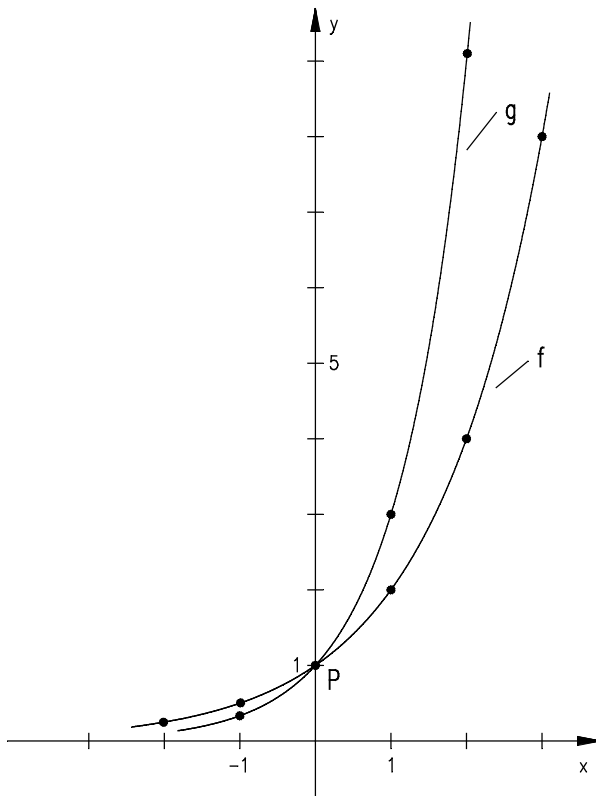
### Lehrbeispiel 1

Zeichnen Sie die Grafen der Funktion  $f(x) = 2^x$  und  $g(x) = 3^x$  mit der Definitionsmenge  $D = \mathbb{R}$  in ein Koordinatensystem!

Legen Sie eine Wertetabelle an mit  $-3 \leq x \leq 3$  (Schrittweite 0,5). Runden Sie auf zwei Nachkommastellen!

**Lösung**

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	0,13	0,18	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4	5,66	8
g(x)	0,04	0,06	0,11	0,19	0,33	0,58	1	1,73	3	5,20	9	15,59	27



Den Funktionsgraphen sind folgende Eigenschaften zu entnehmen:

- Die Wertemenge **W** ist die Menge aller positiven reellen Zahlen:  $W = \mathbb{R}_+$ .
- Die **Grafen schneiden die y-Achse in P(0;1)**.  
Begründung: Für alle  $a$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  gilt:  $a^0 = 1$ .
- Je kleiner die x-Werte werden, desto mehr nähern sich die Funktionswerte der 0 an. **Der Graf hat allerdings keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.**

Beweis: Annahme:  $2^x = 0$

$$(2^x)^{x^{-1}} = 0^{x^{-1}}$$

$$2 = \frac{1}{0^x}$$

Der Nenner  $0^x$  ist nicht definiert, daher ist die Annahme falsch.

- Die Grafen steigen im gesamten Definitionsbereich.**

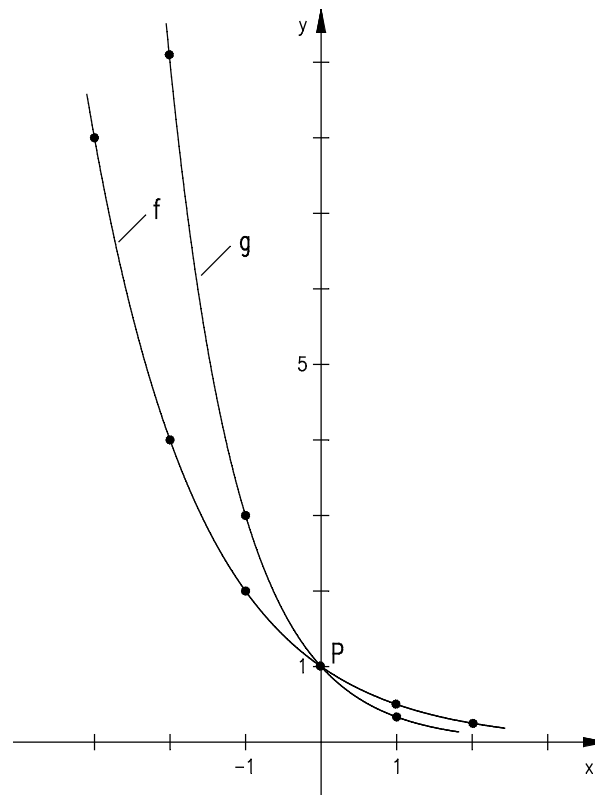
### Lehrbeispiel 2

Zeichnen Sie die Grafen der Funktion  $f(x) = (1/2)^x$  und  $g(x) = (1/3)^x$  mit der Definitionsmenge  $D = \mathbb{R}$  in ein Koordinatensystem!

Legen Sie eine Wertetabelle an mit  $-3 \leq x \leq 3$  (Schrittweite 0,5). Runden Sie auf zwei Nachkommastellen!

### Lösung

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	8	5,66	4	2,83	2	1,41	1	0,71	0,5	0,35	0,25	0,18	0,13
g(x)	27	15,59	9	5,20	3	1,73	1	0,58	0,33	0,19	0,11	0,06	0,04



Den Funktionsgraphen sind folgende Eigenschaften zu entnehmen:

- Die Wertemenge **W** ist die Menge aller positiven reellen Zahlen:  $W = \mathbb{R}_+$ .
- Die **Grafen schneiden die y-Achse in P(0;1)**.
- Je größer die x-Werte werden, desto mehr nähern sich die Funktionswerte der 0 an, **der Graf schneidet aber nie die x-Achse**.
- **Die Grafen fallen im gesamten Definitionsbereich.**
- Die Grafen der Funktionen  $f(x) = 2^x$  und  $f(x) = (1/2)^x$  sowie  $g(x) = 3^x$  und  $g(x) = (1/3)^x$  sind jeweils achsensymmetrisch zur y-Achse.

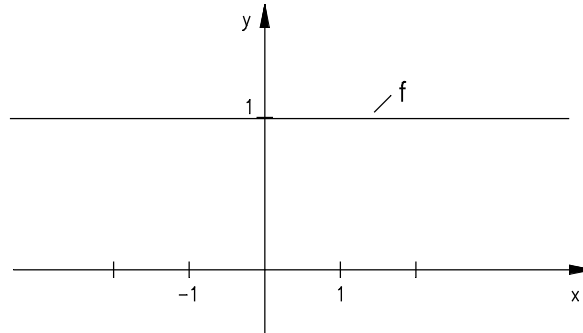


Lehrbeispiel 3

Zeichnen Sie den Grafen der Funktion  $f(x) = 1^x$ ! Beschreiben Sie den Grafen und geben Sie die Wertemenge an!

**Lösung**

x	-1	0	1
f(x)	1	1	1

**Antwort:**

Der Graf verläuft parallel zur x-Achse. Die Wertemenge ist  $W = \{1\}$ .

**Zusammenfassung**

Eine Funktion  $f$  mit  $f(x) = a^x$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$  heißt **Exponentialfunktion**.

Ihre Definitionsmenge ist  $D = \mathbb{R}$ . Für  $a \neq 1$  ist die Wertemenge  $W = \mathbb{R}_+$ .

Der Funktionsgraf schneidet die y-Achse in  $P(0;1)$ .

Für  $a > 1$  steigt der Graf, für  $a < 1$  fällt er. Für  $a = 1$  verläuft der Graf parallel zur x-Achse.

Lehrbeispiel 4

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion mit  $f(x) = a^x$ , deren Graf durch den Punkt  $P(-3;8)$  geht!

**Lösung**

$$\begin{aligned}
 P(-3;8) \quad f(x) &= a^x \\
 8 &= a^{-3} \\
 8 &= \frac{1}{a^3} & | \cdot a^3 \\
 8a^3 &= 1 & | : 8 \\
 a^3 &= \frac{1}{8} \\
 a &= \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

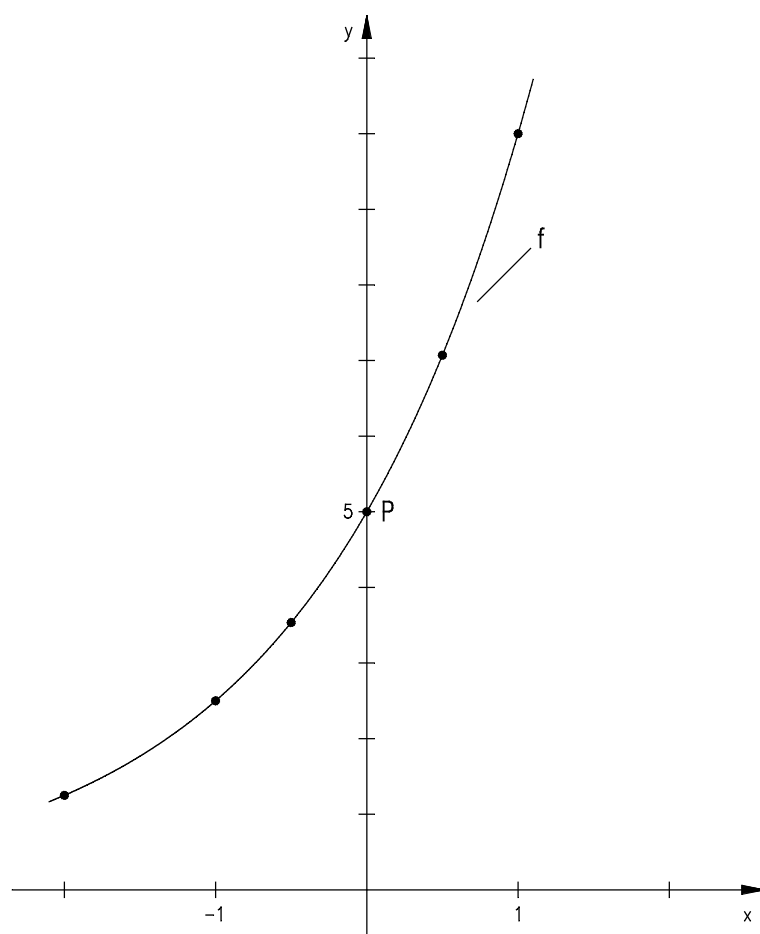
**Antwort:**  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

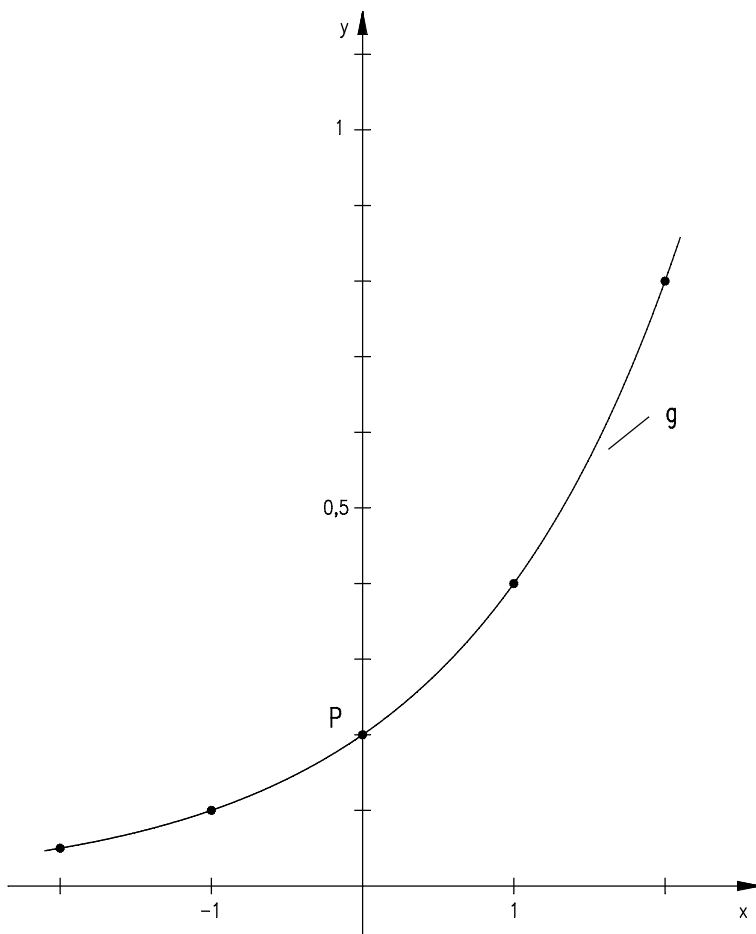
### Lehrbeispiel 5

Zeichnen Sie die Funktionsgraphen der Funktion  $f(x) = 5 \cdot 2^x$  und  $g(x) = (1/5) \cdot 2^x$  mit der Definitionsmenge  $D = \mathbb{R}$  jeweils in ein Koordinatensystem! Legen Sie eine Wertetabelle an mit  $-2 \leq x \leq 2$  (Schrittweite 0,5)! Runden Sie auf zwei Nachkommastellen!

