

Geometrische Gesetze auf zwei- und dreidimensionale Figuren anwenden

Bei der Planung und der Konstruktion bilden technische Zeichnungen eine Möglichkeit der Dokumentation und vielfach eine Grundlage zur Kommunikation zwischen den beteiligten Fachleuten.

Neben diesen hauptsächlich geometrisch orientierten Anwendungen spielen periodische Vorgänge, wie z.B. Schwingungen und Kurvenverläufe, in der Physik, Mechanik, Elektrotechnik etc. eine wichtige Rolle.

Mathematische Modelle in Form von trigonometrischen Funktionen ermöglichen die Beschreibung und Berechnung dieser Vorgänge.

Technikerinnen und Techniker müssen bei planerischen und konstruktiven Aufgaben die grundlegenden geometrischen Zusammenhänge anwenden können.

Weiterhin müssen Sie z.B. bei Vermessungen, Getriebeauslegungen, Spannungsrechnungen, Reglereinstellungen mit trigonometrischen Funktionen arbeiten können.

Aus diesen Gründen werden im Lernbereich 1 die Grundlagen der Planimetrie erarbeitet. Die wesentlichen trigonometrischen Funktionen und deren Eigenschaften werden im Lernbereich 2 vermittelt und im Lernbereich 3 die Beziehungen von Oberfläche und Volumen dreidimensionaler Körper dargestellt.

Voraussetzung für dieses Lernmodul ist eine erfolgreiche Bearbeitung des Lernmoduls 2 dieses Faches

- Funktionen und Gleichungen erster Ordnung einordnen und anwenden

Alle weiteren notwendigen Informationen und Arbeitsunterlagen sind in diesem Lernmodul enthalten.

Dieses Lernmodul ist im häuslichen Studium zu erarbeiten.

Der benötigte Zeitaufwand liegt bei ca. 46 Stunden.

Zusätzlich finden in den semesterbezogenen Präsenzphasen 17 Stunden Festigung und Vertiefung fachspezifischer und fächerübergreifender Zusammenhänge sowie die Beschreibung typischer Aufgaben und Problemstellungen statt.

LERNMODUL 4

Ziele

Ausgangssituation

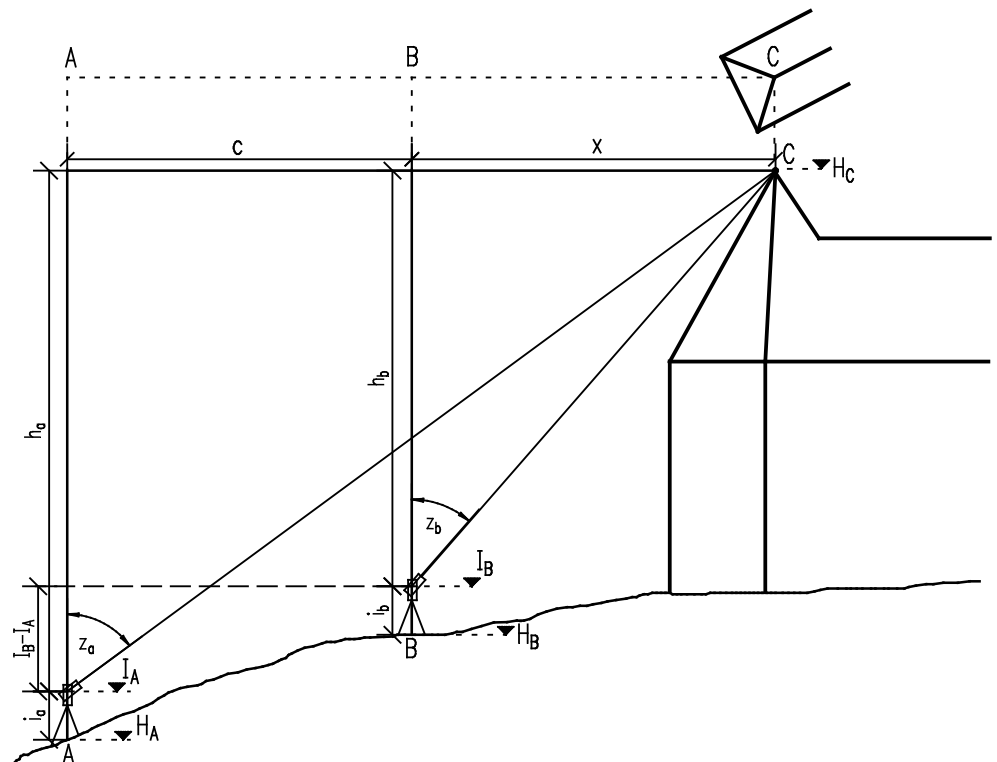
Planung

Komplexaufgabe des Lernmoduls

Trigonometrische Höhenbestimmung

Eine Gemeinde möchte in einem Werbeprospekt für Besucher die genaue Höhe ihres historischen Kirchturms angeben.

Da die Dachspitze nicht direkt zugänglich ist und der zu bestimmende Höhenpunkt nur von einer Richtung aus sichtbar ist, kann nur eine trigonometrische Höhenbestimmung mithilfe von Winkelmessungen durchgeführt werden.



In den Lernbereichen 1 und 2 dieses Lernmoduls werden die geometrischen Zusammenhänge und Grundlagen erarbeitet, um die trigonometrische Höhenbestimmung mit den geforderten Merkmalen realisieren zu können.

Inhaltsverzeichnis

1 Planimetrie.....	4
1.1 Planimetrische Grundbegriffe.....	4
1.1.1 Punkt, Linie, Gerade, Halbgerade und Strecke.....	4
1.1.2 Winkel und Winkelarten.....	9
1.2 Grundkonstruktionen.....	17
1.2.1 Ortslinien.....	17
1.2.2 Kongruenzabbildungen.....	26
1.3 Ähnlichkeit.....	30
1.3.1 Zentrische Streckung.....	30
1.3.2 Strahlensätze.....	31
1.3.3 Eigenschaften ähnlicher Figuren.....	35
1.4 Kongruenzsätze und besondere Linien und Punkte im Dreieck.....	37
1.5 Rechtwinkliges Dreieck.....	57
1.6 Kreis und Kreisteile.....	66
1.6.1 Kreis und Gerade.....	66
1.6.2 Winkelsätze am Kreis.....	69
1.6.3 Kreisteile.....	75
1.7 Flächen- und Umfangsberechnungen.....	76
1.7.1 Geradlinig begrenzte Flächen.....	76
1.7.2 Kreisförmig begrenzte Flächen.....	90
2 Trigonometrie.....	106
2.1 Sinus, Kosinus und Tangens.....	106
2.2 Trigonometrische Funktionen.....	114
2.2.1 Sinusfunktion.....	115
2.2.2 Kosinusfunktion.....	115
2.2.3 Tangensfunktion.....	116
2.3 Trigonometrische Berechnungen im allgemeinen Dreieck.....	117
2.3.1 Sinus und Kosinus für stumpfe Winkel.....	117
2.3.2 Sinussatz.....	119
2.3.3 Kosinussatz.....	127
2.4 Darstellung trigonometrischer Funktionen mithilfe des Bogenmaßes.....	148
2.5 Additionstheoreme.....	152
2.6 Trigonometrische Funktionen im Raum.....	153
3 Stereometrie.....	170
3.1 Volumen und Oberfläche von Prismen.....	170
3.2 Volumen und Oberfläche von Zylinder, Pyramide und Kegel.....	173
3.3 Volumen und Oberfläche der Kugel.....	182
3.4 Volumen und Oberfläche von Pyramiden- und Kegelstumpf.....	185
3.5 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern.....	191
Lösungsanhang.....	200

Lernbereich
1 Planimetrie
1.1 Planimetrische Grundbegriffe
1.1.1 Punkt, Linie, Gerade, Halbgerade und Strecke
Abkürzungen und Bezeichnungen

Neben den schon aufgeführten Abkürzungen gelten in der Planimetrie noch weitere, die der genaueren Ausdrucksweise und der Übersichtlichkeit dienen.


Abkürzungen	Bedeutung
\parallel	parallel zu
\perp	senkrecht auf
	rechter Winkel in Zeichnungen
R	rechter Winkel
AB	Gerade durch A und B
[AB]	Strecke von A nach B
\overline{AB}	Länge der Strecke von A nach B
\widehat{AB}	Bogen von A nach B
k (M, r)	Kreis mit Mittelpunkt M und Radius
\cong	deckungsgleich (kongruent)
\sim	ähnlich
Δ	Dreieck
\sphericalangle	Winkel
\square	Viereck

Tabelle 1 Abkürzungen in der Planimetrie

Weitere Abkürzungen und Bezeichnungen sind z.B.:

- Großbuchstaben (A, B, C, D, E usw.) für Punkte
- Kleinbuchstaben (a, b, c, d, e, f usw.) für Seiten und Diagonalen
- Griechische Buchstaben für Winkel

Zeichen	Aussprache
α	Alpha
β	Beta
γ	Gamma
δ (Δ)	Delta
ε	Epsilon
η	Eta
ϑ (Θ)	Theta
κ	Kappa
λ	Lambda
μ	My
ν	Ny
π	Pi
ρ	Rho
σ (Σ)	Sigma
τ	Tau
φ (Φ)	Phi
ψ	Psi
ω (Ω)	Omega

Tabelle 2 Aussprache griechischer Zeichen

Spezielle Bezeichnungen (z.B. für besondere Linien im Dreieck) finden Sie an den entsprechenden Stellen erläutert.

Der Punkt

Festgelegt ist ein Punkt wie folgt: Ein Punkt hat keine Ausdehnung. Betrachtet man diese geometrische Festlegung eines Punktes genauer, so bedeutet dies, dass alle gezeichneten Punkte nicht dieser Anforderung entsprechen, es sind genau genommen Flächen. Für die Praxis hat dies zur Folge, dass man durch eine Zeichnung der Anforderung möglichst nahe kommen muss, indem man mit hartem und spitzem Bleistift zeichnet. Diese Forderung gilt aber nicht nur für das Zeichnen von Punkten, sondern für alle Zeichnungen und Konstruktionen in der Geometrie. Punkte entstehen in der Regel durch den Schnitt zweier Linien, die dementsprechend möglichst dünn und genau gezeichnet werden müssen. Sogenannte „schleifende Schnitte“ (Abbildung 1) sind zu vermeiden. Am genauesten wird die Zeichnung, wenn sich die Linien rechtwinklig schneiden (Abbildung 2).

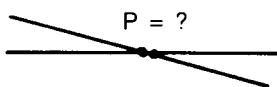


Abbildung 1 Schleifender Schnitt

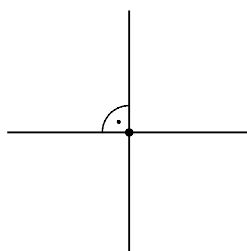


Abbildung 2 Rechtwinkliger Schnitt

Linien

Eine Linie entsteht durch Bewegung eines Punktes.