### Lösung

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	1,25	1,77	2,5	3,54	5	7,07	10	14,14	20
g(x)	0,05	0,07	0,1	0,14	0,2	0,28	0,4	0,57	0,8





Den Funktionsgraphen ist folgende Eigenschaft zu entnehmen:

**Die Funktionsgraphen der Funktionsgleichung  $f(x) = k a^x$  schneiden die y-Achse in  $P(0;k)$ .**

#### Lehrbeispiel 6

*Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion mit  $f(x) = k a^x$ , deren Graf die y-Achse in  $P(0;0,25)$  schneidet und durch den Punkt  $Q(5;8)$  geht!*

#### **Lösung**

Aus den Koordinaten von P ergibt sich der Wert für k.

$$\begin{aligned} P(0;0,25) \quad f(x) &= k a^x \\ 0,25 &= k \cdot a^0 \\ 0,25 &= k \cdot 1 \\ k &= 0,25 \end{aligned}$$

Für den Punkt Q wird der ermittelte Wert  $k = 0,25$  eingesetzt.

$$\begin{aligned} Q(5;8) \quad f(x) &= k a^x \\ 8 &= 0,25 a^5 \quad | : 0,25 \\ 32 &= a^5 \\ \sqrt[5]{32} &= a \\ a &= 2 \end{aligned}$$

**Antwort:**  $f(x) = 0,25 \cdot 2^x$

### Lehrbeispiel 7

*Berechnen Sie das Guthaben eines Sparkontos, wenn ein Kapital  $K_0 = 3000 \text{ €}$  zum Zinssatz von 4 % für 5 Jahre fest gelegt wird! Stellen Sie das Wachstum des Kapitals grafisch dar. Runden Sie auf ganze Euro!*

### **Lösung**

$$\begin{aligned} \text{Nach dem 1. Jahr beträgt das Guthaben} \quad K_1 &= 3000 + 3000 \cdot \frac{4}{100} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Zinsen}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= 3000 \cdot (1 + 0,04) \\ &= 3000 \cdot 1,04 \end{aligned}$$

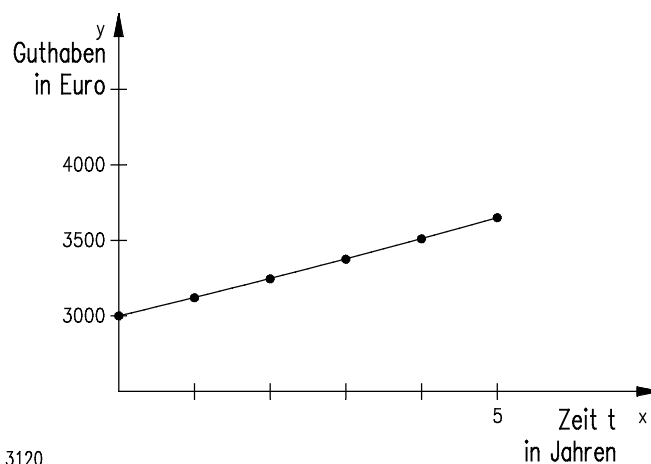
$$\text{Nach dem 2. Jahr beträgt das Guthaben} \quad K_2 = 3000 \cdot 1,04 \cdot 1,04$$

$$K_2 = 3000 \cdot 1,04^2$$

$$\text{Nach dem 5. Jahr beträgt das Guthaben} \quad K_5 = 3000 \cdot 1,04^5$$

$$= 3650$$

**Antwort:** Nach 5 Jahren beträgt das Guthaben 3650 €.



- 1: 3120
- 2: 3245
- 3: 3375
- 4: 3510
- 5: 3650

Lehrbeispiel 8

Geben Sie einen allgemeinen Term zur Berechnung der Zinseszinsen an!

**Lösung**

Anfangskapital	$K_0$
Endkapital nach n Jahren	$K_n$
Zinssatz	$p\%$
Zinsfaktor $1 + p\%$	$q$

$$\text{Kapital nach n Jahren} \quad K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$= K_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Lehrbeispiel 9

Berechnen Sie den Zinssatz, zu dem ein Kapital von 5000 € angelegt wurde, wenn nach 15 Jahren 10394,64 € ausgezahlt werden!

**Lösung**

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad | : K_0$$

$$\frac{K_n}{K_0} = q^n \quad | \sqrt[n]{\phantom{x}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = q$$

$$q = \sqrt[15]{\frac{10394,64}{5000}}$$

$$q = 1,05$$

**Antwort:** Der Zinssatz beträgt 5 %.

Lehrbeispiel 10

Ein Körper mit einer Temperatur von 240 °C wird zum Abkühlen in einen Kühlraum mit einer konstanten Temperatur von 0 °C gebracht. Nach jeweils einer Stunde halbiert sich die Temperatur.

Geben Sie einen Lösungsterm zur Berechnung der jeweiligen Temperatur an und stellen Sie die Abkühlkurve bis zu einer Abkühldauer von 5 Stunden grafisch dar!

### Lösung

Zeit t in (h)	0	1	2	3	4	5
Temperatur T in (°C)	240	120	60	30	15	7,5

Da die Temperaturen mit wachsender Zeit immer kleiner werden, muss für die Funktion gelten:  $f(t) = a^t$  mit  $a < 1$ .

Weiter gilt:  $f(0) = 240$        $f(0) = k \cdot a^0$

$$\begin{aligned} 240 &= k \cdot 1 \\ k &= 240 \end{aligned}$$

Funktionsterm:  $T = f(t) = 240 \cdot a^t$

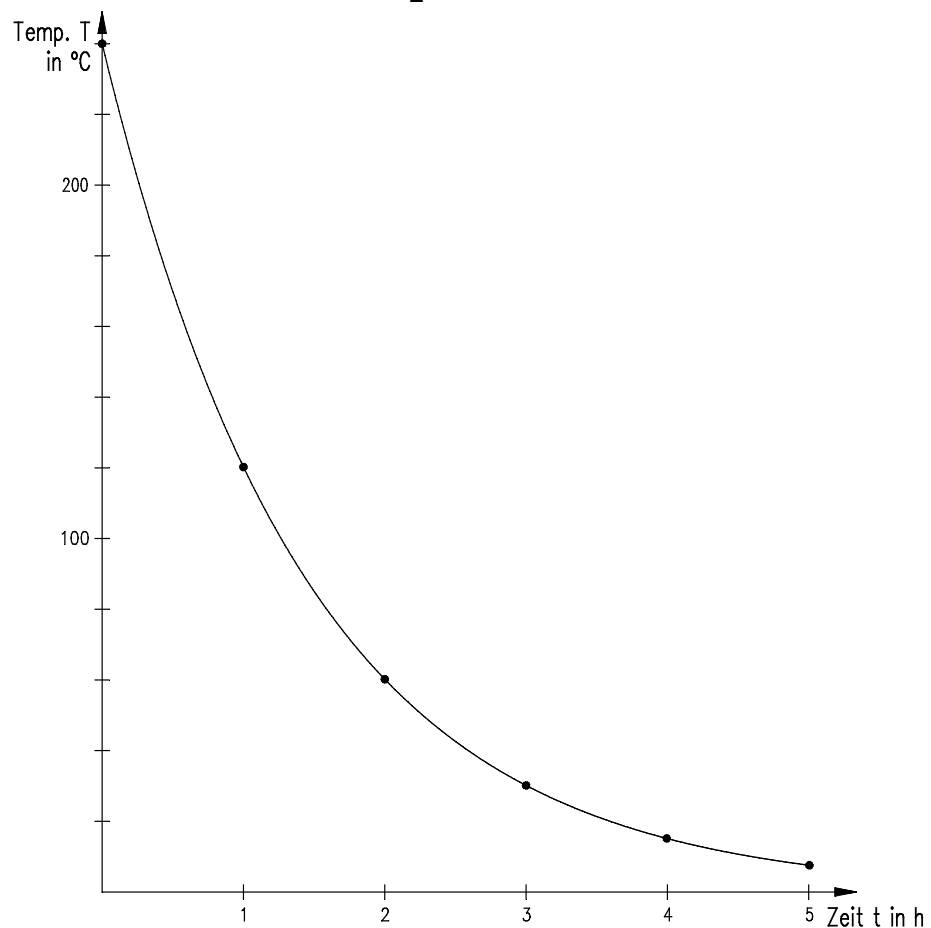
$$T(1) = 240 \cdot a^1$$

$$120 = 240 \cdot a \quad | : 240$$

$$\frac{120}{240} = a$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Funktionsgleichung:  $T = 240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$



Lehrbeispiel 11

Iridium 192 hat eine Halbwertszeit von 74 Tagen. Zu Beginn der Beobachtung sind 800 mg vorhanden.

*Bestimmen Sie zunächst eine Funktionsgleichung, die den radioaktiven Zerfall beschreibt! Berechnen Sie anschließend, wie viel Milligramm des Stoffes nach 365 Tagen noch vorhanden sind! Stellen Sie den radioaktiven Zerfall grafisch dar!*

**Lösung**

Anzahl x der Halbwertszeiten	0	1	2	3	4	5
Zeit t in Tagen	0	74	148	222	296	370
Anteil y des anfangs vorhandenen Stoffes	800	400	200	100	50	25

Aus der Wertetabelle ist zu entnehmen:  $y = 800 \cdot 0,5^x$ .

Die Anzahl x der vergangenen Halbwertszeiten erhält man, indem die Beobachtungszeit t durch die Halbwertszeit dividiert wird.

Für den radioaktiven Zerfall sind folgende Abkürzungen definiert:

Ausgangsmenge des radioaktiven Stoffes:  $N_0$   
 Halbwertszeit:  $T$   
 Anzahl der Beobachtungstage:  $t$   
 Restmenge nach der Zeit t :  $N_{(t)}$

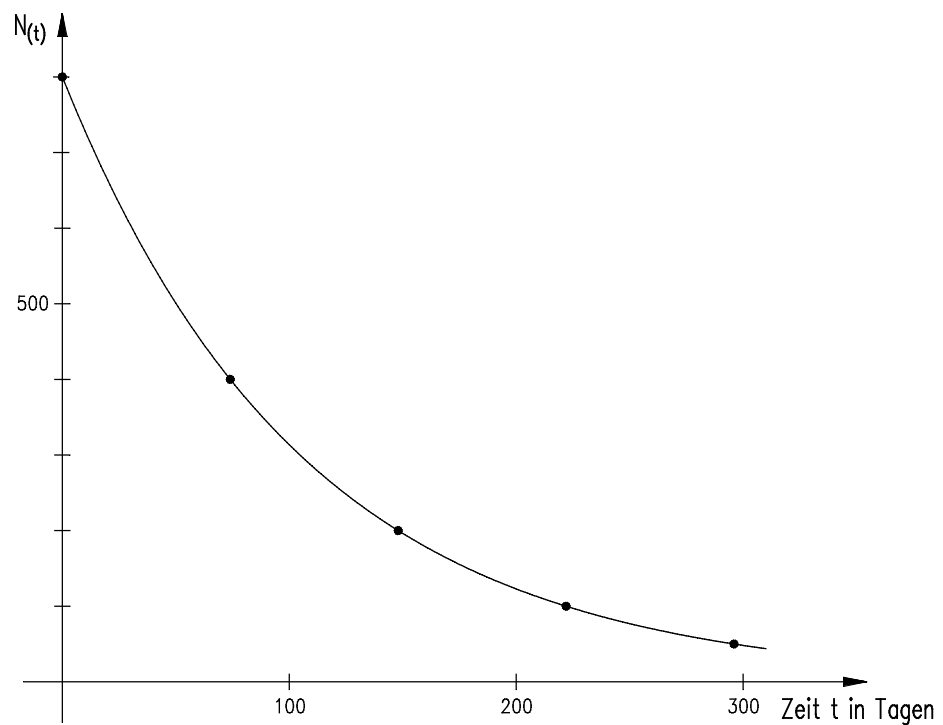
Dann ergibt sich für die Berechnungsformel:

$$N_{(t)} = N_0 \cdot 0,5^{t/T}$$

$$N_{(365)} = 800 \cdot 0,5^{365/74}$$

$$= 26,2$$

**Antwort:** Nach 365 Tagen ist noch eine Restmenge von 26,2 mg Iridium vorhanden.



Viele Naturvorgänge wachsen oder fallen nach den Gesetzmäßigkeiten der Exponentialfunktion. Nun soll auf einen besonderen Wachstums- bzw. Zerfallsprozess eingegangen werden.

Zunächst soll noch einmal auf die Kapitalverzinsung Bezug genommen werden.

$$K_n = K_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Dabei wird unterstellt, dass der Zinszuschlag jeweils zum Jahresende erfolgt.

Wenn man nun bei einem jährlichen Wachstumssatz von  $p\%$  den Zuschlag nach jeweils  $1/t$  Jahr mit  $p\%/t$  vornimmt, ergibt sich ein Endkapital nach  $n$  Jahren von

$$K_n = K_0 \left( 1 + \frac{p}{100 \cdot t} \right)^{n \cdot t}$$



Lehrbeispiel 12

Berechnen Sie das Guthaben von 10000 € bei 6 % Zins bei jährlichem und monatlichem Zuschlag!

**Lösung**

bei jährlichem Zuschlag  $K_1 = 10000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^1$

$$K_1 = 10600 \text{ Euro}$$

bei monatlichem Zuschlag  $K_1 = 10000 \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 12}\right)^{12}$

$$= 10616,78 \text{ Euro}$$

**Antwort:** Bei monatlichem Zuschlag ergibt sich ein um 16,78 Euro höherer Endbetrag.

Diese Wachstumsprozesse bezeichnet man als sprunghaftes Wachstum. Im Gegensatz dazu wächst z.B. der Holzbestand eines Waldes nicht sprunghaft sondern kontinuierlich. Um dieses kontinuierliche Wachstum mathematisch zu beschreiben, stellt man sich vor, dass die „Wachstumssprünge“ in immer kürzeren Zeiteinheiten erfolgen.

Zu untersuchen ist also, wie sich der Term  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n \cdot t}$  verhält, wenn  $t \rightarrow \infty$  geht.

Vereinfacht lautet der Term:  $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$

Die folgende Wertetabelle soll den Sachverhalt deutlich machen.

t	1	5	10	100	1000	10000
$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$	2	2,49...	2,59...	2,70...	2,716...	2,718...

Es wird deutlich, dass die Werte der Potenz  $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$  sich einem bestimmten Wert annähern.

**Diese Zahl heißt Eulersche Zahl und wird mit e bezeichnet. ( $e \approx 2,718281$ )**

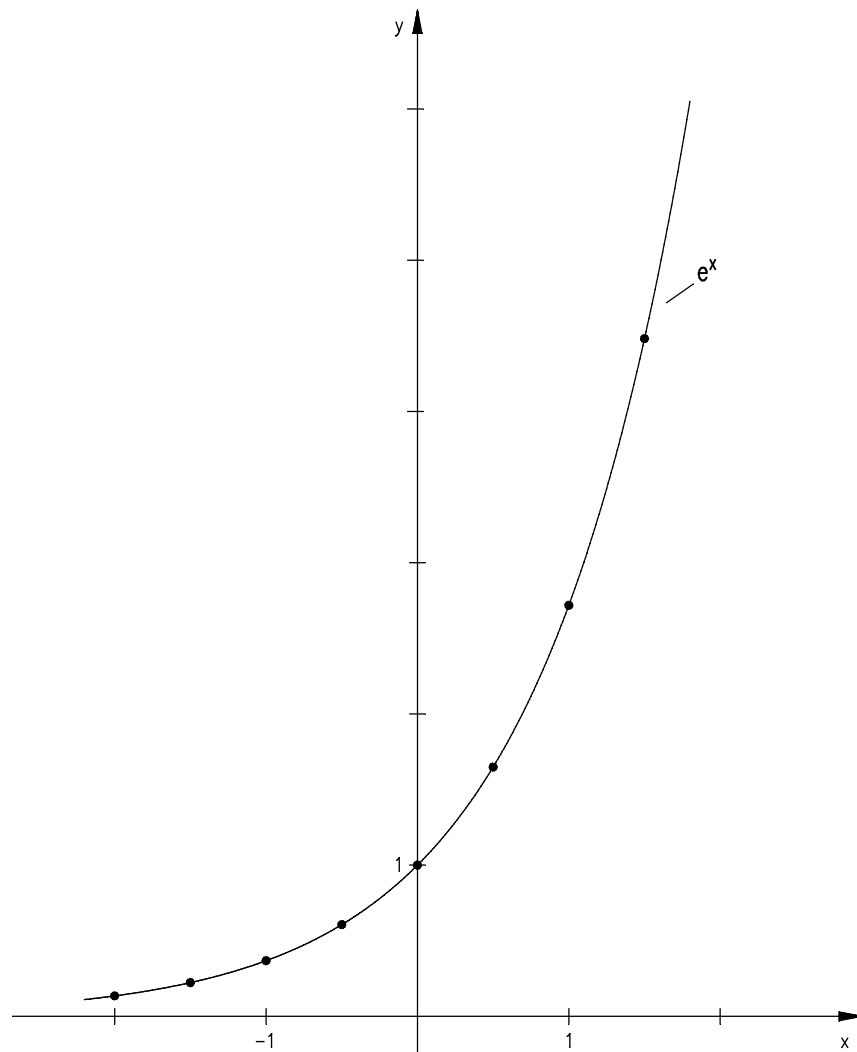
**Die Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis heißt natürliche Exponentialfunktion oder natürliche Wachstumsfunktion.**

### Lehrbeispiel 13

Zeichnen Sie den Grafen von  $f(x) = e^x$  für  $-3 \leq x \leq 2$  (Schrittweite 0,5)! Runden Sie auf zwei Nachkommastellen!

### Lösung

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	0,05	0,08	0,14	0,22	0,37	0,61	1	1,65	2,72	4,48	7,39

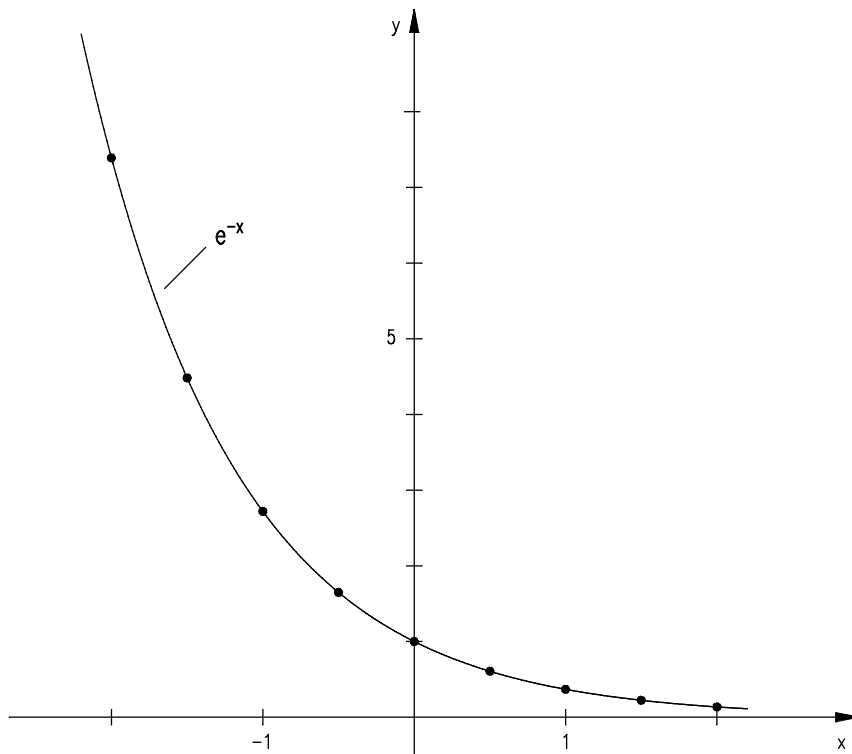


### Lehrbeispiel 14

Zeichnen Sie den Grafen von  $f(x) = e^{-x}$  für  $-2 \leq x \leq 2$  (Schrittweite 0,5)! Runden Sie auf zwei Nachkommastellen!

**Lösung**

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	7,39	4,48	2,72	1,65	1	0,61	0,37	0,22	0,14



Die Auf- und Entladevorgänge eines Kondensators (Ladungsspeicher elektrischer Energie) sind elektrotechnische Vorgänge, die sich mithilfe der e-Funktion beschreiben lassen.

Ein auf die Spannung  $U_0 = 100 \text{ V}$  aufgeladener Kondensator mit der Kapazität (Speicherfähigkeit)  $C = 100 \mu\text{F}$  wird in Reihe zu einem Widerstand  $R = 1 \text{ M}\Omega$  geschaltet. Zur Zeit  $t = 0 \text{ s}$  wird der Stromkreis über ein Strommessgerät (A) mithilfe des Schalters S geschlossen. Der Strom  $i(t)$  wird zu bestimmten Zeiten abgelesen.

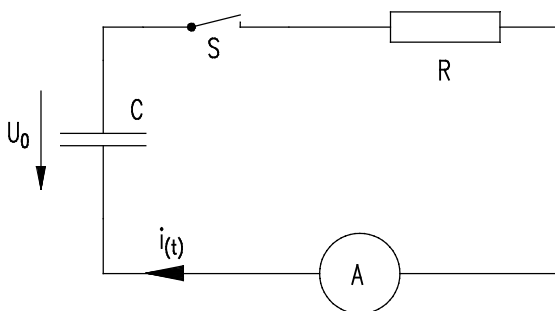
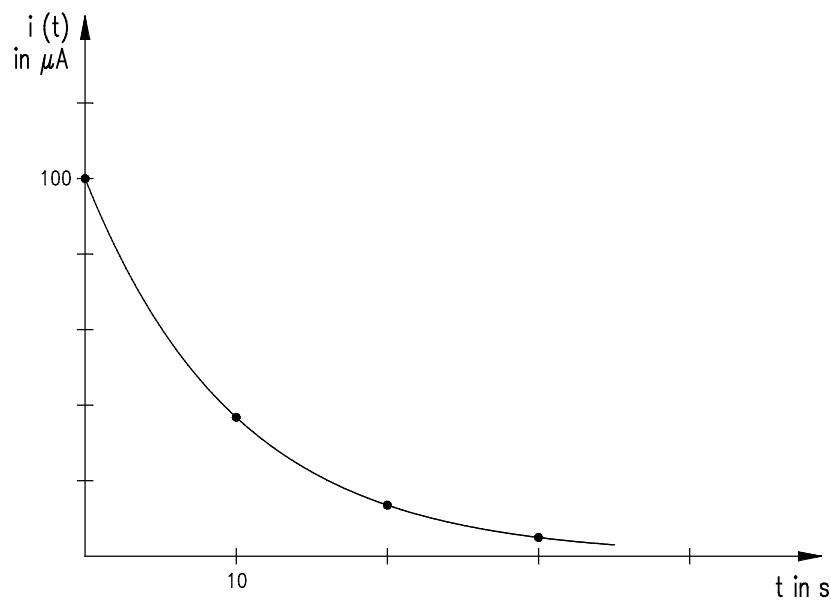


Abbildung 4 Kondensatorschaltung

Zeit t in s	0	1	10	11	20	30	40	50
Strom $i(t)$ in $\mu\text{A}$	100	90,5	36,8	33,3	13,6	5	1,84	0,68



Diese **Entladekurve eines Kondensators** wird durch die Gleichung  $i_{(t)} = i_0 e^{-t/T}$  beschrieben. Dabei ist  $T = R \cdot C$  die Zeitkonstante, in der der Kondensator um ungefähr 63 % abgesunken ist. Der Strom  $i_0$  berechnet sich aus  $U_0/R$ .

Die Entladezeit  $t_E$  eines Kondensators beträgt in der Praxis gleich 5 T:  $t_E = 5 T$ .

Da es aber mathematisch keinen Schnittpunkt mit der x-Achse geben kann, ist  $t_E$  theoretisch unendlich groß.

### Lehrbeispiel 15

*Berechnen Sie für die gegebenen Zeitpunkte den Entladestrom  $i_{(t)}$  eines Kondensators  $C = 10 \mu F$ ! Stellen Sie die Entladekurve grafisch dar! Überprüfen Sie die Zeitkonstante  $T$ !  $U_0 = 100 V$ ;  $R = 1 M\Omega$ !*

$t_{(0)}$  ( $t_1 = 5 s$ ;  $t_2 = 10 s$ ;  $t_3 = 15 s$ ;  $t_4 = 20 s$ ;  $t_5 = 30 s$ ;  $t_6 = 40 s$ ;  $t_7 = 50 s$ )

### Lösung

$$i_{(t)} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$T = R C = 10^6 \Omega \cdot 10 \cdot 10^{-6} F$$

$$= 10 s$$

$$i_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{100 V}{10^6 \Omega}$$

$$= 10^{-4} A = 100 \mu A$$

$$i_{(t)} = 100 \cdot 10^{-6} e^{-t/10 s} A$$

$$t_0 = 0 \text{ s: } i_0 = 100 \text{ } \mu\text{A}$$

$$t_1 = 5 \text{ s: } i_1 = 100 \text{ } \mu\text{A} \cdot e^{-5 \text{ s}/10 \text{ s}} = 60,7 \text{ } \mu\text{A}$$

$$t_2 = 10 \text{ s: } i_2 = 100 \text{ } \mu\text{A} \cdot e^{-10 \text{ s}/10 \text{ s}} = 36,8 \text{ } \mu\text{A}$$

$$t_3 = 15 \text{ s: } i_3 = 22,3 \text{ } \mu\text{A}$$

$$t_4 = 20 \text{ s: } i_4 = 13,5 \text{ } \mu\text{A}$$

$$t_5 = 30 \text{ s: } i_5 = 5 \text{ } \mu\text{A}$$

$$t_6 = 40 \text{ s: } i_6 = 1,8 \text{ } \mu\text{A}$$

$$t_7 = 50 \text{ s: } i_7 = 0,7 \text{ } \mu\text{A}$$

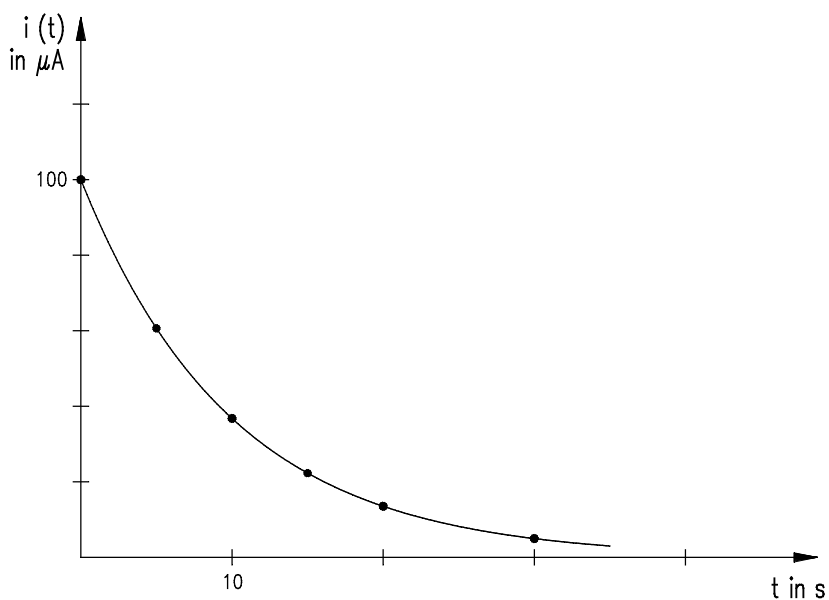
$$T = 10 \text{ s} \quad 5 T = 50 \text{ s} \quad i_7 = 0,7 \text{ } \mu\text{A}$$

**Antwort:** Nach etwa 5 T ist der Entladestrom nahezu Null.

63 % von  $100 \text{ } \mu\text{A} = 63 \text{ } \mu\text{A}$  : Nach  $T = 10 \text{ s}$  beträgt der Entladestrom  $i_2 = 36,8 \text{ } \mu\text{A}$ . Damit beträgt der Stromabfall gegenüber  $i_0$  ca. 63 %.

Der Aufladestrom eines Kondensators hat den gleichen Funktionsverlauf wie der Entladestrom. Lediglich der Anfangswert  $i_0$  unterscheidet sich vom Anfangswert des Entladevorgangs.

Entladekurve:



**Aufgaben**
Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Funktionsterm der Exponentialfunktion mit  $f(x) = a^x$ , deren Graf durch den Punkt  $P(-1;4)$  geht!

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion mit  $f(x) = k a^x$ , deren Graf die y-Achse in P schneidet und durch den Punkt Q geht!