Die Linie hat eine Ausdehnung: Die Länge

Je nach Richtung der Bewegung eines Punktes entsteht eine gerade Linie (Gerade) (Abbildung 3) oder eine gekrümmte Linie (Abbildung 4). Ist die Krümmung der Linie gleich bleibend, so entsteht eine Kreislinie.



Abbildung 3 Gerade



Abbildung 4 gekrümmte Linie

Flächen

Flächen entstehen bei der Bewegung einer Linie in der Ebene (Abbildung 5) und im Raum (Abbildung 6).

Die Fläche hat zwei Ausdehnungen: Länge und Breite

Bewegt sich eine Linie in der Zeichenebene, so entsteht eine ebene Fläche (siehe Abbildung 5: Rechtecksfläche). Bei einer Bewegung im Raum kann auch eine gekrümmte Fläche entstehen (siehe Abbildung 6: Oberfläche eines Zylinders).

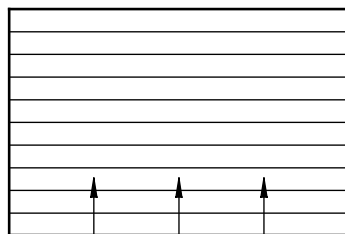


Abbildung 5 Bewegte Linie in der Zeichenebene

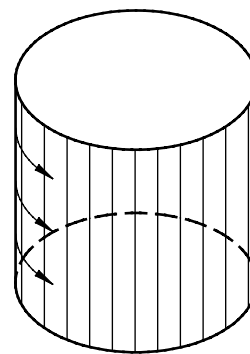


Abbildung 6 Bewegte Linie auf einem Kreis

Körper

Körper entstehen durch Bewegung einer Fläche im Raum.

Körper haben drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe

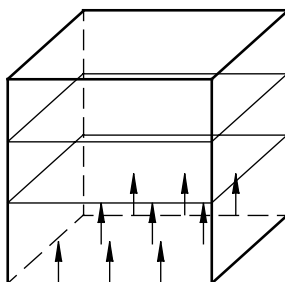


Abbildung 7 Bewegte Fläche

Gerade Linien

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist die geradlinige. Oft wird im täglichen Leben diese Verbindung als Gerade bezeichnet. In der Geometrie nennt man diese Verbindung eine **Strecke**. Von einer **Geraden** spricht man, wenn man die Strecke nach beiden Seiten geradlinig bis ins Unendliche verlängert.

Geraden werden in der Regel mit g bezeichnet. Die geradlinige Verbindung zweier Punkte A und B ist die Strecke von A nach B.

[AB] (lies: Strecke AB)

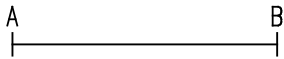


Abbildung 8 Strecke [AB]

Häufig werden Strecken auch durch Kleinbuchstaben (z.B. die Seiten eines Dreiecks mit a, b und c) bezeichnet.

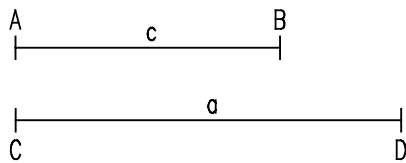


Abbildung 9 Strecken c und a

In Abbildung 9 gilt: Strecken haben eine bestimmte Länge. Die Länge der Strecke [AB] bezeichnet man mit \overline{AB} .

$\overline{AB} < \overline{CD}$ (lies: \overline{AB} kleiner als \overline{CD})

$\overline{CD} > \overline{AB}$ (lies: \overline{CD} größer als \overline{AB})

Ist eine gerade Linie einseitig begrenzt, so spricht man von einer **Halbgeraden**.

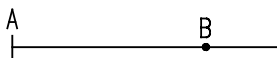


Abbildung 10 Halbgerade [AB]

Zwei Geraden

Verlaufen zwei Geraden in einer Ebene, so gibt es für ihre Lage zwei verschiedene Möglichkeiten:

1. Die beiden Geraden schneiden sich nicht.
2. Die beiden Geraden schneiden sich.

Zu 1. Zwei Geraden, die sich nicht schneiden, haben immer den gleichen Abstand, sie verlaufen parallel. Parallele Geraden schneiden sich nicht im Endlichen.

$g_1 \parallel g_2$ (lies: g_1 parallel g_2)

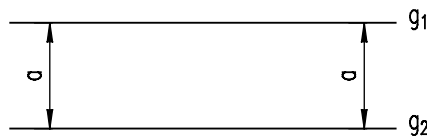


Abbildung 11 Parallele Geraden

Zu 2. Schneiden sich zwei Geraden, so haben sie nur einen Schnittpunkt. Den Winkel, unter dem sie sich schneiden, nennt man Schnittwinkel. Der Schnittwinkel kann in einem Sonderfall 90° betragen. Dann stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander.

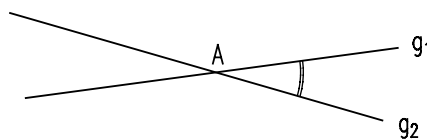


Abbildung 12 Schneidende Geraden

$g_1 \perp g_2$ (lies: g_1 senkrecht auf g_2)

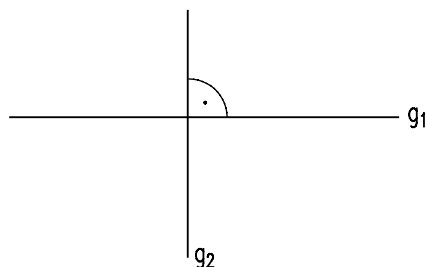


Abbildung 13 Rechtwinklige Geraden

In Abbildung 13 verläuft die Gerade g_1 waagerecht oder **horizontal** (wie z.B. die Oberfläche einer Wasserfläche), die Gerade g_2 lotrecht oder **vertikal** (wie z.B. ein freihängendes Senkblei).

Zwei Geraden stehen jedoch immer dann senkrecht aufeinander, wenn der Winkel zwischen ihnen 90° beträgt, auch wenn sie nicht waagerecht und lotrecht verlaufen.

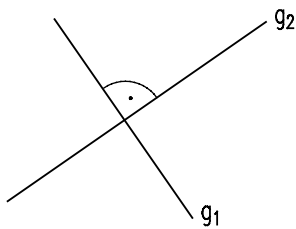


Abbildung 14 Schiefstehende rechtwinklige Geraden

1.1.2 Winkel und Winkelarten

Bezeichnungen

Zur Festlegung eines Winkels genügen 2 Halbgeraden, die von einem Punkt ausgehen. Die beiden Halbgeraden werden mit **Schenkel**, der Punkt, von dem sie ausgehen, mit **Scheitelpunkt** bezeichnet.

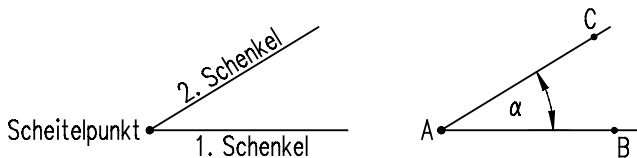


Abbildung 15 Bezeichnungen am Winkel

Benannt werden Winkel entweder mit griechischen Kleinbuchstaben (α , β , γ , usw.) oder mittels dreier Punkte (Scheitelpunkt und je 1 Punkt auf den beiden Schenkeln). Bei der Benennung von Winkeln mittels Punkten (die mit Großbuchstaben benannt werden) ist zu beachten, dass der mittlere der drei Buchstaben den Scheitelpunkt bezeichnet.

Somit gilt: $\alpha = \angle BAC$

Winkelgröße, Übertragen von Winkeln

Die Winkelgröße wird entweder durch die Winkelgrade oder durch die Länge des Bogens für eine bestimmte Schenkellänge (Radius) bestimmt. Aus Abbildung 16 ist klar zu erkennen, dass die Bogenlänge zur Größenbestimmung eines Winkels allein nicht ausreicht.

Erst wenn festgelegt wird, bei welchem Radius der Bogen die Länge b_1 haben soll, ist die Größe des Winkels bestimmt.

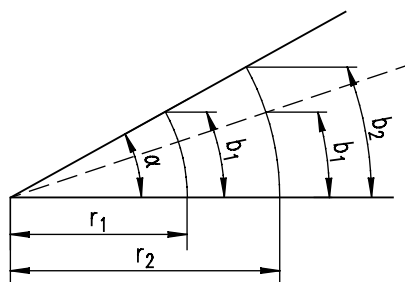


Abbildung 16 Bogenlängen beim Winkel

Der gleiche Winkel α kann festgelegt werden durch die Länge des Bogens b_1 beim Radius r_1 sowie durch b_2 beim Radius r_2 .

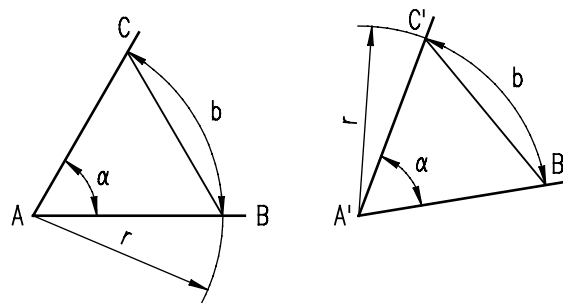
Zwei Winkel sind gleich groß, wenn sie gleichlange Kreisbögen beim gleichen Radius haben.

Lehrbeispiel 1: Übertragen eines Winkels

Der Winkel $\alpha = \angle BAC$ sei vorgegeben.

Tragen Sie ihn an die Halbgerade $[A'B']$ an!

Lösung



Der Winkel $\alpha = \angle BAC$ ist bestimmt durch die Kreisbogenlänge $b = BC$ beim Kreisradius $r = BC = B'C'$ mit dem Zirkel abgetragen.

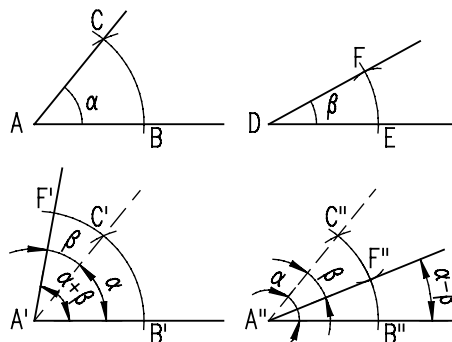
Jede geometrische Konstruktion muss eindeutig und wiederholbar sein. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn sich die Konstruktion lückenlos beschreiben lässt. Die Beschreibung einer Konstruktion nennt man den Konstruktionstext, der demnach eindeutig und klar abgefasst werden muss.

Lehrbeispiel 2: Addition und Subtraktion zweier Winkel

Gegeben seien zwei Winkel α und β .

Konstruieren Sie die Winkel $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$!

Lösung



Konstruktionstext

- Zeichnen Sie um A, D, A' und A'' einen Kreisbogen mit Radius r!
- Greifen Sie mit dem Zirkel die Sehne \overline{BC} ab!
- Zeichnen Sie damit einen Kreisbogen B' und B'' !

Damit ist α übertragen.

- Greifen Sie mit dem Zirkel die Sehne \overline{EF} ab.
- Zeichnen Sie damit einen Kreisbogen C' bzw. C'' .

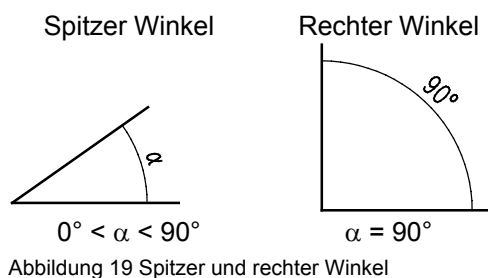
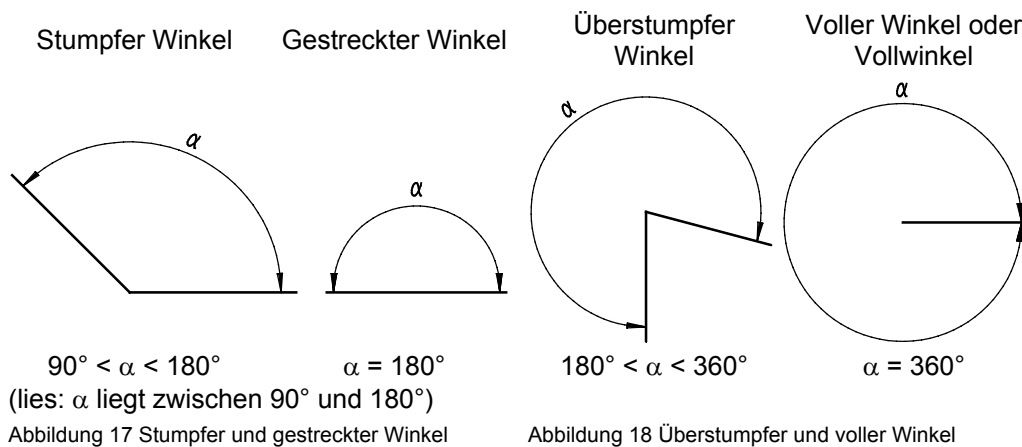
Damit ist auch β übertragen.

Winkelarten

Bezeichnung von Winkeln nach ihrer Größe

Aus der folgenden Übersicht können Sie die Bezeichnung von Winkeln nach ihrer Größe entnehmen.

Die Maßeintragung der Winkel in der Geometrie kann entweder nach den DIN-Zeichnungsnormen (z.B. beim stumpfen Winkel α) oder nur mit Angabe des Bogens und des griechischen Buchstabens (z.B. beim spitzen Winkel α) erfolgen.



Bezeichnung von Winkeln nach ihrer Lage

Die Abbildung 20 zeigt, dass beim Schnitt zweier Geraden 4 Winkel entstehen.

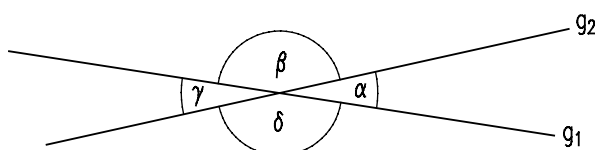


Abbildung 20 Winkel an geschnittenen Geraden

Zwischen diesen Winkeln bestehen gewisse Zusammenhänge, die Sie aus der Abbildung klar erkennen können.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\delta + \alpha = 180^\circ$$

Man nennt $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ und } \beta \\ \beta \text{ und } \gamma \\ \gamma \text{ und } \delta \\ \delta \text{ und } \alpha \end{array} \right\}$ **Nebenwinkel**.

Zwei Winkel, die an der Kreuzung zweier Geraden nebeneinander liegen, heißen Nebenwinkel. Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180° .

Ergibt die Summe zweier Winkel 180° , entsprechen sie aber sonst nicht den Erfordernissen der Nebenwinkel, so nennt man sie **Supplementwinkel**.

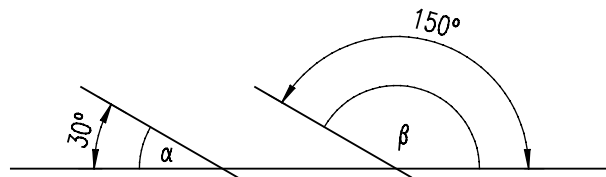


Abbildung 21 Supplementwinkel

Zwei Winkel, die sich zu 180° ergänzen, heißen Supplementwinkel.

Ergänzen sich zwei Winkel zu 90° , so werden sie als **Komplementwinkel** bezeichnet.

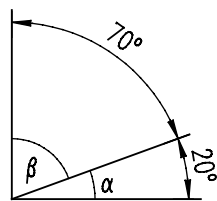


Abbildung 22 Komplementwinkel

Zwei Winkel, die sich zu 90° ergänzen, heißen Komplementwinkel.

Einen weiteren Zusammenhang scheint es zwischen den Winkeln zweier sich schneidender Geraden zu geben.

Und zwar scheinen $\alpha = \gamma$
und $\beta = \delta$

zu sein. Man nennt α und γ bzw. β und δ **Scheitelwinkel**.

Zwei Winkel, die an einer Kreuzung zweier Geraden gegenüber liegen, heißen Scheitelwinkel.

Die Richtigkeit der Vermutung $\alpha = \gamma$ soll mittels eines Beweises bestätigt werden.

Ein Beweis in der Mathematik besteht immer aus drei Teilen:

1. der **Voraussetzung**
2. der Vermutung oder **Behauptung**
3. dem eigentlichen **Beweis**, in welchem die Behauptung mittels der Voraussetzung und weiterer schon bekannter oder bewiesener Tatsachen bewiesen werden soll

Voraussetzung: (1) $\alpha + \beta = 180^\circ$
(2) $\beta + \gamma = 180^\circ$

Behauptung: $\alpha = \gamma$

Beweis: Aus (1) $\alpha + \beta = 180^\circ$ ergibt sich
(1') $\beta = 180^\circ - \alpha$

Aus (2) $\beta + \gamma = 180^\circ$ ergibt sich
(2') $\beta = 180^\circ - \gamma$

Da es sich in (1') und (2') um denselben Winkel β handelt, gilt:

$$180^\circ - \gamma = 180^\circ - \alpha \quad | +\alpha + \gamma$$

Daraus entsteht:

$$\alpha + 180^\circ = \gamma + 180^\circ \quad | -180^\circ$$

$\alpha = \gamma$ was zu beweisen war (w. z. b. w.)

Genauso kann bewiesen werden: $\beta = \alpha$.

Scheitelwinkel sind gleich groß.

Winkel an geschnittenen Parallelen

Werden zwei parallele Geraden g_1 und g_2 von einer dritten Geraden geschnitten, so entstehen verschiedene Winkel, bei denen sich wieder vermuten lässt, dass einige von ihnen gleich groß sind.

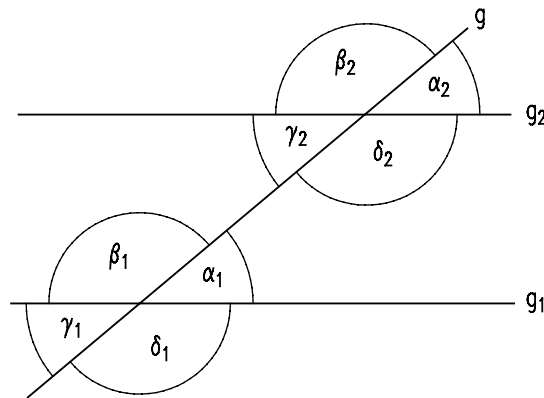


Abbildung 23 Winkel an von einer Geraden geschnittenen Parallelen

Aus den bisherigen Ableitungen folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_1 \\ \beta_1 &= \delta_1 \\ \alpha_2 &= \gamma_2 \\ \beta_2 &= \delta_2 \end{aligned} \quad \text{Scheitelwinkel}$$

Aus der Tatsache, dass Parallelen immer den gleichen Abstand und damit die gleiche Richtung haben, ergibt sich, dass auch die Winkel

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 \\ \beta_1 &= \beta_2 \\ \gamma_1 &= \gamma_2 \\ \delta_1 &= \delta_2 \end{aligned} \quad \text{sind.}$$

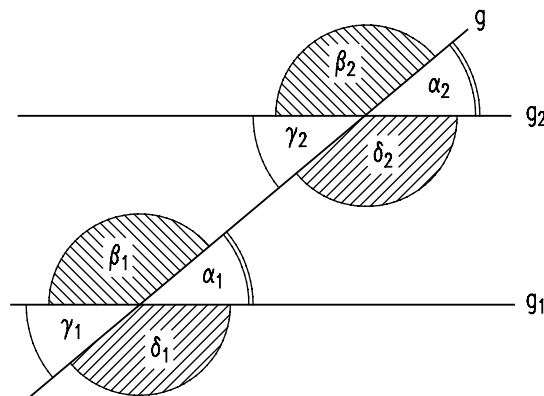


Abbildung 24 Stufenwinkel

Die Winkel α_1 , α_2 haben die gleiche Lage bezüglich g und gleiche Lage bezüglich g_1 bzw. g_2 . Man nennt daher α_1 und α_2 gleichliegende Winkel oder **Stufenwinkel**. Ebenso sind β_1 , β_2 ; γ_1 , γ_2 sowie δ_1 , δ_2 Stufenwinkel.

An parallelen Geraden sind Stufenwinkel gleich groß.

Es scheinen noch weitere Winkel einander gleich zu sein, so ist

$$\alpha_1 = \gamma_2$$

$$\beta_1 = \delta_2$$

$$\gamma_1 = \alpha_2$$

$$\delta_1 = \beta_2$$

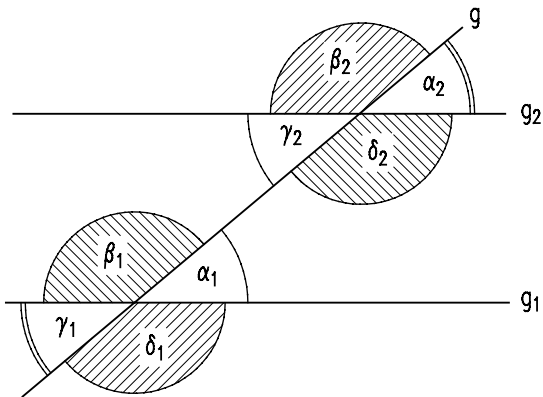


Abbildung 25 Wechselwinkel

Hier liegt der zweite Winkel jeweils auf der anderen Seite der Parallelen und der schneidenden Geraden.

Winkel, die auf verschiedenen Seiten der schneidenden sowie auf verschiedenen Seiten der parallelen Geraden liegen, heißen **Wechselwinkel**.

Es lässt sich zeigen, dass folgender Satz gilt:

An parallelen Geraden sind Wechselwinkel gleich groß.

Es gibt noch eine 3. Art von besonderen Winkeln (Abbildung 26). Die Winkel α_1 und δ_2 bzw. β_1 und γ_2 heißen **Nachbarwinkel**.