$P(0;0,5)$  ;  $Q(2;0,02)$

Aufgabe 3

Ein Kapital von 100.000 € wird für 8 Jahre zum Zinssatz von 7 % angelegt. Die Zinsen werden am Ende eines Jahres dem Kapital gut geschrieben und im nächsten Jahr mitverzinst.

Berechnen Sie das Guthaben nach 8 Jahren!

Aufgabe 4

Arsen 74 hat eine Halbwertszeit von 18 Tagen.

Berechnen Sie die Restmenge Arsen, die nach 365 Tagen noch vorhanden ist, wenn zu Beginn 50 mg vorhanden sind!

Aufgabe 5

Der Luftdruck p nimmt mit wachsender Höhe ab. Dabei halbiert sich p jeweils nach 5 1/2 Kilometer Höhenunterschied.

Berechnen Sie den Luftdruck auf der Zugspitze ( $h = 2963$  m) wenn der Luftdruck auf Meereshöhe  $p_0 = 1000$  hPa beträgt!

Aufgabe 6

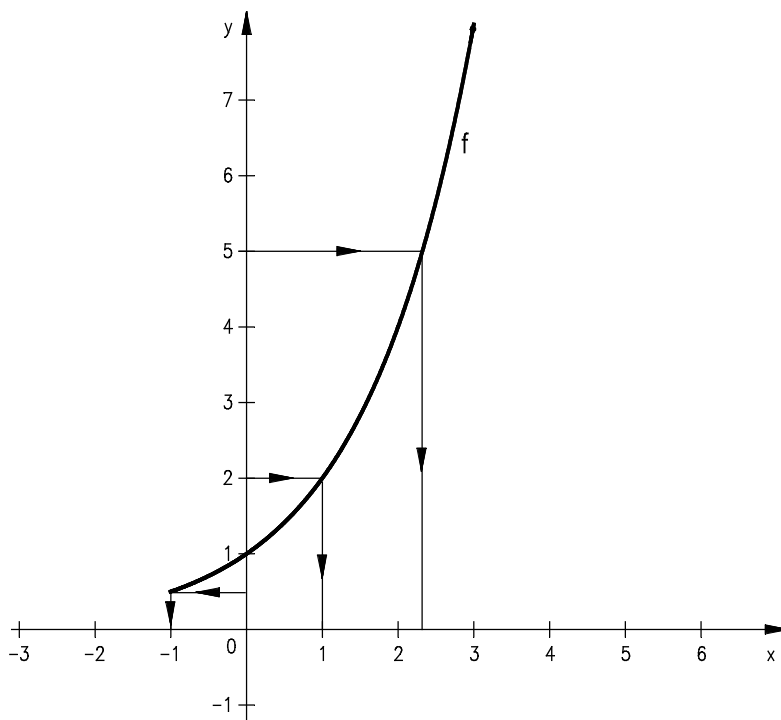
Ein Kondensator mit  $C = 1 \mu\text{F}$  ist auf die Spannung  $U_1 = 100$  V aufgeladen. Er wird über einen Widerstand  $R = 1 \text{ M}\Omega$  auf die Spannung  $U_0 = 200$  V aufgeladen.

Berechnen Sie den Strom nach  $t = 3/2$  T!

**5 Logarithmusfunktionen****Lernbereich****5.1 Logarithmensysteme**Lehrbeispiel 1

Geben Sie anhand des Grafen zu den in der Tabelle angegebenen y-Werten der Funktion  $f(x) = 2^x$  die zugehörigen x-Werte an!

x	-1								
y	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8

**Lösung**

x	-1	0	1	1,6	2	2,3	2,6	3
y	0,5	1	2	3	4	5	6	8

Wie die durch Ablesen gefundenen x-Werte rechnerisch bestimmt werden können, soll am Beispiel  $y = 8$  erklärt werden.

Gesucht wird diejenige Zahl, mit der die Basis 2 potenziert werden muss, um 8 zu erhalten.

**Diese gesuchte Zahl heißt Logarithmus von 8 zur Basis 2.**

$$f(x) = 2^x \quad f(x) = 8$$

$$2^x = 8$$

$$x = \log_2 8$$

$$x = 3$$

Probe:  $2^x = 8$   
 $2^3 = 8$  (w)

**Der Logarithmus von b zur Basis a ( $\log_a b$ ) ist der Exponent, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um b zu erhalten. Im Term  $\log_a b$  heißt b Numerus.**

Beispiele:  $\log_2 8 = 3$ , denn  $2^3 = 8$

$$\log_3 243 = 5, \text{ denn } 3^5 = 243$$

$$\log_{10} 10000 = 4, \text{ denn } 10^4 = 10000$$

$$\log_e 20 \approx 3, \text{ denn } e^3 \approx 20$$

### Lehrbeispiel 2

*Formen Sie jeweils die Gleichung mithilfe von Logarithmen um!*

$$11^2 = 121; \quad 0,5^x = 0,25; \quad a^y = b$$

### **Lösung**

$$11^2 = 121$$

$$\log_{11} 121 = 2$$

$$0,5^x = 0,25$$

$$\log_{0,5} 0,25 = x$$

$$a^y = b$$

$$\log_a b = y$$

### Lehrbeispiel 3

*Formen Sie in eine Exponentialgleichung um!*

$$5 = \log_2 32; \quad 3 = \log_{10} 1000; \quad x = \log_a 8$$

### **Lösung**

$$5 = \log_2 32$$

$$2^5 = 32$$

$$3 = \log_{10} 1000$$

$$10^3 = 1000$$

$$x = \log_a 8$$

$$a^x = 8$$



Lehrbeispiel 4

Bestimmen Sie den Logarithmus! Formen Sie dazu in die zugehörige Exponentialgleichung um!

$$y = \log_5 625$$

**Lösung**

$$y = \log_5 625$$

$$5^y = 625$$

$$5^y = 5^4$$

durch Exponentenvergleich ergibt sich:

$$y = 4$$

Lehrbeispiel 5

Bestimmen Sie den Logarithmus!

$$\log_{10} 1 ; \log_2 0,125 ; \log_{1/2} 1/4 ; \log_2 \sqrt[3]{4}$$

**Lösung**

$$\log_{10} 1 = x$$

$$10^x = 1$$

$$10^0 = 1$$

$$\log_{10} 1 = 0$$

$$\log_2 0,125 = x$$

$$2^x = 0,125$$

$$2^{-3} = 0,125$$

$$x = -3$$

$$\log_2 0,125 = -3$$

$$\log_{1/2} 1/4 = x$$

$$(1/2)^x = 1/4$$

$$(1/2)^2 = 1/4$$

$$x = 2$$

$$\log_{1/2} 1/4 = 2$$

$$\log_2 \sqrt[3]{4} = x$$

$$2^x = \sqrt[3]{4}$$

$$2^x = 4^{1/3}$$

$$2^x = (2^2)^{1/3}$$

$$2^x = 2^{2/3}$$

$$x = 2/3$$

$$\log_2 \sqrt[3]{4} = 2/3$$

Die Logarithmusfunktion  $g(x) = \log_2 x$  ordnet jedem Funktionswert von  $f(x) = 2^x$  wieder den x-Wert zu. Die Logarithmusfunktion  $g$  ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $f$ .

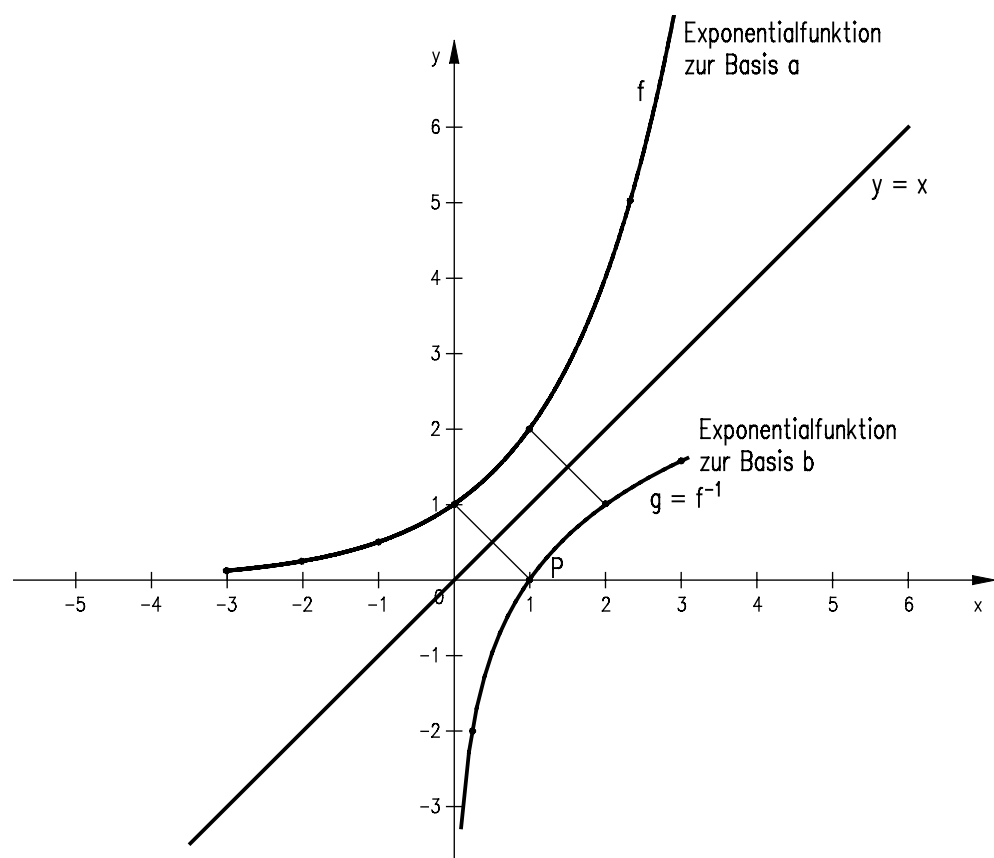
Funktion $f$	Umkehrfunktion $g$
$1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 2$
$3 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 3$
$x \rightarrow 2^x$	$2^x \rightarrow \log_2 2^x$

### Lehrbeispiel 6

Stellen Sie die Exponentialfunktion  $f(x) = 2^x$  und die Logarithmusfunktion  $g(x) = \log_2 x$  grafisch in einem Koordinatensystem dar ( $3 \leq x \leq 3$ )! Runden Sie auf die 2. Nachkommastelle!

### Lösung

x	-3	-2	-1	0	0,25	0,5	1	2	3
f(x)	0,13	0,25	0,5	1	1,19	1,41	2	4	8
g(x)					-2	-1	0	1	1,58



Die Funktion  $x \rightarrow \log_a x$ ,  $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0;1\}$  heißt **Logarithmusfunktion zur Basis a**. Sie ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$ ,  $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0;1\}$ .

Die **Definitionsmenge**  $D = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ; die Wertemenge ist die Menge aller reellen Zahlen:

$W = \mathbb{R}$ .

Der Graf der Logarithmusfunktion steigt monoton für  $a > 1$  und hat im Punkt  $P(1;0)$  einen Schnittpunkt mit der x-Achse. Beide Grafen sind **achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten ( $y = x$ )**.

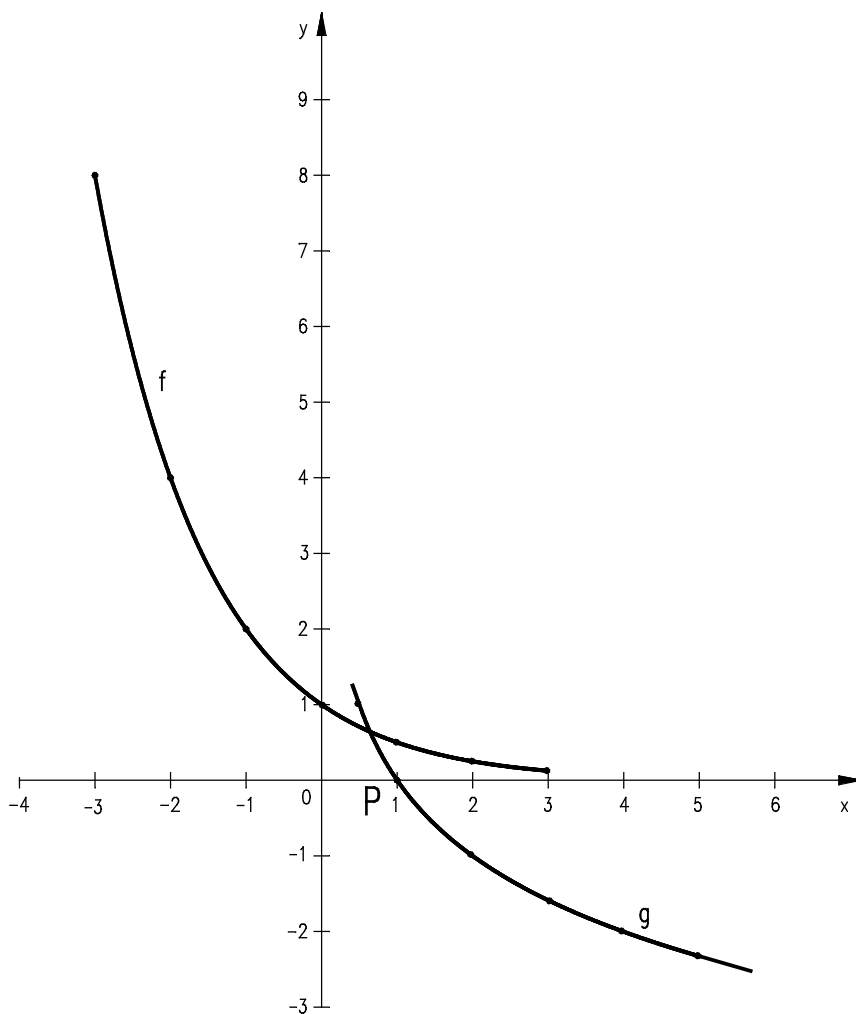
Lehrbeispiel 7

Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen  $f(x) = 0,5^x$  mit  $-3 \leq x \leq 3$  und  $g(x) = \log_{0,5} x$  mit  $x \leq 5$  (Schrittweite jeweils 0,5) in ein Koordinatensystem!