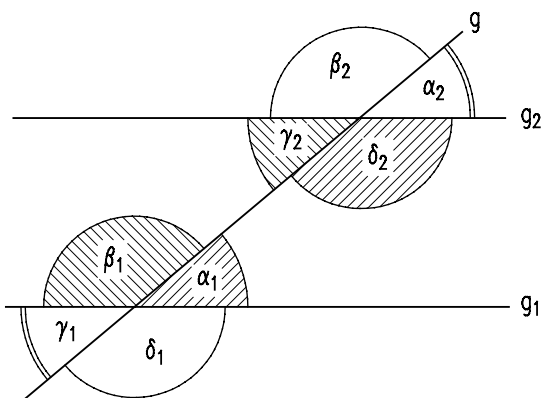
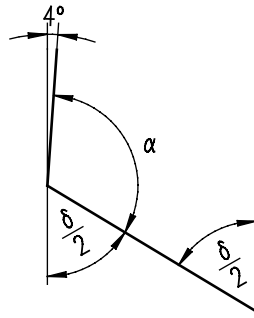


Abbildung 26 Nachbarwinkel

Auch hier lässt sich zeigen, dass folgender Satz gilt:

An parallelen Geraden ergänzen sich Nachbarwinkel zu 180° .

Lehrbeispiel 3



Berechnen Sie den Winkel α bei der Herstellung einer Schablone zur Prüfung des Spitzenwinkels $\delta = 118^\circ$ eines Spitzbohrers für Stahl!

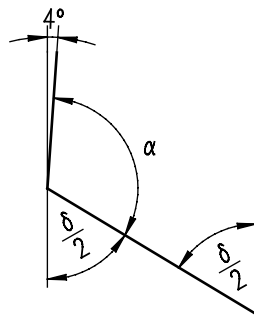
Lösung

Ziehen Sie eine Parallele zur Mittelachse des Bohrers durch das Ende der Schneide.

Der Winkel $\frac{\delta}{2}$ kommt dadurch noch einmal vor (Wechselwinkel).

Somit ist:

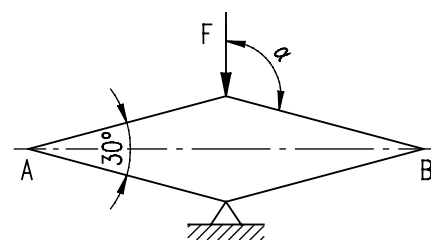
$$(\alpha + 4^\circ) + \frac{\delta}{2} = 180^\circ \text{ (Nebenwinkel)}$$



$$\begin{aligned} \alpha + 4^\circ &= 180^\circ - \frac{\delta}{2} \\ \alpha &= 180^\circ - \frac{\delta}{2} - 4^\circ \\ \alpha &= 180^\circ - 59^\circ - 4^\circ \\ \underline{\underline{\alpha &= 117^\circ}} \end{aligned}$$

Der Prüfwinkel beträgt 117° .

Lehrbeispiel 4



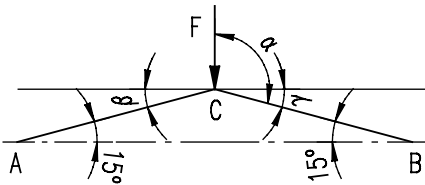
Auf einen Wagenheber, der aus 4 gleich langen Streben besteht, drückt eine Kraft lotrecht.

Berechnen Sie den Winkel α !

Lösung

Zeichnen Sie durch die Pfeilspitze der Kraft \vec{F} eine Parallele zur Mittelachse AB. Dadurch erhalten wir zweimal Wechselwinkel an parallelen Geraden:

$$(1) \quad \beta = \angle BAC = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$



$$(2) \quad \gamma = \angle CBA = 15^\circ$$

$$\text{Damit ist } \alpha = 90^\circ + \gamma = 90^\circ + 15^\circ = \underline{\underline{105^\circ}}$$

1.2 Grundkonstruktionen**1.2.1 Ortslinien****Begriffsbestimmung**

Die vier Bohrungen in der Platte (Abbildung 27) sollen symmetrisch zueinander liegen.

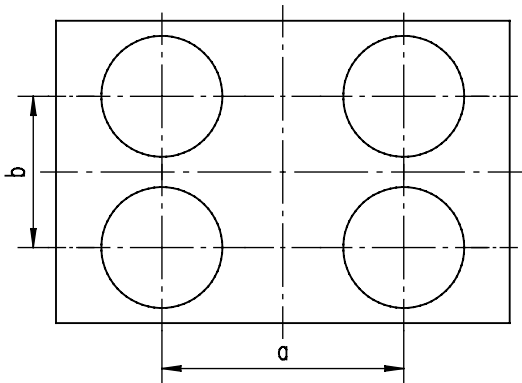


Abbildung 27 Bohrplatte

Um diese vier Bohrungen anreißen zu können, müssen mindestens 2 Maße gegeben sein, z.B. die Bohrungsabstände a und b . Ist nur das Maß a bekannt, so lassen sich unendlich viele Bohrungen anreißen, die den Abstand a voneinander haben (Abbildung 28). Die Mittelpunkte dieser Bohrungen liegen auf den beiden Parallelen p_1 und p_2 , die im Abstand $a/2$ zur Mittelachse m_1 liegen.

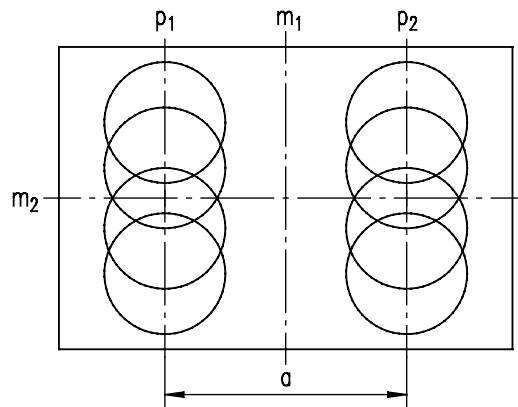


Abbildung 28 Uneindeutige Bemaßung

Ein Bestimmungsstück genügt demnach nicht, um einen Punkt (hier Mittelpunkt) eindeutig zu konstruieren.

Ein zweites Bestimmungsstück ist unbedingt notwendig. Bei der Platte in Abbildung 27 sind dies die beiden Parallelen zur waagerechten Mittelachse m_2 im Abstand $b/2$, mit denen die vier Mittelpunkte der Bohrungen dann eindeutig konstruierbar sind.

Linien, auf denen sämtliche Punkte liegen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen, heißen geometrische Örter oder Ortslinien.

Ein Punkt ist in der Ebene durch zwei Ortslinien bestimmt.

Grundaufgaben

Zunächst werden einige Ortslinien mit charakteristischen Eigenschaften vorgestellt. Diese Eigenschaften leuchten unmittelbar ein und müssen nicht weiter begründet werden.

Der geometrische Ort (G.O.) für alle Punkte, die von einer gegebenen Geraden g den gleichen Abstand a haben, ist das Parallelenpaar zu g im Abstand a .

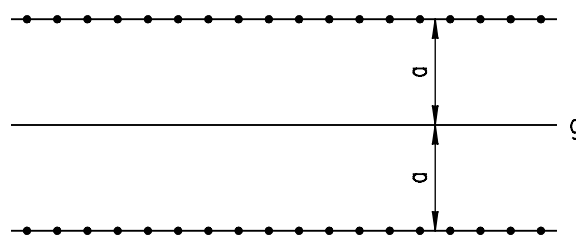


Abbildung 29 Die Parallele als Ortslinie

Der geometrische Ort für alle Punkte, die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist der Kreis um M mit Radius r .

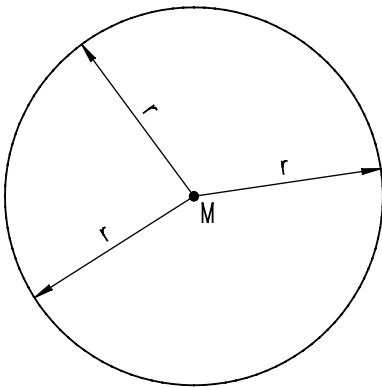


Abbildung 30 Der Kreis als Ortslinie

Bei den Konstruktionsaufgaben der Geometrie ist die Idee meist, zwei Ortslinien zu finden, welche die Lage eines Punktes in der Ebene eindeutig bestimmen.

Lehrbeispiel 1

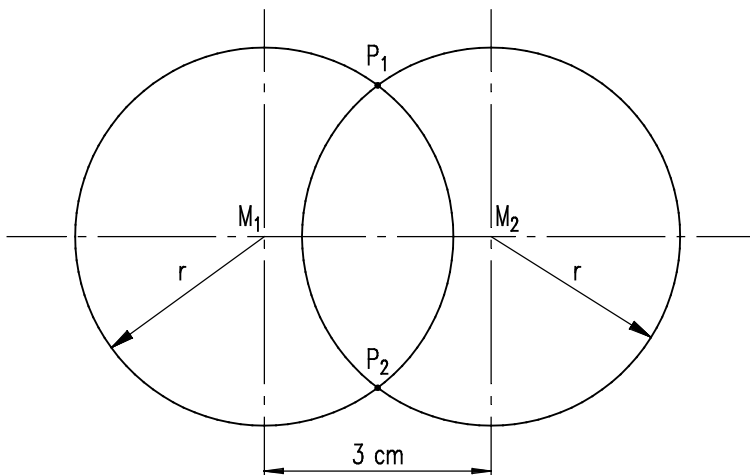
Konstruieren Sie alle Punkte, die von den beiden Punkten M_1 und M_2 den Abstand $r = 2,5$ cm haben! $M_1 M_2 = 3$ cm.

Lösung

Die gesuchten Punkte liegen:

1. $k(M_1, r)$, d.h. auf dem Kreis um M_1 mit dem Radius r
2. $k(M_2, r)$, d.h. auf dem Kreis um M_2 mit dem Radius r

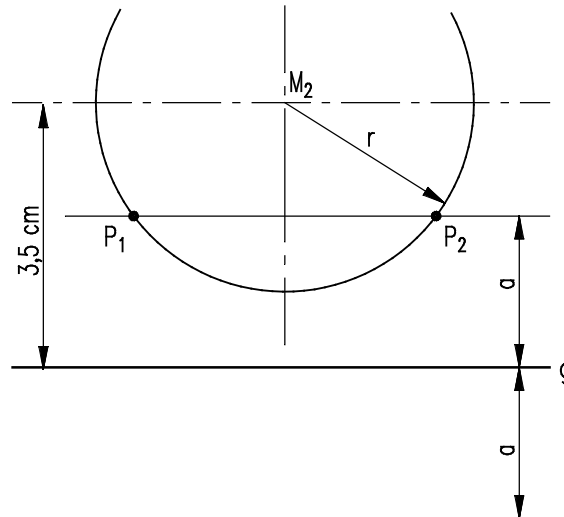
P_1 und P_2 sind die gesuchten Punkte.