**Lösung**

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	8	5,66	4	2,83	2	1,41	1	0,71	0,5	0,35	0,25	0,18	0,13

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
g(x)	1	0	-0,58	-1	-1,32	-1,58	-1,81	-2	-2,17	-2,32



Der Graf der Logarithmusfunktion  $g(x) = \log_a x$  mit  $a < 1$  fällt monoton und hat im Punkt  $P(1;0)$  einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

### Lehrbeispiel 8

Bestimmen Sie zu der Exponentialfunktion  $f(x) = 1,5^x$  die Umkehrfunktion  $f^{-1}(x)$ !

### Lösung

$$f(x) = 1,5^x$$

$$y = 1,5^x$$

Auflösen nach x:  $x = \log_{1,5} y$

Umkehrfunktion:  $y = \log_{1,5} x$

**Logarithmen mit gleicher Basis bilden ein Logarithmensystem.** Zur Vereinfachung der Schreibweise hat man folgende Vereinbarungen getroffen:

- Logarithmen zur Basis 2:  $\log_2$  Kurzschreibweise: **ld** oder **lb** (Logarithmus dualis oder binärer Logarithmus)
- Logarithmus zur Basis e:  $\log_e$  Kurzschreibweise: **ln** (Natürlicher Logarithmus oder Logarithmus naturalis)
- Logarithmus zur Basis 10:  $\log_{10}$  Kurzschreibweise: **lg** (Zehnerlogarithmus oder dekadischer Logarithmus; auch Briggs'scher Logarithmus)

Mit der Formel  $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$  kann der Logarithmus zu jeder beliebigen Basis mithilfe von Zehnerlogarithmen berechnet werden.

Behauptung:  $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$

Beweis:  $y = \log_a x$

$$a^y = x$$

$$\lg(a^y) = \lg x$$

$$y \lg a = \lg x$$

$$y = \frac{\lg x}{\lg a}$$

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$$

Lehrbeispiel 9*Bestimmen Sie den Logarithmus mithilfe der Zehnerlogarithmen!*

$$\log_2 10$$

**Lösung**

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$$

$$\begin{aligned}\log_2 10 &= \frac{\lg 10}{\lg 2} \\ &\approx 3,3219\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}2^{3,3219} &= 10 \\ 9,9998 &\approx 10 \text{ (w)}\end{aligned}$$

In den folgenden Beispielen sollen die Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen bewiesen werden.

Behauptung:  **$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$** Beweis:  $y_1 = \log_a x_1 \quad y_2 = \log_a x_2$ 

$$a^{y_1} = x_1 \quad a^{y_2} = x_2$$

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= a^{y_1} \cdot a^{y_2} \\ &= a^{y_1 + y_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_a (x_1 \cdot x_2) &= y_1 + y_2 \\ &= \log_a x_1 + \log_a x_2\end{aligned}$$

Ebenso lässt sich herleiten:  **$\log_a \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$** 

Bei der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis werden die Exponenten addiert; so leitet sich das oben bewiesene Logarithmengesetz als Addition der Logarithmen ab. Bei der Division von Potenzen mit gleicher Basis werden die Exponenten subtrahiert. Somit ergibt sich das zweite Logarithmengesetz als Subtraktion der Logarithmen.

Behauptung:  **$\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x$** 

Beweis

$$\begin{aligned}\log_a (x^n) &= \log_a (\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n\text{-mal}}) \\ &= \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{n\text{-mal}} \\ &= n \cdot \log_a x\end{aligned}$$

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten folgende Gesetze:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x$$

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

mit  $x$ ;  $x_1$ ;  $x_2 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ;  $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0;1\}$ ;  $n \in \mathbb{R}$

#### Lehrbeispiel 10

Formen Sie mithilfe der Logarithmengesetze die Terme um!

10.1  $\lg (a^2 b c^4)$

10.2  $\lg \left( \frac{1}{x^2 \cdot y^2} \right)$

10.3  $\lg \left( \frac{1}{\sqrt{ab}} \right)$

#### **Lösung**

##### **Lehrbeispiel 10.1**

$$\lg (a^2 b c^4) = 2 \lg a + \lg b + 4 \lg c$$

##### **Lehrbeispiel 10.2**

$$\begin{aligned} \lg \left( \frac{1}{x^2 \cdot y^2} \right) &= \lg 1 - (2 \lg x + 2 \lg y) \\ &= \lg 1 - 2 \lg x - 2 \lg y \end{aligned}$$

##### **Lehrbeispiel 10.3**

$$\begin{aligned} \lg \left( \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) &= \lg 1 - (1/2 \lg a + 1/2 \lg b) \\ &= \lg 1 - 1/2 \lg a - 1/2 \lg b \end{aligned}$$

#### Lehrbeispiel 11

Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen!

11.1  $3 \lg a + 2 \lg b$

11.2  $\lg x^3 - 2 \lg \left( \frac{1}{x} \right)$

**Lösung****Lehrbeispiel 11.1**

$$3 \lg a + 2 \lg b = \lg (a^3 \cdot b^2)$$

**Lehrbeispiel 11.2**

$$\begin{aligned} \lg x^3 - 2 \lg \left( \frac{1}{x} \right) &= \lg \left( \frac{x^3}{\frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \lg \frac{x^3}{1 : x^2} \\ &= \lg x^5 \end{aligned}$$

Tritt die Lösungsvariable in einer Gleichung unter dem Logarithmus auf, heißt die Gleichung **logarithmische Gleichung**.

Da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist, muss zunächst die Definitionsmenge D bestimmt werden.

**Lehrbeispiel 12**

*Bestimmen Sie die Lösungsmenge!*

$$\log_2 (x - 3) = -1$$

**Lösung**

$$\begin{aligned} \log_2 (x - 3) = -1 \quad & \text{Definitionsmenge D: } x - 3 > 0 \\ & x > 3 \\ & D = \{ x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 3 \} \end{aligned}$$

Den Logarithmus kann man dadurch beseitigen, indem man die Basis (hier: 2) mit ihm potenziert.

$$2^{\log_2 (x-3)} = 2^{-1}$$

$$x - 3 = \frac{1}{2}$$

$$x = 3\frac{1}{2} \quad L = \{3\frac{1}{2}\}$$

### Lehrbeispiel 13

*Lösen Sie die Gleichung nach x auf!*

$$\lg x + \lg (x - 3) = 1$$

### **Lösung**

$$\lg x + \lg (x - 3) = 1 \quad D = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 3\}$$

Summen oder Differenzen von Logarithmen lassen sich mithilfe der Logarithmenetze zu einem Logarithmus zusammen fassen.

$$\begin{aligned} \lg [x \cdot (x - 3)] &= 1 \\ \lg (x^2 - 3x) &= 1 \end{aligned}$$

Der Zehnerlogarithmus von 10 ist 1:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= 10 \\ x^2 - 3x - 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,5 + \sqrt{2,25 + 10} & x_2 &= 1,5 - \sqrt{2,25 + 10} \\ x_1 &= 5 & x_2 &= -2 \quad x_2 \notin D \end{aligned}$$

$$L = \{5\}$$

### Lehrbeispiel 14

*Lösen Sie die logarithmische Gleichung nach x auf!*

$$\lg x + \frac{1}{3} \lg 8 = \frac{1}{2} \lg 4$$

### **Lösung**

$$\lg x + \frac{1}{3} \lg 8 = \frac{1}{2} \lg 4 \quad D = \{x \in \mathbb{R}_+; x > 0\}$$

$$\begin{aligned} \lg (x \cdot 8^{1/3}) &= \lg 4^{1/2} \\ \lg 2x &= \lg 2 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Probe: } \lg 1 + \frac{1}{3} \lg 8 = \frac{1}{2} \lg 4$$

$$0 + 0,3010 = 0,3010 \text{ (w)}$$



Lehrbeispiel 15*Lösen Sie die Gleichung! Lösungsvariable ist x!*

$$\lg x - 1/2 \lg (m + n) = -1/2 \lg (m - n)$$

**Lösung**

$$\lg x - 1/2 \lg (m + n) = -1/2 \lg (m - n)$$

$$\lg \frac{x}{(m+n)^{1/2}} = \lg (m-n)^{-1/2}$$

$$\lg \frac{x}{\sqrt{m+n}} = \lg \frac{1}{\sqrt{m-n}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{m+n}} = \frac{1}{\sqrt{m-n}}$$

$$x = \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}} = \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$$

Lehrbeispiel 16*Bestimmen Sie die Lösungsmenge!*

$$x^{\lg x} = 10$$

**Lösung**

$$x^{\lg x} = 10 \quad D = \mathbb{R}_+$$

Hier tritt die Lösungsvariable x sowohl in der Basis als auch im Exponenten auf. Daher muss die Gleichung logarithmiert werden.

$$\lg x^{\lg x} = \lg 10$$

$$\lg x \cdot \lg x = 1$$

$$(\lg x)^2 = 1$$

$$\lg x = 1 \vee \lg x = -1$$

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 0,1$$

$$\text{Probe für } x_1 = 10 \quad x_1^{\lg x_1} = 10 \quad \text{für } x_2 = 0,1 \quad 0,1^{\lg 0,1} = 10 \quad 0,1^{-1} = 10 \quad (w)$$

$$L = \{10; 0,1\}$$

## 5.2 Exponentialgleichungen

Eine **Gleichung heißt algebraisch**, wenn sie in die **Polynomform**

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0 = 0$$

umgeformt werden kann. Tritt die Lösungsvariable im Exponenten einer Potenz auf, gelingt dies nicht. Diese Gleichungen nennt man **transzendente Gleichungen**.

### Lehrbeispiel 1

*Bestimmen Sie die Lösungsmenge! Runden Sie auf vier Nachkommastellen!*

$$6^x = 330$$

### **Lösung**

Im ersten Lösungsschritt werden beide Seiten der Gleichung logarithmiert.

$$\lg(6^x) = \lg 330$$

Nach den Rechengesetzen der Logarithmen ergibt sich im zweiten Lösungsschritt:

$$x \lg 6 = \lg 330$$

Im dritten Lösungsschritt wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$$x = \frac{\lg 330}{\lg 6} \approx 3,2365$$

$$\text{Probe: } 6^{3,2365} = 330$$

$$329,98 \approx 330 \text{ (w)} \quad L = \{3,2365\}$$

### Lehrbeispiel 2

*Bestimmen Sie die Lösungsmenge!*

$$2 \cdot 1,5^x = 100$$

### **Lösung**

$$2 \cdot 1,5^x = 100 \quad | : 2$$

$$1,5^x = 50$$

$$\lg(1,5^x) = \lg 50$$

$$x \lg 1,5 = \lg 50 \quad | : \lg 1,5$$

$$x = \frac{\lg 50}{\lg 1,5} \approx 9,6482$$

$$\text{Probe: } 2 \cdot 1,5^{9,6482} = 100$$

$$99,998 \approx 100 \text{ (w)} \quad L = \{9,6482\}$$

Lehrbeispiel 3*Bestimmen Sie die Lösungsmenge!*

$$0,5^{x-1} = 20$$

**Lösung**Die Differenz im Exponenten  $x - 1$  zur Basis 0,5 bedeutet umgeschrieben:

$$0,5^x : 0,5 \quad (\text{Potenzgesetz: Subtraktion der Exponenten}).$$

Demnach kann die Gleichung auch so geschrieben werden:

$$\frac{1}{0,5} \cdot 0,5^x = 20$$

$$2 \cdot 0,5^x = 20 \quad |: 2$$

$$0,5^x = 10$$

$$\lg(0,5^x) = \lg 10$$

$$x \lg 0,5 = \lg 10 \quad |: \lg 0,5$$

$$x \approx -3,3219$$

$$\text{Probe: } 0,5^{-3,3219-1} = 20$$

$$0,5^{-4,3219} = 20$$

$$19,99 \approx 20 \text{ (w)} \quad L = \{-3,3219\}$$

Lehrbeispiel 4*Lösen Sie die Exponentialgleichung!*

$$8^{x+5} \cdot 3^{x-5} = 25$$

**Lösung**

$$8^{x+5} \cdot 3^{x-5} = 25$$

$$\lg(8^{x+5}) + \lg(3^{x-5}) = \lg 25$$

$$(x+5) \lg 8 + (x-5) \lg 3 = \lg 25$$

$$x \lg 8 + 5 \lg 8 + x \lg 3 - 5 \lg 3 = \lg 25$$

$$x \lg 8 + x \lg 3 = \lg 25 - 5 \lg 8 + 5 \lg 3$$

$$x (\lg 8 + \lg 3) = \lg 25 - 5 \lg 8 + 5 \lg 3$$

$$x = \frac{\lg 25 - 5 \lg 8 + 5 \lg 3}{\lg 8 + \lg 3} \approx -0,5303$$

$$\text{Probe: } 8^{-0,5303+5} \cdot 3^{-0,5303-5} = 25$$

$$8^{4,467} \cdot 3^{-5,5303} = 25$$

$$24,8587 \approx 25 \text{ (w)} \quad L = \{-0,5303\}$$

### Lehrbeispiel 5

*Bestimmen Sie die Lösungsmenge!*

$$2^{x+1} + 2^{x+2} = 3$$

### **Lösung**

Da hier auf der linken Seite der Gleichung eine Summe vorliegt, kann nicht direkt logarithmiert werden. Im ersten Lösungsschritt muss zunächst die Summe beseitigt werden.

$$2^{x+1} + 2^{x+2} = 3$$

$$2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 = 3$$

$$2^x(2 + 4) = 3 \quad | :6$$

$$2^x = 1/2$$

$$\lg(2^x) = \lg 1/2$$

$$x \lg 2 = \lg 1/2$$

$$x = \frac{\lg 1/2}{\lg 2} = -1$$

Probe:  $2^{-1+1} + 2^{-1+2} = 3$

$$1 + 2 = 3 \text{ (w)} \quad L = \{-1\}$$

### Lehrbeispiel 6

*Lösen Sie die Gleichung!*

$$3^{2x+1} - 2^{x+1} = 2^{x+2} - 9^{x+1}$$

### **Lösung**

Auch wenn die Potenzen unterschiedliche Basen haben, sind zunächst einmal die Summen zu beseitigen. Im ersten Lösungsschritt müssen die Basen aber noch vereinfacht werden.

$$3^{2x+1} - 2^{x+1} = 2^{x+2} - 9^{x+1}$$

$$3^{2x+1} - 2^{x+1} = 2^{x+2} - (3^2)^{x+1}$$

Im zweiten Lösungsschritt werden die Gleichungsseiten je nach Basis geordnet.

$$3^{2x+1} + (3^2)^{x+1} = 2^{x+2} + 2^{x+1}$$

$$3^{2x+1} + 3^{2x+2} = 2^{x+2} + 2^{x+1}$$

$$3^{2x} \cdot 3 + 3^{2x} \cdot 3^2 = 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2$$

Aus den Summen werden wieder Produkte gemacht.

$$3^{2x}(3 + 3^2) = 2^x(2^2 + 2)$$

$$12 \cdot 3^{2x} = 6 \cdot 2^x \quad | :6$$

$$2 \cdot 3^{2x} = 2^x$$

Jetzt kann die Gleichung logarithmiert werden.

$$\lg 2 + 2x \lg 3 = x \lg 2$$

$$2x \lg 3 - x \lg 2 = -\lg 2$$

$$x (2 \lg 3 - \lg 2) = -\lg 2$$

$$x = \frac{-\lg 2}{2 \lg 3 - \lg 2} \approx -0,461$$

$$L = \{-0,461\}$$

### Lehrbeispiel 7

*Bestimmen Sie die Lösungsmenge!*

$$3^x + 3^{1-x} - 4 = 0$$

### **Lösung**

$$3^x + 3^{1-x} - 4 = 0$$

$$3^x + \frac{3}{3^x} - 4 = 0$$

Hier wird deutlich, dass die Summe nicht beseitigt werden kann. Es wird eine **Substitution** durchgeführt.

$$3^x = u$$

Dann ergibt sich folgende Gleichung:

$$u + \frac{3}{u} - 4 = 0 \quad | \cdot u$$

$$u^2 + 3 - 4u = 0$$

$$\begin{array}{ll} u_1 = 2 + \sqrt{4-3} & u_2 = 2 - \sqrt{4-3} \\ u_1 = 3 & u_2 = 1 \end{array}$$

Die Substitution wird nach Lösen der quadratischen Gleichung rückgängig gemacht.

$$\begin{array}{ll} 3^{x_1} = 3 & 3^{x_2} = 1 \\ x_1 = 1 & x_2 = 0 \end{array}$$

$$\text{Probe: für } x_1 = 1 \quad 3^1 + 3^0 - 4 = 0$$

$$3 + 1 - 4 = 0 \quad (w)$$

$$\text{für } x_2 = 0 \quad 3^0 + 3^1 - 4 = 0$$

$$1 + 3 - 4 = 0 \quad (w) \quad L = \{1; 0\}$$

### Lehrbeispiel 8

Ein Kapital von 10000 € wird jährlich zu einem Zinssatz von 3,5 % verzinst. Die Zinsen werden jeweils am Ende eines Jahres gut geschrieben und im folgenden Jahr mit verzinst.

*Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich das Anfangskapital verdoppelt hat!*

### Lösung

$$K_0 = 10000 \text{ €} \quad K_n = 20000 \text{ €}$$

$$K_n = K_0 q^n \quad | : K_0$$

$$q^n = \frac{K_n}{K_0}$$

$$\lg(q^n) = \lg K_n - \lg K_0$$

$$n \lg q = \lg K_n - \lg K_0 \quad | : \lg q$$

$$n = \frac{\lg K_n - \lg K_0}{\lg q} = \frac{\lg 20000 - \lg 10000}{\lg 1,035}$$

$$n \approx 20,15$$

**Antwort:** Nach ca. 20 Jahren hat sich das Anfangskapital verdoppelt.

### Lehrbeispiel 9

Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren noch ein Zehntel der Ausgangsmenge von 500 Milligramm vom radioaktiven Stoff Polonium 210 vorhanden ist! Die Halbwertszeit beträgt 138 Tage.

### Lösung

Ausgangsmenge  $N_0 = 500 \text{ mg}$

Halbwertszeit  $T = 138 \text{ Tage}$

Restmenge  $N_{(t)} = 50 \text{ mg}$

$$N_{(t)} = N_0 \cdot 0,5^{t/T} \quad | : N_0$$

$$0,5^{t/T} = \frac{N_{(t)}}{N_0}$$

$$\lg(0,5^{t/T}) = \lg(N_{(t)} / N_0)$$

$$t/T \lg 0,5 = \lg N_{(t)} - \lg N_0 \quad | : \lg 0,5$$

$$t/T = \frac{\lg N_{(t)} - \lg N_0}{\lg 0,5}$$

$$t/T = \frac{\lg 50 - \lg 500}{\lg 0,5}$$

$$t/T \approx 3,322$$

$$t = 3,322 \cdot T$$

$$t = 458,436$$

**Antwort:** Nach ca. 459 Tagen ist noch eine Restmenge von 50 mg Polonium 210 vorhanden.

Aufgabe 1

Formen Sie die Exponentialgleichung mithilfe von Logarithmen um!

1.1  $a^y = 100$

1.2  $3^x = 81$

Aufgabe 2

Formen Sie in eine Exponentialgleichung um!

2.1  $1 = \log_5 5$

2.2  $y = \log_a b$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Logarithmus!

3.1  $y = \log_8 64$

3.2  $\log_4 256$

3.3  $\log_{0,4} 0,16$

3.4  $\log_{1/2} 2$

3.5  $\log_2 \sqrt[5]{16}$

Aufgabe 4

Formen Sie mithilfe der Logarithmengesetze um!

4.1  $\lg(a^2 / b)$

4.2  $\lg(1/3 \cdot q^2)$

4.3  $\lg \sqrt{a^3 b^5}$

4.4  $\lg \sqrt[3]{a^2 \cdot b / c^2}$

Aufgabe 5

Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen!

5.1  $5 \lg p - 2 \lg q$

5.2  $1/5 \lg(xy) - 3/4 \lg(x^2 y)$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

6.1  $1/3 \lg 4 + 2 \lg x = 1/3 \lg 16$

6.2  $\lg(p - q) = \lg(p^2 - q^2) - 1/2 \lg x$

**Aufgaben**

### Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Logarithmus mithilfe des Zehnerlogarithmus!

7.1  $\log_8 36$

7.2  $\log_2 10$

### Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

8.1  $1,5^x = 32$

8.2  $4 \cdot 3,8^x = 160$

8.3  $3^{x+2} - 3^x = 8$

8.4  $5^x + 6^x = 6^{x+1}$

8.5  $4^{x-2} + 4 \cdot 4^{2-x} = 5$

### Aufgabe 9

Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren noch eine Restmenge von 1 Milligramm Plutonium 238 einer Anfangsmenge von 10 mg vorhanden ist!

Plutonium hat eine Halbwertszeit von 86 Jahren.

**Realisierung  
Komplexaufgabe  
„Bevölkerungs-  
wachstum“**

In der Tabelle ist die Bevölkerungsentwicklung eines Landes dargestellt. Legen Sie für die Berechnungen die Annahme zu Grunde, dass die Bevölkerungsentwicklung mit einer Exponentialfunktion der Form  $f(x) = k a^x$  beschrieben werden kann.

1.1 Berechnen Sie die Funktionsgleichung für das Bevölkerungswachstum!

1.2 Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Bevölkerung jährlich gewachsen ist!

1.3 Berechnen Sie die Einwohnerzahlen für die Jahre 2010 und 2020 bei gleichbleibender Zuwachsrate!

Jahr	Bevölkerung
1980	5 650 000
1985	6 268 696
1990	6 955 140
1995	7 716 754
2000	8 561 766

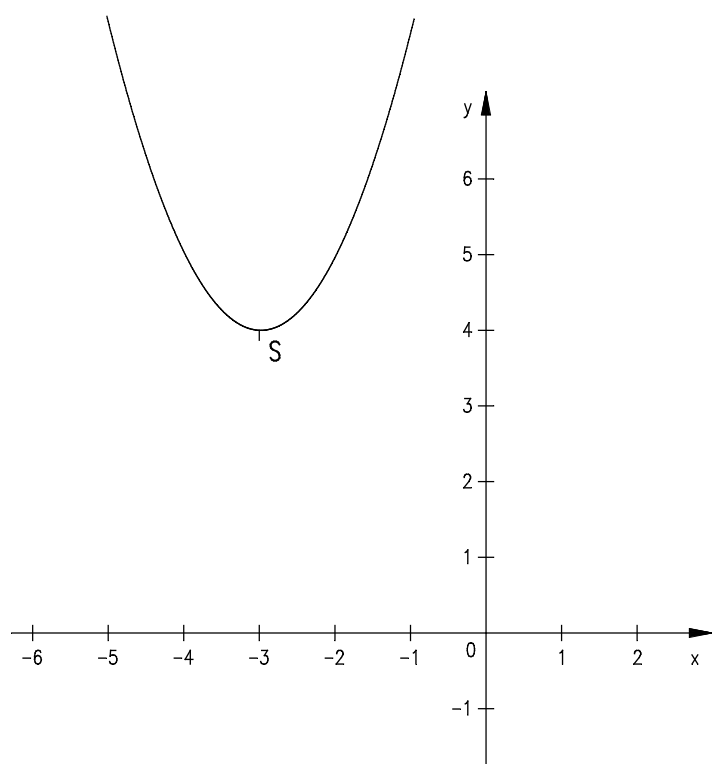


**Lösungsanhang****Lösungen****1 Quadratische Funktionen****Aufgabe 1.1**

$$S(-3;4) \quad f(x) = (x + 3)^2 + 4$$
$$f(x) = x^2 + 6x + 13$$

Funktion hat keine Nullstellen!

Kontrollzeichnung:

**Aufgabe 1.2**

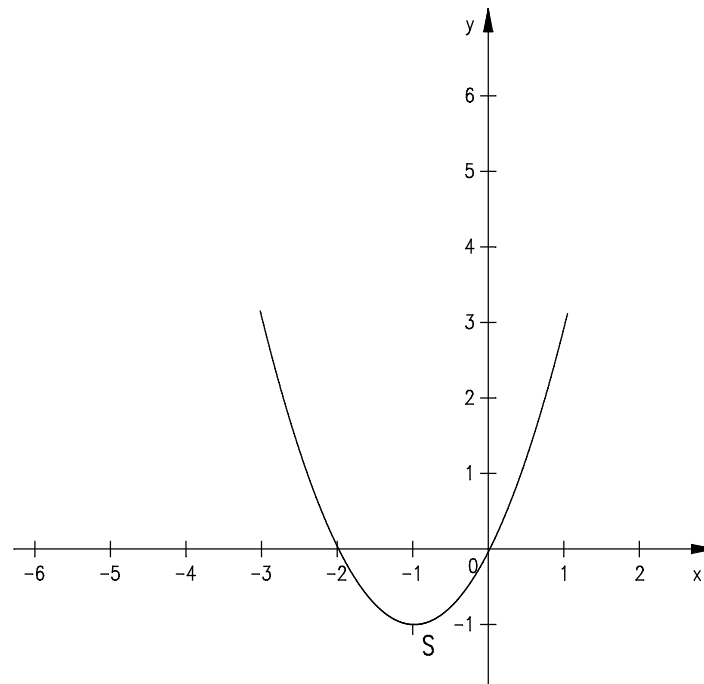
$$S(-1;-1) \quad f(x) = (x + 1)^2 - 1$$
$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

Kontrollzeichnung:



### Aufgabe 2

$$f(x) = (x - 30)^2 - 21 \quad P(27; -12)$$

$$-12 = (27 - 30)^2 - 21$$

$$-12 = 9 - 21 \quad (w)$$

Der Punkt P liegt auf dem Grafen der Funktion.

$$Q(30; -21)$$

$$-21 = (30 - 30)^2 - 21$$

$$-21 = 0 - 21 \quad (w)$$

Der Punkt Q liegt auf dem Grafen der Funktion.

### Aufgabe 3.1

$$f(x) = x^2 + 0,5x + 1,5$$

$$f(x) = (x + 0,25)^2 + 1,4375$$

An der Stelle  $x = -0,25$  nimmt die Funktion mit  $f(x) = 1,4375$  den kleinsten Wert an.

### Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2 - 2,5x + 6,25$$

$$f(x) = (x - 1,25)^2 + 4,6875$$

An der Stelle  $x = 1,25$  nimmt die Funktion mit  $f(x) = 4,6875$  den kleinsten Wert an.

**Aufgabe 4.1**

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 6$$

$$f(x) = -2(x^2 - 2x) + 6$$

$$f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$$

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(1; 8)$ .

**Aufgabe 4.2**

$$f(x) = -1/2x^2 - x - 5/4$$

$$f(x) = -1/2 (x^2 + 2x) - 5/4$$

$$f(x) = -1/2 (x + 1)^2 - 3/4$$

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(-1; -3/4)$ .

**Aufgabe 5**

$$m + n = 12$$

$$n = 12 - m$$

$$m \cdot n = m (12 - m)$$

$$m \cdot n = 12m - m^2$$

$$-(m^2 - 12m) = m \cdot n$$

$$-[(m - 6)^2 - 36] = m \cdot n$$

$$-(m - 6)^2 + 36 = m \cdot n \quad S(6; 36)$$

Bei  $m = 6$  und  $n = 6$  wird das Produkt am größten:  $6 \cdot 6 = 36$ .