Lehrbeispiel 2

Konstruieren Sie alle Punkte, die von M den Abstand $r = 2,5 \text{ cm}$ und von der Geraden g den Abstand $a = 2 \text{ cm}$ haben! Der Punkt M hat von der Geraden g den Abstand $3,5 \text{ cm}$.

Lösung



Die gesuchten Punkte liegen:

1. $k(M, r)$
2. Parallelenpaar zu g im Abstand $a = 2 \text{ cm}$

P_1 und P_2 sind die gesuchten Punkte.

Grundkonstruktionen

Mithilfe dieser Ortslinien lassen sich nun einige geometrische Grundkonstruktionen durchführen, auf denen die Begründung weiter Teile der Geometrie beruht. Ihnen kommt als weitreichende Grundlage eine besondere Bedeutung zu.

• Halbieren einer Strecke

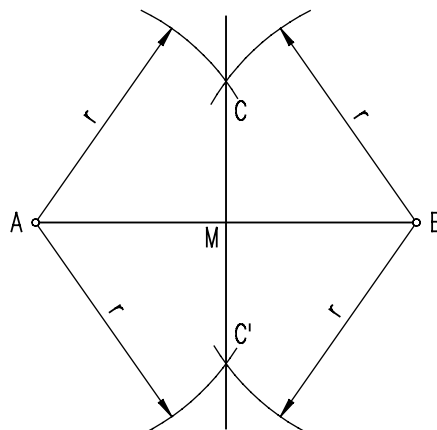


Abbildung 31 Halbierung einer Strecke

Konstruktionstext:

Um A und B werden Kreisbögen mit beliebigem, aber gleich großem Radius r gezeichnet! Die Kreisbögen schneiden sich in C und C'. C wird mit C' verbunden. Der Schnittpunkt mit [AB] ist die Mitte M von [AB]. Die so konstruierte Symmetrieachse CC' steht gleichzeitig senkrecht auf [AB]. Die obige Konstruktion ergibt somit gleichzeitig das Mittellot (die Mittelsenkrechte) auf [AB].

Anmerkung:

Konstruktionen in der Geometrie müssen mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden. Halbieren Sie deshalb in der Geometrie eine Strecke nicht dadurch, dass Sie die Strecke abmessen und von einem Punkt aus die Hälfte abtragen.

Weitere Grundaufgaben beruhen auf der vorangegangenen Konstruktion.

- **Errichten einer Senkrechten in einem Punkt auf einer Geraden**

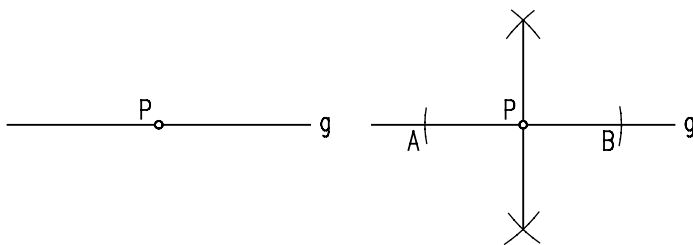


Abbildung 32 Errichten einer Senkrechten

Konstruktionstext:

Um den Punkt P wird mit dem Zirkel nach beiden Seiten ein Kreisbogen gezeichnet, der die Gerade g in A und B schneidet. Damit ist P die Mitte von [AB]. Die Mittelsenkrechte von [AB] ist dann die gesuchte Senkrechte in P auf g.

- **Fällen eines Lotes von einem Punkt auf eine Gerade**

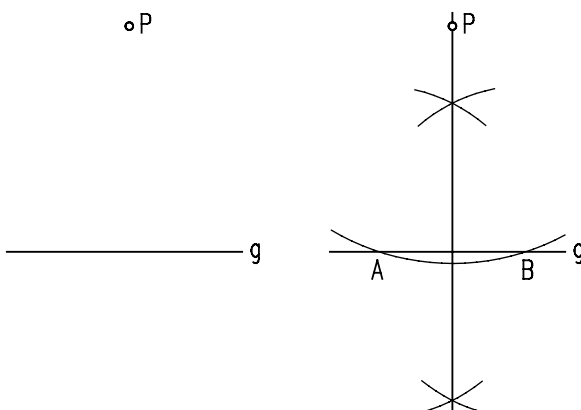


Abbildung 33 Fällen eines Lotes

Konstruktionstext:

Um den Punkt P wird mit dem Zirkel ein Kreisbogen gezeichnet, der die Gerade g in A und B schneidet. P ist damit von A und B gleich weit entfernt. Das Mittellot von [AB] ist das Lot auf der Geraden g durch P.

• Halbieren eines Winkels

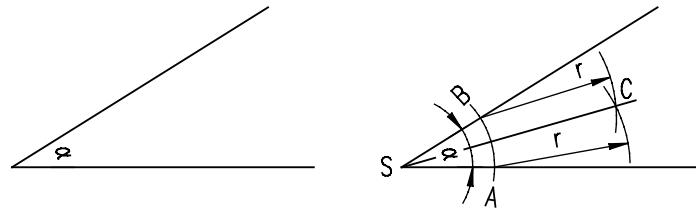


Abbildung 34 Halbieren eines Winkels

Konstruktionstext:

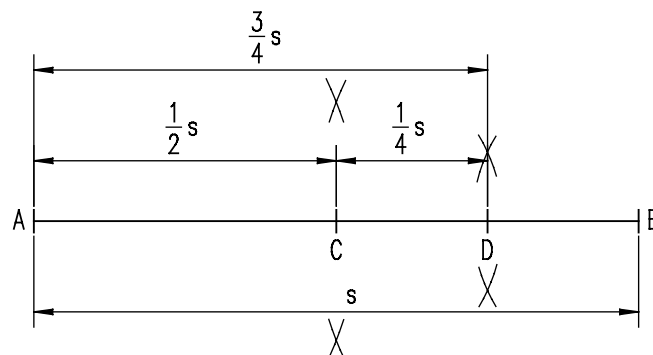
Die Punkte auf der **Winkelhalbierenden** müssen von beiden Schenkeln den gleichen Abstand haben. Mittels eines beliebigen Kreisbogens um den Scheitel S werden auf den beiden Seiten zwei Punkte A und B konstruiert, die damit von S die gleiche Entfernung haben. Um A und B werden Kreisbögen mit beliebigem, aber gleichem Radius r gezeichnet. Sie schneiden sich in Punkt C, der damit von den beiden Schenkeln den gleichen Abstand hat. Die Winkelhalbierende ist dann die Gerade durch C und S.

Die Winkelhalbierende kann auch als Ortslinie aufgefasst werden. Auf ihr liegen alle Punkte, die von 2 sich schneidenden Geraden den gleichen Abstand haben.

Lehrbeispiel 3

Konstruieren Sie $\frac{3}{4}$ einer Strecke $s = 10 \text{ cm}$ durch zweimaliges Halbieren!

Lösung



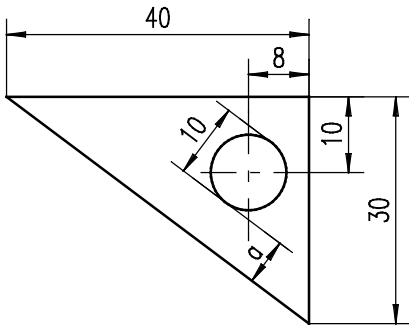
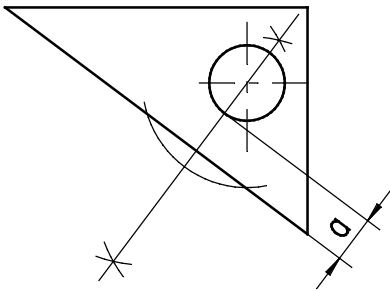
Konstruktionstext:

1. Konstruktion des Mittellotes von [AB] \Rightarrow C
2. Konstruktion des Mittellotes von [CB] \Rightarrow D

Lehrbeispiel 4

Ein Stützblech hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks. Gesucht ist der geringste Abstand a , den die Bohrung von der 3. Dreiecksseite hat.

Konstruieren Sie das Lot zur 3. Dreiecksseite durch den Mittelpunkt der Bohrung und messen Sie dann den Abstand a !

**Lösung**

Der geringste Abstand a ist der senkrechte Abstand der Dreiecksseite von der Bohrung. Deshalb wird das Lot der 3. Dreiecksseite durch den Mittelpunkt des Kreises (Lot von einem Punkt auf eine Gerade) konstruiert.

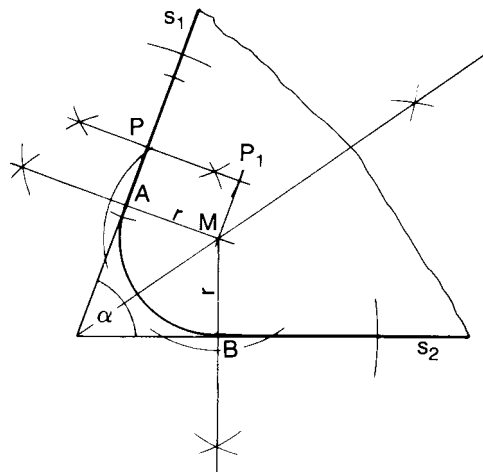
gemessen: $a = 6,5 \text{ mm}$

Lehrbeispiel 5

Zwei Schnittkanten eines Bleches schneiden sich unter dem Winkel $\alpha = 70^\circ$. Die Ecke soll mit einem Kreisbogen mit dem Radius $r = 20 \text{ mm}$ abgerundet werden.

Konstruieren Sie die beiden Übergangspunkte zwischen dem Kreisbogen und den Kanten!

Lösung



Konstruktionstext:

Der Winkel $\alpha = 70^\circ$ wird halbiert! In einem beliebigen Punkt P auf einem der Schenkel (z.B. auf s_1) des Winkels wird die Senkrechte errichtet. Darauf wird die Strecke $PP_1 = r = 20 \text{ mm}$ abgetragen. Dann wird durch P_1 die Parallele zu s_1 gezeichnet! Sie schneidet die Winkelhalbierende in M, dem Mittelpunkt des Kreisbogens. Nun wird von M das Lot auf s_1 und s_2 gefällt. Es schneidet die beiden Schenkel in A und B, den beiden Übergangspunkten. Nun kann der Kreisbogen um M durch A und B gezeichnet werden!

Eine letzte Ortslinie soll noch erwähnt werden. Es ist die Mittelparallele. Auf ihr liegen alle Punkte, die von 2 parallelen Geraden den gleichen Abstand haben.