**Aufgabe 6.1**

$$x^2 - 16/25 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{16/25} = 4/5 \quad x_2 = -\sqrt{16/25} = -4/5$$

$$L = \{4/5; -4/5\}$$

**Aufgabe 6.2**

$$2,5x^2 - 12,5 = 0$$

$$x^2 = 5$$

$$x_1 = \sqrt{5} \quad x_2 = -\sqrt{5}$$

$$L = \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$$

**Aufgabe 6.3**

$$1/3x^2 + 2/3x = 0$$

$$x\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

$$L = \{0; -2\}$$

**Aufgabe 6.4**

$$x^2 + 0,2x + 0,01 = 1,69$$

$$(x + 0,1)^2 = 1,69$$

$$x_1 = -0,1 + \sqrt{1,69} \quad x_2 = -0,1 - \sqrt{1,69}$$

$$x_1 = 1,2 \quad x_2 = -1,4$$

$$L = \{1,2; -1,4\}$$

**Aufgabe 6.5**

$$1/2x^2 + 4x = -8$$

$$x^2 + 8x = -16$$

$$(x + 4)^2 = 0$$

$$x = -4$$

$$L = \{-4\}$$

**Aufgabe 7.1**

$$x^2 + 0,5x = 0,36$$

$$x^2 + 0,5x - 0,36 = 0 \quad p = 0,5 \quad q = -0,36 \quad D > 0 : 2 \text{ Lösungen}$$

$$x_1 = -0,25 + \sqrt{0,0625 + 0,36} \quad x_2 = -0,25 - \sqrt{0,0625 + 0,36}$$

$$x_1 = 0,4 \quad x_2 = -0,9$$

$$L = \{0,4; -0,9\}$$

**Aufgabe 7.2**

$$x^2 + 5x + 6,25 = 0 \quad p = 5 \quad q = 6,25 \quad D = 0 : 1 \text{ Lösung}$$

$$x = -2,5$$

$$L = \{-2,5\}$$

**Aufgabe 7.3**

$$x^2 - 2,5x = -2$$

$$x^2 - 2,5x + 2 = 0 \quad p = -2,5 \quad q = 2 \quad D < 0 : \text{keine Lösung}$$

$$L = \{ \}$$

**Aufgabe 8.1**

$$0,4x^2 - 5x = -10$$

$$0,4x^2 - 5x + 10 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 16}}{0,8} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{25 - 16}}{0,8}$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 2,5$$

$$L = \{10; 2,5\}$$

**Aufgabe 8.2**

$$4(x + 3)(x - 2) = 7(x + 4)(x - 3)$$

$$3x^2 + 3x - 60 = 0$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 720}}{6} \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 + 720}}{6}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -5$$

$$L = \{4; -5\}$$

**Aufgabe 9.1**

$$\frac{x-5}{3} - \frac{x+8}{x} + \frac{8}{x} = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x(x-5) - (x+8)3 + 24 = 0$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 8$$

$$L = \{8\}$$

**Aufgabe 9.2**

$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{22-7x}{2-x} - \frac{6x-6}{3x^2-12} = 0$$

$$\frac{2x-1}{x+2} + \frac{22-7x}{x-2} - \frac{6x-6}{3(x^2-4)} = 0$$

$$3(2x^2 - 5x + 2) + 3(-7x^2 + 8x + 44) - 6x + 6 = 0$$

$$-15x^2 + 3x + 144 = 0$$

$$x_1 = 3,2 \quad x_2 = -3$$

$$L = \{3,2; -3\}$$

### Aufgabe 10.1

$$L = \{-2; 5\} \quad (x + 2)(x - 5) = 0 \quad \begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2) \\ p &= -(-2 + 5) = -3 \\ q &= x_1 \cdot x_2 \\ &= -2 \cdot 5 = -10 \end{aligned}$$

Normalform:  $x^2 - 3x - 10 = 0$

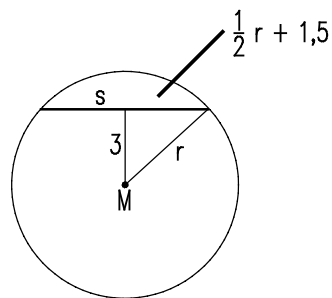
### Aufgabe 10.2

$$L = \{4\} \quad (x - 4)(x - 4) = 0 \quad \begin{aligned} p &= -8 \\ q &= 16 \end{aligned}$$

Normalform:  $x^2 - 8x + 16 = 0$

### Aufgabe 11

$$D = \{r \in \mathbb{R}; r > 0\}$$



$$\begin{aligned} r^2 &= (1/2 r + 1,5)^2 + 3^2 \\ 0 &= r^2 - 2r - 15 \\ r &= 1 + \sqrt{1+15} = 5 \\ s &= 8 \end{aligned}$$

Der Radius  $r$  beträgt 5 cm, die Sehne ist 8 cm lang.

### Aufgabe 12

$$f(x) = 1/4 x^2 + 1/2 x - 2$$

$$x_1 = \frac{-1/2 + \sqrt{1/4 + 2}}{2/4} \quad x_2 = \frac{-1/2 - \sqrt{1/4 + 2}}{2/4} \quad \text{für } x = 0: f(x) = -2$$

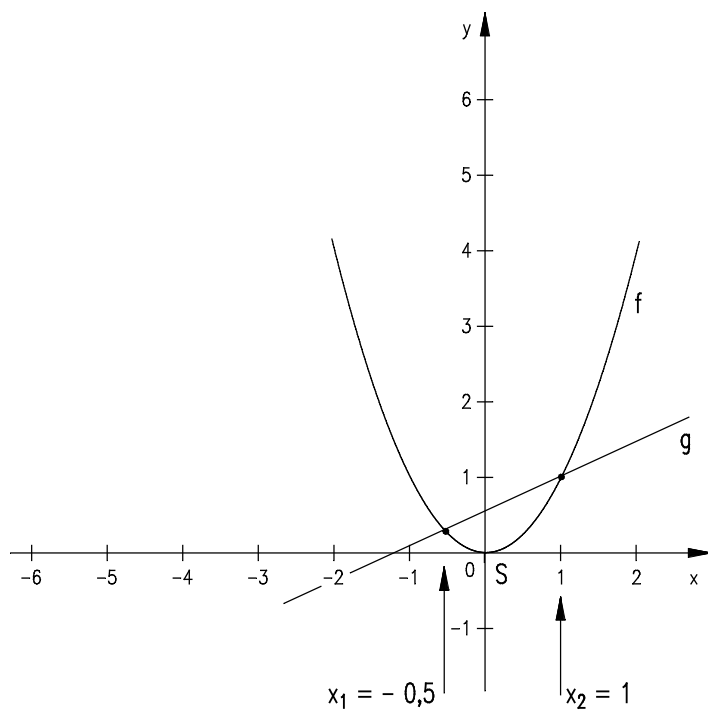
$$x_1 = 2 \quad x_2 = -4$$

$$L = \{2; -4\}$$

### Aufgabe 13

$$x^2 - 1/2 x - 1/2 = 0$$

$$x^2 = 1/2 x + 1/2 \quad f(x) = x^2 \quad g(x) = 1/2 x + 1/2$$

**Aufgabe 14**

$$f(x) = x^2 + 3x - 3 \quad g(x) = -2,5x + 2,5$$

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 5,5x - 5,5 = 0$$

$$x_1 = 0,864 \quad x_2 = -6,36$$

$$P: x_1 = 0,864 \quad g(x) = -2,5 \cdot 0,864 + 2,5 = 0,34 \quad P(0,864 ; 0,34)$$

$$Q: x_2 = -6,36 \quad g(x) = -2,5 \cdot (-6,36) + 2,5 = 18,4 \quad Q(-6,36 ; 18,4)$$

**Aufgabe 15**

$$f(x) = -0,5x^2 - 4x - 6 \quad g(x) = 2x^2 + 12x + 14$$

$$f(x) = g(x)$$

$$-2,5x^2 - 16x - 20 = 0$$

$$x_1 = -1,7 \quad x_2 = -4,7$$

$$P: x_1 = -1,7 \quad g(x) = 2(-1,7)^2 + 12(-1,7) + 14 = -0,62 \quad P(-1,7; -0,62)$$

$$x_2 = -4,7 \quad g(x) = 2(-4,7)^2 + 12(-4,7) + 14 = 1,78 \quad Q(-4,7; 1,78)$$

**Aufgabe 16**

$$g(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \text{für } P(0; ) \quad g(0) = 2 \quad P(0;2)$$

$$\quad \quad \quad \text{für } Q(5; ) \quad g(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 + 2 = 17 \quad Q(5;17)$$

$$f_c(x) = mx + c \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{17 - 2}{5 - 0} = 3$$

$$f_c(x) = 3x + c \quad \text{für } P: \quad \begin{aligned} 2 &= 3 \cdot 0 + c \\ 2 &= c \end{aligned}$$

$$f_c(x) = 3x + 2$$

**2 Wurzelfunktionen**
**Aufgabe 1.1**

$$f(x) = 2\sqrt{x}$$

$$y = 2\sqrt{x}$$

$$y^2 = 4x$$

$$x = \frac{y^2}{4}$$

$$f^{-1}(x) = 1/4 x^2$$

**Aufgabe 1.2**

$$f(x) = -\sqrt[4]{x}$$

$$y^4 = [-(x^{\frac{1}{4}})]^4$$

$$y^4 = x$$

$$y = x^{\frac{1}{4}}$$

$$f^{-1}(x) = x^4$$

**Aufgabe 2.1**

$$\sqrt{13 - 4x} + x = 2 \quad D = \{x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{13}{4}\}$$

$$(\sqrt{13 - 4x})^2 = (2 - x)^2$$

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

Probe:

$$\text{für } x_1 = 3 \quad \sqrt{13 - 12} + 3 = 2 \quad (f)$$

$$\text{für } x_2 = -3 \quad \sqrt{13 + 12} - 3 = 2 \quad (w)$$

$$L = \{-3\}$$



**Aufgabe 2.2**

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = 4 \quad D = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}$$

$$(\sqrt{x+6})^2 = (4 - \sqrt{x-2})^2$$

$$1 = \sqrt{x-2}$$

$$x = 3$$

Probe:

$$\sqrt{3+6} + \sqrt{3-2} = 4 \quad (w)$$

$$L = \{3\}$$

**Aufgabe 2.3**

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+8}$$

$$x + 2\sqrt{x} \sqrt{x+3} + x+3 = x+8$$

$$(2\sqrt{x} \sqrt{x+3})^2 = (5-x)^2$$

$$3x^2 + 22x - 25 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{50}{6} \quad x_2 \notin D$$

Probe:

$$\sqrt{1} + \sqrt{1+3} = \sqrt{1+8} \quad (w)$$

$$L = \{1\}$$

**Aufgabe 2.4**

$$2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-6} = -\sqrt{x-14}$$

$$4(x+1) - 12\sqrt{x+1}\sqrt{x-6} + 9(x-6) = x-14$$

$$x-3 = \sqrt{x+1}\sqrt{x-6}$$

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 5x - 6$$

$$x = 15$$

Probe:

$$2\sqrt{15+1} - 3\sqrt{15-6} = -\sqrt{15-14} \quad (w)$$

$$L = \{15\}$$

**Aufgabe 2.5**

$$\frac{4\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} - \frac{4(5-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - 15 = 0 \quad D = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x; x \neq 25\}$$

$$4\sqrt{x} \sqrt{x} - 4(5-\sqrt{x})(5-\sqrt{x}) - 15\sqrt{x}(5-\sqrt{x}) = 0$$

$$4x - 4(25 - 10\sqrt{x} + x) - 75\sqrt{x} + 15x = 0$$

$$15x - 100 - 35\sqrt{x} = 0$$

$$9x^2 - 169x + 400 = 0$$

$$x_1 = \frac{169 + \sqrt{28561 - 14161}}{18}$$

$$x_1 = 16 \quad x_2 = 25/9$$

$$L = \{16\}$$

**Aufgabe 2.6**

$$\sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \quad D = \mathbb{R}$$

$$x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$L = \{1\}$$

**Aufgabe 3.1**

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{a+b} = \sqrt{b-x} \quad x \geq -a; x \leq b$$

$$a+x = a+b + 2\sqrt{a+b}\sqrt{b-x} + b-x$$

$$x^2 - bx + ax - ab = 0$$

$$x^2 + x(a-b) - ab = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2 + 4ab}{2^2}}$$

$$x_1 = b \quad x_2 = -a$$

$$L = \{b\}$$

**Aufgabe 3.2**

$$\sqrt{(a+b)x} = \sqrt{a^2 - b^2} \quad D = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$$

$$x(a+b) = a^2 - b^2$$

$$x = a - b$$

$$L = \{a - b\}$$

**Aufgabe 4**

$$(I) \quad 4\sqrt{x} - 12 = 3\sqrt{y} - 7$$

$$(II) \quad 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 5\sqrt{y} + 11$$

$$(I) \quad 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 5 \quad | \cdot 3$$

$$(II) \quad \sqrt{x} + 9\sqrt{y} = 11$$

$$(I) \quad 12\sqrt{x} - 9\sqrt{y} = 15$$

$$(II) \quad \sqrt{x} + 9\sqrt{y} = 11$$

$$(III) \quad 13\sqrt{x} = 26$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

In (I)

$$4\sqrt{4} - 12 = 3\sqrt{y} - 7$$

$$\sqrt{y} = 1$$

$$y = 1$$

$$L = \{4; 1\}$$

**3 Potenzfunktionen****Aufgabe 1.1**

$$f(x) = x^4 \quad P(-2; ) \quad f(-2) = (-2)^4 = 16$$

$$P(-2; 16)$$

$$Q( ; 81) \quad 81 = x^4$$

$$81 = 3^4$$

$$Q(3; 81)$$

**Aufgabe 1.2**

$$f(x) = x^7 \quad P(-3; -2187)$$

$$Q(-1; -1)$$

**Aufgabe 1.3**

$$f(x) = x^{-6} \quad P(-2; 0,015625)$$

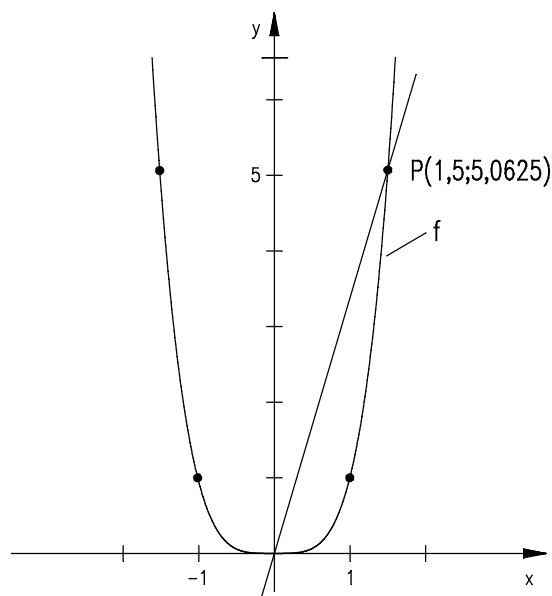
$$Q(0,5; 64)$$

**Aufgabe 1.4**

$$f(x) = x^{-5} \quad P(0,5; 32)$$

$$Q(0,25; 1024)$$

## Aufgabe 2



$$f(x) = x^4 \quad f(1,5) = 1,5^4 = 5,0625 \quad m = \frac{y}{x} = \frac{5,0625}{1,5} = 3,375$$

$$g(x) = 3,375 x$$

## Aufgabe 3.1

$$4x^5 + 3x^5 = 7x^5$$

## Aufgabe 3.2

$$6(x-y)^k - 5(x-y)^k = (x-y)^k$$

## Aufgabe 3.3

$$1 + x^3 - 0,4 + 2x^3 - 1/4x^3 = 0,6 + 2 \frac{3}{4}x^3$$

## Aufgabe 3.4

$$at^n + t^n = t^n (a + 1)$$

## Aufgabe 4.1

$$x^3 \cdot x^4 = x^7$$

## Aufgabe 4.2

$$e^x \cdot e^x = e^{2x}$$

**Aufgabe 4.3**

$$s^5 : s^3 = s^2$$

**Aufgabe 4.4**

$$z^{n+1} \cdot z^n = z^{2n+1}$$

**Aufgabe 4.5**

$$b^x : b^{x-1} = b$$

**Aufgabe 5.1**

$$\frac{56 r^2 s^{-1} r^{-1}}{s^3 r^{-2} \cdot 1,4} = 40 r^3 s^{-4}$$

**Aufgabe 5.2**

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-z} : \left(\frac{p}{2q}\right)^{-z} = \left(\frac{q}{p}\right)^z : \left(\frac{2q}{p}\right)^z = 2^{-z}$$

**Aufgabe 5.3**

$$(z^{n+3} - 3z^n - z^{n-3}) : z^{-3} = z^{n+6} - 3z^{n+3} - z^n$$

**Aufgabe 5.4**

$$\frac{(x y^2 z)^{-2}}{a^2 b^{-1}} : \frac{(x^2 y)^2}{(a b)^{-1}} = \frac{1}{a^3 x^6 y^6 z^2}$$

**Aufgabe 6.1**

$$\frac{1-x^5}{x^7} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-x^5+x^5}{x^7} = \frac{1}{x^7}$$

**Aufgabe 6.2**

$$\begin{aligned} \frac{3x^5+2}{2x^5} + \frac{3x^8-2}{3x^8} - \frac{5x^{10}-2}{2x^{10}} &= \frac{6x^5-4x^2+6}{6x^{10}} \\ &= \frac{3x^5-2x^2+3}{3x^{10}} \end{aligned}$$

**Aufgabe 7.1**

$$\sqrt[3]{10^6} = 100$$

**Aufgabe 7.2**

$$\sqrt[4]{10^{-8}} = \frac{1}{100}$$

**Aufgabe 7.3**

$$\sqrt[5]{7^5} = 7$$

**Aufgabe 7.4**

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$$

**Aufgabe 7.5**

$$\left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$$

**Aufgabe 8.1**

$$3^{1/2} = \sqrt{3}$$

**Aufgabe 8.2**

$$2^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$$

**Aufgabe 8.3**

$$y^{-0,2} = \frac{1}{\sqrt[5]{y}}$$

**Aufgabe 9.1**

$$\sqrt[3]{6} = 6^{1/3}$$

**Aufgabe 9.2**

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-2/3}$$

**Aufgabe 9.3**

$$\frac{1}{\sqrt[x]{n^2}} = n^{-2/x}$$

**Aufgabe 10.1**

$$\sqrt[8]{s^6} = \sqrt[4]{s^3}$$

**Aufgabe 10.2**

$$\frac{1}{\sqrt[10]{2^8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^4}}$$

**Aufgabe 10.3**

$$\frac{1}{\sqrt[15]{x^{3k}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^k}}$$

**Aufgabe 10.4**

$$\sqrt[4]{100} = \sqrt{10}$$

**Aufgabe 10.5**

$$\sqrt[10]{25^4} = \sqrt[5]{625}$$

**Aufgabe 11.1**

$$\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^7}$$

**Aufgabe 11.2**

$$\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2}$$

**Aufgabe 11.3**

$$\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$$

**Aufgabe 11.4**

$$3^{-1/2} \cdot (2/3)^{-1/2} = \sqrt{1/2}$$

**Aufgabe 11.5**

$$(3^{-3/4})^{-4/5} = \sqrt[5]{27}$$

**Aufgabe 12.1**

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$$

**Aufgabe 12.2**

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[2n]{a}$$

**Aufgabe 12.3**

$$\frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{b^3}} = \sqrt[12]{b}$$

**Aufgabe 12.4**

$$\frac{(10^n : 2^n)^2}{(\sqrt{5})^2} = \frac{5^{2n}}{5} = 5^{2n-1}$$

**Aufgabe 13.1**

$$8x^3 + 27 = 0$$

$$x^3 = -27/8 \quad x = -\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$$

$$x = -3/2$$

$$L = \{-3/2\}$$

**Aufgabe 13.2**

$$10^3 \cdot x^5 = 10^{-2}$$

$$x^5 = (1/10)^5$$

$$x = 1/10$$

$$L = \{1/10\}$$



## 4 Exponentialfunktionen

## Aufgabe 1

$$f(x) = a^x \quad P(-1;4)$$

$$4 = a^{-1}$$

$$a = 1/4$$

$$f(x) = (1/4)^x$$

## Aufgabe 2

$$f(x) = k a^x \quad P(0;0,5)$$

$$\text{für } P: 0,5 = k a^0$$

$$k = 0,5$$

$$Q(2;0,02)$$

$$\text{für } Q: 0,02 = 0,5 a^2$$

$$a = 0,2$$

$$f(x) = 0,5 \cdot 0,2^x$$

## Aufgabe 3

$$K_n = K_0 \cdot q^n = 100000 \cdot 1,07^8 = 171\,818,62$$

**Antwort:** Das Guthaben beträgt nach 8 Jahren 171 818,62 €.

## Aufgabe 4

$$N_{(t)} = N_0 \cdot 0,5^{t/T} = 50 \cdot 0,5^{365/18} \approx 3,93 \cdot 10^{-5} \text{ mg}$$

**Antwort:** Es sind noch ca. 39,3 ng vorhanden.

## Aufgabe 5

$$p = p_0 \cdot (1/2)^{h/5,5} = 1000 \cdot 0,5^{2963/5500} = 688,4$$

**Antwort:** Der Luftdruck auf der Zugspitze beträgt ca. 688,4 hPa.

## Aufgabe 6

$$i_{(t)} = i_0 \cdot e^{-t/T} = \frac{U_0 - U_1}{R} e^{-t/T} = \frac{100 \text{ V}}{1 \text{ M}\Omega} e^{-1,5 T/T} = 22,3 \text{ }\mu\text{A}$$

**Antwort:** Der Strom beträgt etwa 22,3  $\mu\text{A}$ .

## 5 Logarithmusfunktionen

## Aufgabe 1.1

$$a^y = 100 \quad \log_a 100 = y$$

**Aufgabe 1.2**

$$3^x = 81 \quad \log_3 81 = x$$

**Aufgabe 2.1**

$$1 = \log_5 5 \quad 5^1 = 5$$

**Aufgabe 2.2**

$$y = \log_a b \quad a^y = b$$

**Aufgabe 3.1**

$$y = \log_8 64 \quad 8^y = 64 \quad y = 2$$

**Aufgabe 3.2**

$$\log_4 256 = x \quad 4^x = 256 \quad x = 4 \quad \log_4 256 = 4$$

**Aufgabe 3.3**

$$\log_{0,4} 0,16 = x \quad 0,4^x = 0,16 \quad x = 2 \quad \log_{0,4} 0,16 = 2$$

**Aufgabe 3.4**

$$\log_{1/2} 2 = x \quad (1/2)^x = 2 \quad x = -1 \quad \log_{1/2} 2 = -1$$

**Aufgabe 3.5**

$$\log_2 \sqrt[5]{16} = x \quad 2^x = 2^{4/5} \quad x = 4/5 \quad \log_2 \sqrt[5]{16} = 4/5$$

**Aufgabe 4.1**

$$\lg(a^2/b) = 2 \lg a - \lg b$$

**Aufgabe 4.2**

$$\lg(1/3 \cdot q^2) = \lg 1 - \lg 3 - 2 \lg q$$

**Aufgabe 4.3**

$$\lg \sqrt{a^3 b^5} = 3/2 \lg a + 5/2 \lg b$$

**Aufgabe 4.4**

$$\lg \sqrt[3]{a^2 b / c^2} = 2/3 \lg a + 1/3 \lg b - 2/3 \lg c$$

**Aufgabe 5.1**

$$5 \lg p - 2 \lg q = \lg (p^5/q^2)$$

**Aufgabe 5.2**

$$1/5 \lg (xy) - 3/4 \lg (x^2y) = \lg \left( \sqrt[5]{xy} / \sqrt[4]{x^6y^3} \right)$$

**Aufgabe 6.1**

$$1/3 \lg 4 + 2 \lg x = 1/3 \lg 16$$

$$2 \lg x = 1/3 \lg 16 - 1/3 \lg 4$$

$$\lg x = 1/2 \lg \sqrt[3]{4}$$

$$\lg x = \lg \sqrt[6]{4}$$

$$x = \sqrt[6]{4}$$

**Aufgabe 6.2**

$$\lg(p - q) = \lg(p^2 - q^2) - 1/2 \lg x$$

$$1/2 \lg x = \lg \frac{p^2 - q^2}{p - q}$$

$$\lg x = \lg(p + q)^2$$

$$x = (p + q)^2$$

**Aufgabe 7.1**

$$\log_8 36 =$$

$$\log_a x = \lg x / \lg a \quad \log_8 36 = \lg 36 / \lg 8 \approx 1,7233$$

**Aufgabe 7.2**

$$\log_2 10 \approx 3,3219$$

**Aufgabe 8.1**

$$1,5^x = 32$$

$$x \lg 1,5 = \lg 32$$

$$x \approx 8,55$$

**Aufgabe 8.2**

$$\begin{aligned}
 4 \cdot 3,8^x &= 160 \\
 3,8^x &= 40 \\
 x \lg 3,8 &= \lg 40 \\
 x &\approx 2,76
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.3**

$$\begin{aligned}
 3^{x+2} - 3^x &= 8 \\
 3^x \cdot 3^2 - 3^x &= 8 \\
 3^x &= 1 \\
 x &= 0
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.4**

$$\begin{aligned}
 5^x + 6^x &= 6^{x+1} \\
 5^x &= 6^x \cdot 6 - 6^x \\
 \frac{5^x}{6^x} &= 5 \\
 x &= \lg 5 / \lg 5/6 \\
 x &\approx -8,83
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.5**

$$\begin{aligned}
 4^{x-2} + 4 \cdot 4^{2-x} &= 5 \\
 \frac{4^x}{4^2} + \frac{4 \cdot 4^2}{4^x} &= 5 && \text{Substitution : } 4^x = u \\
 u^2 - 80u + 1024 &= 0 \\
 u_1 = 64 \quad u_2 = 16 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad L = \{3; 2\}
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 9**

$$\begin{aligned}
 N_{(t)} &= N_0 \cdot 0,5^{t/T} \\
 \lg \frac{N_{(t)}}{N_0} &= \lg 0,5^{t/T} \\
 t/T &= \frac{\lg N_{(t)} / N_0}{\lg 0,5} \\
 t &\approx 3,3219 \cdot T \\
 t &= 285,7
 \end{aligned}$$

**Antwort:** Nach ca. 285,7 Jahren sind noch 1 mg Plutonium 238 vorhanden.

**Komplexaufgabe „Bevölkerungswachstum“****Aufgabe 1.1**

$$f(x) = k a^x$$

$$f(0) = k a^0 = 5\,650\,000$$

$$5\,650\,000 = k$$

$$f(x) = k a^x$$

$$f(20) = k a^{20}$$

$$f(20) = 8\,561\,766$$

$$8\,561\,766 = 5\,650\,000 a^{20}$$

$$a^{20} = \frac{8\,561\,766}{5\,650\,000}$$

$$a = \sqrt[20]{\frac{8\,561\,766}{5\,650\,000}}$$

$$a = 1,021$$

$$f(x) = 5\,650\,000 \cdot 1,021^x$$

**Aufgabe 1.2**

$$a = 1,021$$

$$a = 1 + 0,021$$

**Antwort:** Das jährliche Bevölkerungswachstum beträgt 2,1 %.

**Aufgabe 1.3**

Bevölkerungszahl im Jahr 2010

$$f(2010) = 5\,650\,000 \cdot 1,021^{30}$$

$$f(2010) = 10\,539\,517$$

**Antwort:** Im Jahr 2010 wird die Bevölkerungszahl etwa 10 539 517 betragen.

$$f(2020) = 5\,650\,000 \cdot 1,021^{40}$$

$$f(2020) = 12\,974\,127$$

**Antwort:** Im Jahr 2020 wird bei gleich bleibender Zuwachsrate die Bevölkerung auf 12 974 127 Einwohner gestiegen sein.