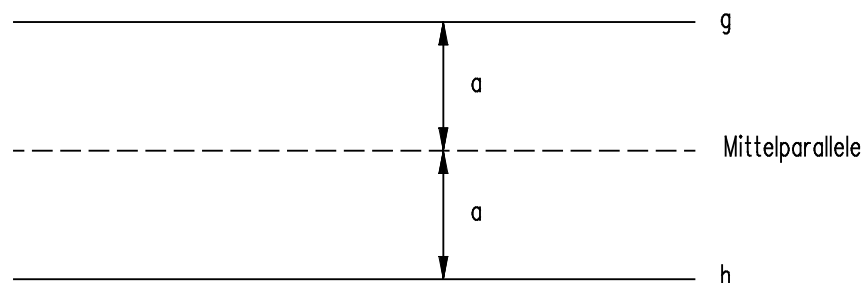


Abbildung 35 Mittelparallele

Umkreis und Inkreis im Dreieck

Werden in einem Dreieck auf den Seiten die Mittelsenkrechten konstruiert, so fällt auf, dass sie sich in einem Punkt schneiden. Der genaue Nachweis erfolgt später.

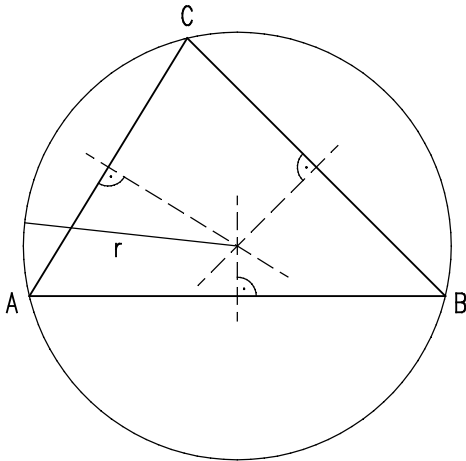


Abbildung 36 Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten

Dieser Punkt hat eine besondere Eigenschaft: Er ist der Mittelpunkt des Umkreises, des Kreises, auf dem alle Eckpunkte des Dreiecks liegen. Sein Radius wird mit r bezeichnet.

Werden im Dreieck die Winkelhalbierenden konstruiert, so fällt auf, dass sie sich ebenfalls in einem Punkt schneiden. Der genaue Nachweis erfolgt später.

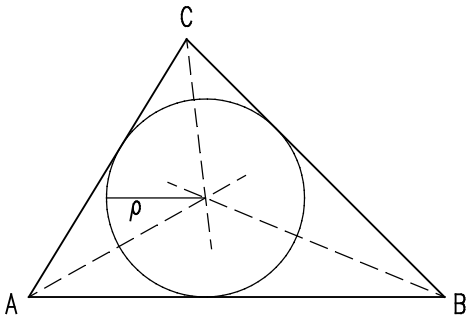


Abbildung 37 Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Dieser Punkt hat eine besondere Eigenschaft: Er ist der Mittelpunkt des Inkreises, des Kreises, der alle Seiten berührt. Sein Radius wird mit ρ bezeichnet.

1.2.2 Kongruenzabbildungen

Gleichheit - Ähnlichkeit - Kongruenz

Zwei Figuren sind dann gleich ($=$), wenn ihre Flächen gleich groß sind, d.h. „gleich“ bedeutet „flächengleich“.

So sind alle Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe einander gleich (Abbildung 38).

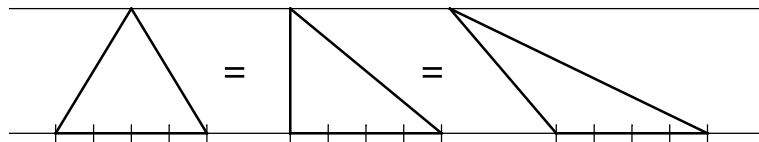


Abbildung 38 Flächengleiche Dreiecke

Zwei Figuren sind einander ähnlich (\sim), wenn sie in ihrer Form (Abbildung 39) übereinstimmen.

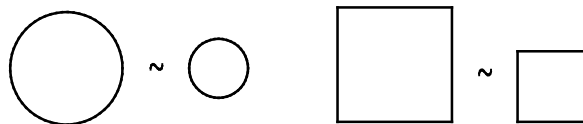


Abbildung 39 Ähnliche Figuren

Stimmen zwei Figuren in ihrer **Größe und Form** überein, so nennt man sie kongruent oder deckungsgleich (Abbildung 40). Das Zeichen dafür ist ein Gleichheitszeichen mit darüber liegender Wellenlinie (\cong). Legt man beide Figuren aufeinander, so decken sie sich vollständig.

Zwei Figuren sind kongruent (\cong), wenn sie in Größe und Form übereinstimmen.

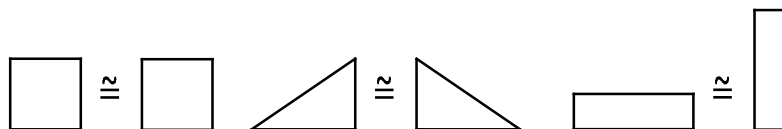


Abbildung 40 Kongruente Figuren

Die Stücke (Seiten, Winkel), die bei der Deckung kongruenter Figuren aufeinander fallen, nennt man gleichliegende oder homologe Stücke.

Die beiden entstehenden Dreiecke in Abbildung 41 sind demnach kongruent, denn durch Umklappen um die Seite \overline{AB} als Achse decken sie sich:

$$\triangle ABC_1 \cong \triangle AC_2B$$

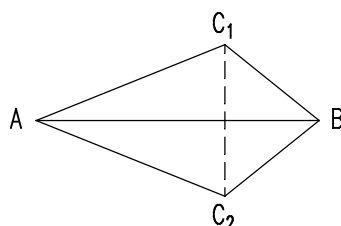


Abbildung 41 Kongruente Dreiecke

In diesem Abschnitt sollen Abbildungen vorgestellt werden, welche kongruente Figuren erzeugen. Die Leitfrage ist hier: Welche „Manipulationen“ können an einer gegebenen Figur durchgeführt werden, damit sie kongruente Bilder erzeugt?

Achsenspiegelung

Unter einer Achsenspiegelung versteht man folgende Abbildung:

Ein Punkt P wird an einer Geraden g gespiegelt, indem vom Punkt P das Lot auf die Gerade gefällt wird (Lotfußpunkt M) und der Abstand $|PM|$ auf der anderen Seite der Geraden abgetragen wird. Der dann entstehende Punkt ist der Spiegelpunkt P' von P .

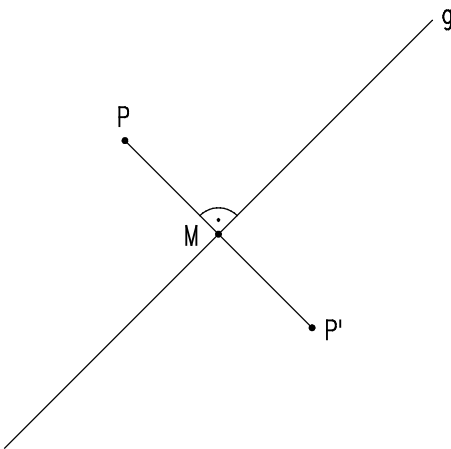
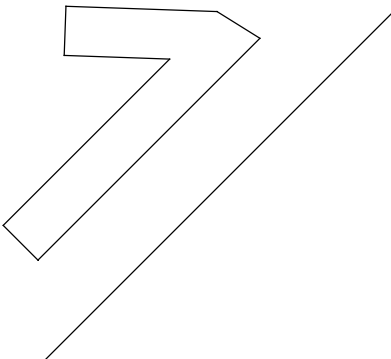


Abbildung 42 Spiegelung eines Punktes

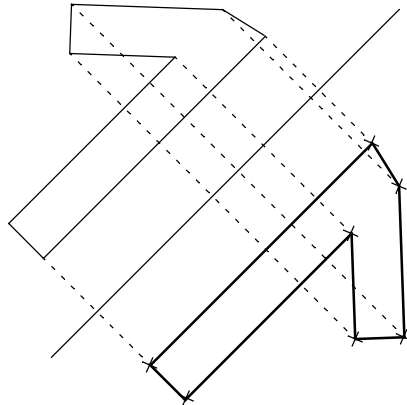
Mit der gleichen Methode können Punkt für Punkt Flächen gespiegelt werden.

Lehrbeispiel 1

Spiegeln Sie die Figur an der eingezeichneten Achse!



Lösung



Parallelverschiebung

Unter der Parallelverschiebung versteht man folgende Abbildung:

Ein Punkt P wird durch einen Verschiebungsvektor \vec{v} auf den Bildpunkt P' verschoben.

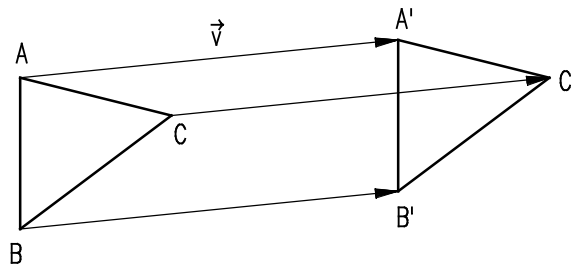
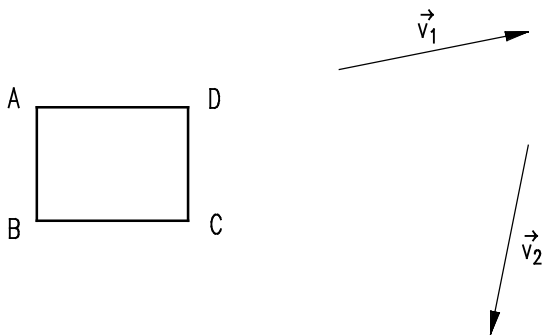


Abbildung 43 Verschiebung

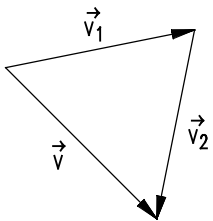
Es können auch mehrere Verschiebungen hintereinander ausgeführt werden. Die Gesamtverschiebung kann durch grafische Addition der Verschiebungsvektoren erreicht werden, indem die Vektoren aneinandergehängt werden. Dies wird auch **Vektoraddition** genannt. Die Gesamtverschiebung reicht dann vom Anfangspunkt des ersten Vektors bis zum Endpunkt des letzten.

Lehrbeispiel 2

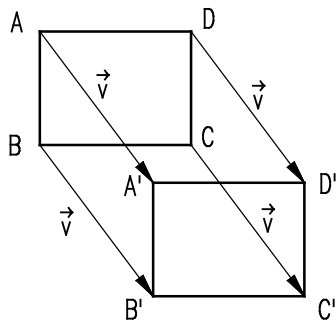
Verschieben Sie die abgebildete Figur um die Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 mittels Vektoraddition!

**Lösung**

1. Vektoraddition



2. Verschiebung

**Drehung**

Unter einer Drehung versteht man folgende Abbildung:

Um den Drehpunkt wird ein Kreis mit dem Radius \overline{DP} gezeichnet. An der Geraden DP wird der Winkel φ abgetragen. Der freie Schenkel des Winkels φ schneidet den Kreisbogen in P'.

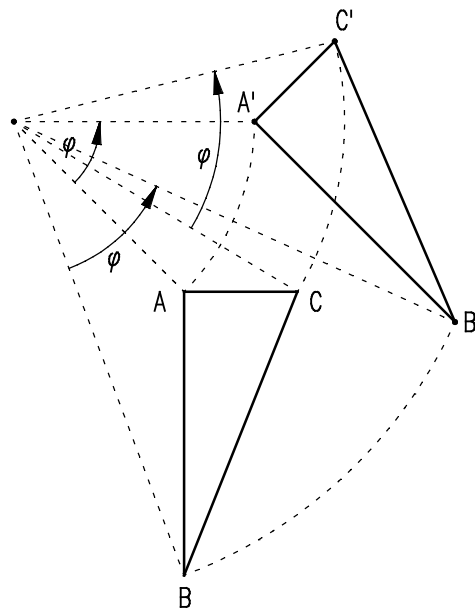


Abbildung 44 Drehung

Eine Drehung um 180° wird auch als **Punktspiegelung** bezeichnet.

1.3 Ähnlichkeit

1.3.1 Zentrische Streckung

Ähnliche Figuren werden durch eine sogenannte zentrische Streckung erzeugt.

Wird eine Fläche (in der Abbildung das Viereck ABCD) von einer punktförmigen Lichtquelle auf eine zu der Fläche parallel verlaufenden Projektionswand projiziert, so entsteht dort eine andere Fläche (Viereck A'B'C'D'). Eine solche Abbildung heißt **zentrische Streckung**. Die neue Fläche ist größer als die projizierte Fläche, hat jedoch dieselbe Form.

Die beiden Flächen sind einander ähnlich.

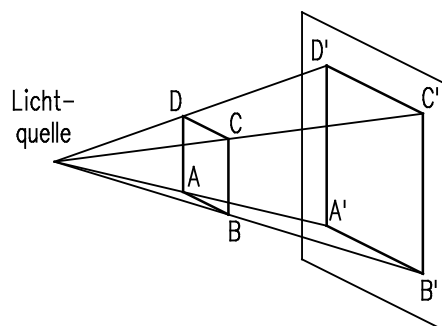


Abbildung 45 Erzeugung ähnlicher Figuren durch zentrische Streckung

1.3.2 Strahlensätze

Die Strahlensätze machen Aussagen über Streckenverhältnisse bei ähnlichen Figuren.

Streckenverhältnis

Beim Aufzeichnen von Werkstücken müssen sehr oft kleine Teile vergrößert oder sehr große Teile verkleinert dargestellt werden. Der Zeichnungsmaßstab gibt dann an, wie viel mal kleiner oder größer das Werkstück gegenüber der Zeichnung ist. So gibt z.B. der Maßstab 1:2 an, dass das Werkstück doppelt so groß ist wie die Zeichnung. Die Angabe 1:2 nennt man ein Verhältnis und liest: „eins zu zwei“. Sie gibt das Verhältnis der Darstellung in der Zeichnung zur Wirklichkeit an.

Dasselbe gilt für Maßstäbe bei Landkarten. Der Maßstab 1:100000 gibt an, dass z.B. die Strecke 1 cm auf der Karte der Strecke 100000 cm oder 1 km in Wirklichkeit entspricht. Ebenso kann man der Angabe 1:100000 auch entnehmen, dass z.B. die Strecke 1 mm auf der Karte 100000 mm oder 100 m in Wirklichkeit entspricht. Verhältnisse enthalten demnach keine Maßeinheiten. Um das Verhältnis zweier Strecken aufzustellen, müssen aber beide Strecken in derselben Maßeinheit gemessen sein.

Unter dem Verhältnis zweier Strecken versteht man den Quotienten ihrer Maßzahlen (beide in der gleichen Maßeinheit gemessen).

Das Verhältnis $a:b = 3:1$ (lies a zu b wie 3 zu 1) gibt an, dass die Strecke a dreimal so lang ist wie die Strecke b. Über die wirkliche Länge der beiden Strecken ist damit nichts ausgesagt. So kann z.B. $a = 6 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$ sein (a ist hierbei dreimal so groß wie b). Das Rechnen mit Verhältnissen wird in der Algebra behandelt. In der Planimetrie soll nur das **Verhältnis** von Strecken untereinander untersucht werden.

Der erste Strahlensatz

Auf einem Strahl (siehe Abbildung 46) werden vom Punkt A aus die Strecken a und b hintereinander abgetragen, sodass $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ ist. Durch die Punkte B und C werden zwei Parallelen gezogen, die einen weiteren Strahl von A aus in D und E schneiden. Dadurch werden auf dem zweiten Strahl die beiden Strecken $\overline{AD} = c$ und $\overline{DE} = d$ abgeteilt. Der erste Strahlensatz sagt nun etwas über das Verhältnis der Strecke a, b, c und d aus.

Erster Strahlensatz:

Werden von einem Punkt ausgehende Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DE} \quad \text{oder}$$

$$a : b = c : d$$

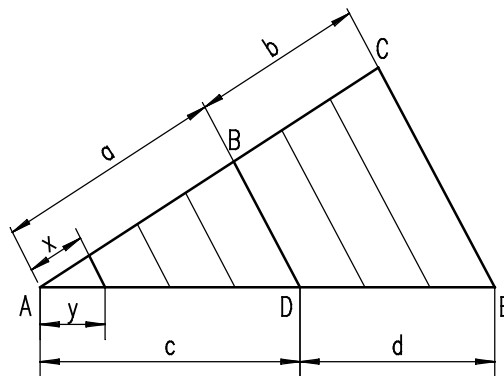


Abbildung 46 Erster Strahlensatz

Lehrbeispiel 1

Beweisen Sie den ersten Strahlensatz!

Lösung

Vor.: $BD \parallel CE$

Beh.: $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DE}$ oder

$$a : b = c : d$$

Bew.: Die Strecke x ist in a p-mal enthalten (in Abbildung 46 ist p = 4), in b q-mal enthalten.

$$a = p \cdot x$$

$$(1) \quad b = q \cdot x$$

Die Strecke y ist in c ebenfalls p-mal und in d q-mal enthalten.

$$c = p \cdot y$$

$$(2) \quad d = q \cdot y$$

$$\text{aus (1):} \quad a : b = (p \cdot x) : (q \cdot x)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{p \cdot x}{q \cdot x}$$

$$(1') \quad \frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

$$\text{aus (2):} \quad c : d = (p \cdot y) : (q \cdot y)$$

$$\frac{c}{d} = \frac{p \cdot y}{q \cdot y}$$

$$(2') \quad \frac{c}{d} = \frac{p}{q}$$

$$(1') = (2') \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\underline{\underline{a : b = c : d}} \quad (\text{w.z.b.w})$$

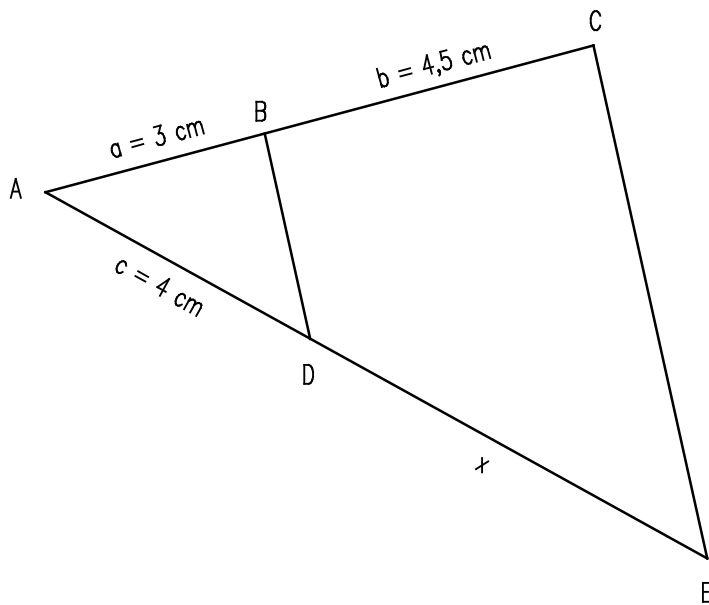
Der erste Strahlensatz sagt somit etwas über die 4 Strecken a, b, c und d. Sind 3 Strecken gegeben, so kann die 4. Strecke mithilfe des ersten Strahlensatzes konstruiert (bzw. berechnet) werden.

Lehrbeispiel 2

Konstruieren Sie die Strecke x zu den Strecken $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4,5 \text{ cm}$ und $c = 4 \text{ cm}$, wenn $a:b = c:x$!

Lösung

Auf zwei von A ausgehenden Strahlen werden die Strecke $\overline{AB} = a = 3 \text{ cm}$, $\overline{BC} = b = 4,5 \text{ cm}$ und $\overline{AD} = c = 4 \text{ cm}$ abgetragen.



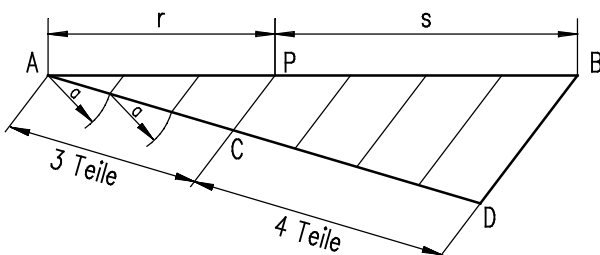
Die gezeichnete Strecke $[DE] = x$ erhält man, wenn durch C eine Parallele zu $[BD]$ gezogen wird.

Nach dem ersten Strahlensatz gilt dann:

$$a : b = c : x$$

Lehrbeispiel 3

Teilen Sie die Strecke $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$ im Verhältnis $r:s = 3:4$!

Lösung

Auf einem zweiten Strahl von A aus werden zuerst 3 gleiche Teile a (die Länge von a ist beliebig) bis C und dann 4 gleiche Teile a bis D mit dem Zirkel abgetragen. Danach

wird D mit B verbunden und durch C eine Parallele zu [DB] gezogen. Die Strecke [AB] wird damit in 2 Teilstrecken r und s aufgeteilt, die sich gemäß dem ersten Strahlensatz wie

$$r : s = 3 : 4$$

verhalten.

Der zweite Strahlensatz

Einen weiteren Zusammenhang von Strecken auf Strahlen, die von zwei Parallelen geschnitten werden, gibt der zweite Strahlensatz an:

Zweiter Strahlensatz:

Werden von einem Punkt ausgehende Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die beiden Abschnitte der Parallelen wie die vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf den Strahlen.

$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{SA} : \overline{SC} \text{ oder}$$

$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{SB} : \overline{SD}$$

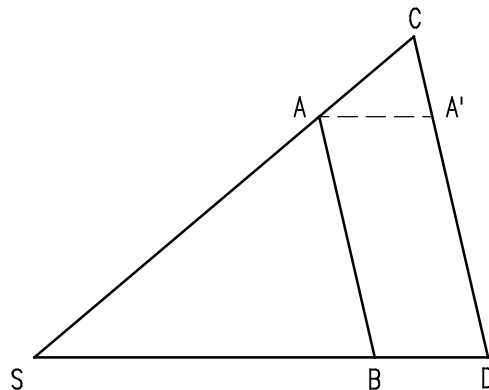


Abbildung 47 Zweiter Strahlensatz

Lehrbeispiel 4

Beweisen Sie den zweiten Strahlensatz!

Lösung

Vor.: $[AB] \parallel [CD]$

Beh.: $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{SA} : \overline{SC}$

Bew.: Da $[AA']$ parallel zu $[SD]$, gilt nach dem ersten Strahlensatz (C ist Scheitel und CS bzw. CD sind die Strahlen)

$$(1) \quad \overline{A'D} : \overline{CD} = \overline{SA} : \overline{SC}$$

$$(2) \quad \overline{A'D} = \overline{AB} \text{ (Parallelogramm ABDA')}$$

$$(2) \text{ in } (1): \quad \underline{\underline{\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{SA} : \overline{SC}}} \text{ (w.z.b.w)}$$

Lehrbeispiel 5

Beim Blick von einem Turm mit der Höhe $H = 90$ m wird von einem $l = 200$ m entfernten Haus mit der Höhe $h = 20$ m die Strecke s verdeckt.

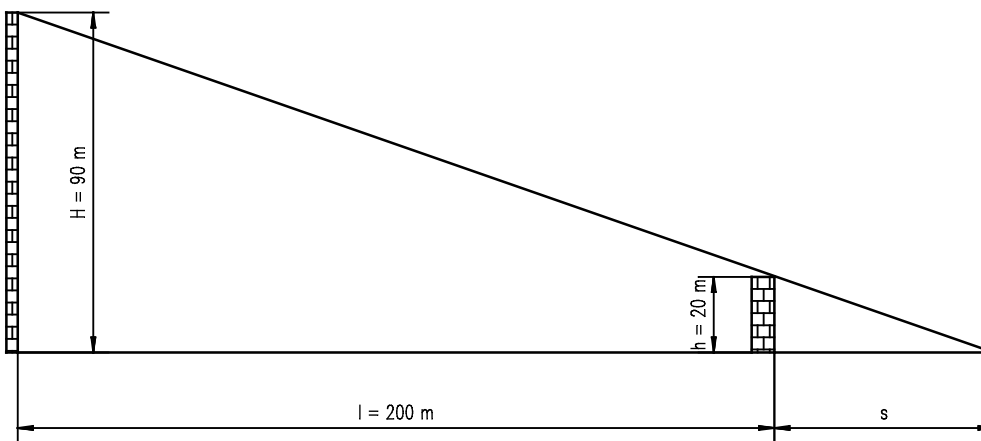
Ermitteln Sie zeichnerisch s !

Lösung

$M = 1:2000$

gemessener Wert für s : $2,9 \text{ cm} \hat{=} 58 \text{ m}$

$s = 58 \text{ m}$

**1.3.3 Eigenschaften ähnlicher Figuren**

Figuren sind dann ähnlich, wenn sie in ihrer Form übereinstimmen.

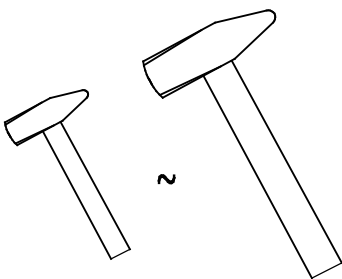


Abbildung 48 Ähnliche Figuren

Ähnlichkeit von Figuren wird mit einer Wellenlinie (\sim) angegeben.

Alle Vergrößerungen oder Verkleinerungen ergeben ähnliche Figuren. So sind z.B. alle Kreise einander ähnlich, ebenso alle gleichseitigen Dreiecke oder alle Quadrate.

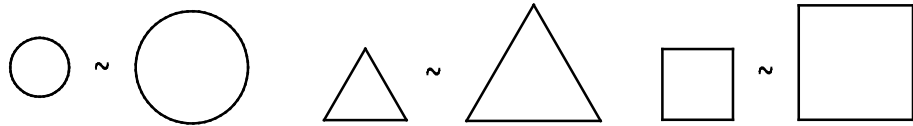
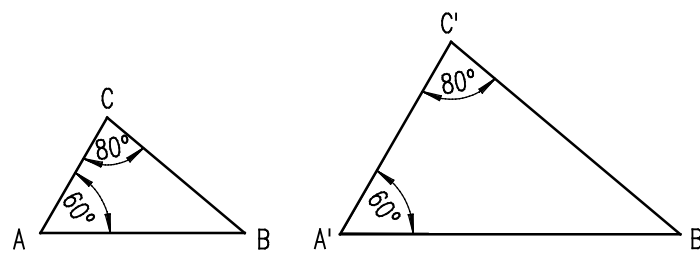


Abbildung 49 Ähnliche Figuren durch Vergrößerung

Ein weiteres Kennzeichen der Ähnlichkeit von Figuren ist die Gleichheit der Winkel (z.B. bei allen gleichseitigen Dreiecken betragen alle Winkel 60°).

Aber auch andere Dreiecke sind einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben. Dazu genügt es, wenn jeweils zwei Winkel bekannt sind, da der dritte Winkel aus der Winkelsumme im Dreieck errechenbar ist.



Legt man das linke Dreieck auf das rechte, so erhält man folgendes Bild:

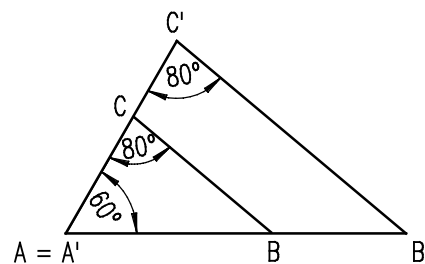


Abbildung 50 Ähnliche Dreiecke

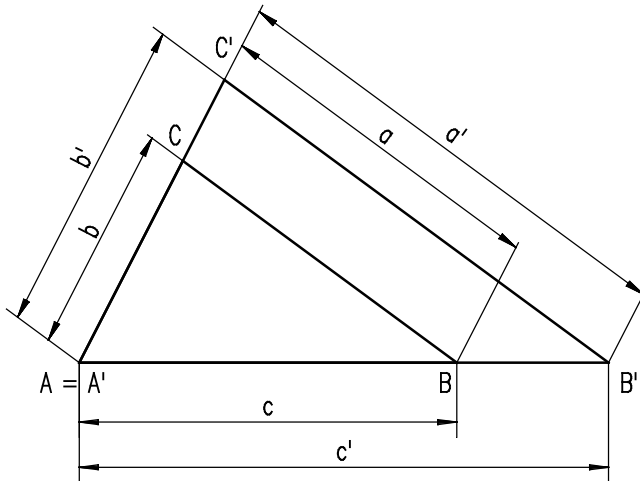
Lehrbeispiel 1

Ein Dreieck ABC hat die Seiten $a = 4,5 \text{ cm}$; $b = 3 \text{ cm}$; $c = 5 \text{ cm}$.

Konstruieren Sie die Seite a' im ähnlichen Dreieck $A'B'C'$ mit der Seite $c' = 7 \text{ cm}$!

Lösung

gemessen: $a' = 6,3 \text{ cm}$



Ähnliche Dreiecke haben gleiche Winkel.

Demnach gilt: $[BC] \parallel [B'C']$

C' wird mit der Parallelen zu $[BC]$ durch B' konstruiert!

1.4 Kongruenzsätze und besondere Linien und Punkte im Dreieck**Bezeichnungen am Dreieck**

Schneiden sich drei nichtparallele Geraden, so entsteht ein Dreieck (Ausnahme: die drei nichtparallelen Geraden schneiden sich in einem Punkt). Das Dreieck ist eine Figur, die auch in der Technik sehr häufig vorkommt. Es ist deshalb wichtig, Dreiecke zu konstruieren und berechnen zu können.

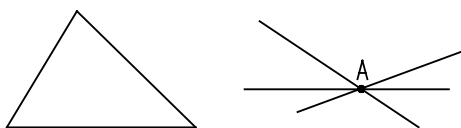


Abbildung 51 Schnitt dreier Geraden

Die Eckpunkte eines Dreiecks werden mit Großbuchstaben (A, B, C) bezeichnet, und zwar von A nach B und C im **Gegen**uhrzeigersinn.

Die Seiten werden mit Kleinbuchstaben (a, b, c) bezeichnet, und zwar nach dem gegenüberliegenden Eckpunkt, also z.B. die dem Eckpunkt A gegenüberliegende Seite mit a.

Die Winkel werden mit griechischen Kleinbuchstaben (α , β , γ) bezeichnet, und zwar liegt beim Eckpunkt A der Winkel α , beim Eckpunkt B der Winkel β und beim Eckpunkt C der Winkel γ .

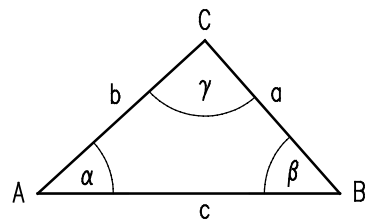


Abbildung 52 Bezeichnungen am Dreieck

• Einteilung der Dreiecke

Einteilung der Dreiecke nach den Seiten

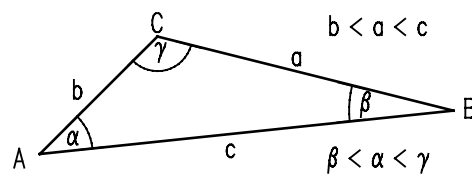


Abbildung 53 Ungleichseitiges Dreieck

Sind alle drei Dreiecksseiten verschieden, so spricht man von einem ungleichseitigen Dreieck.

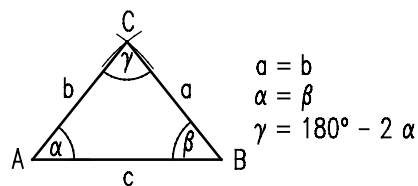


Abbildung 54 Gleichschenkliges Dreieck

Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich, so bezeichnet man es als gleichschenkl.

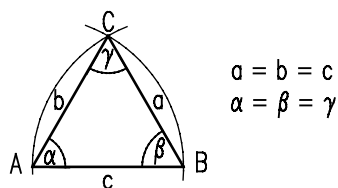


Abbildung 55 Gleichseitiges Dreieck

Sind alle drei Seiten eines Dreiecks gleich, so bezeichnet man es als gleichseitig.

- Einteilung der Dreiecke nach Winkeln

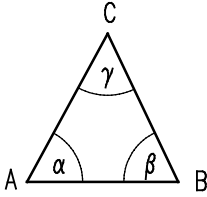
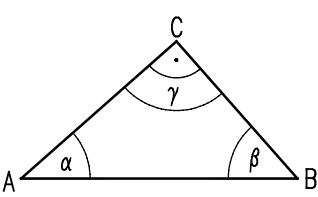
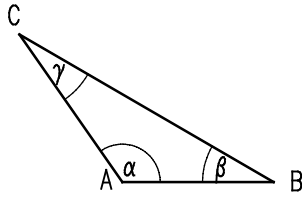
Spitzwinkliges Dreieck	Rechtwinkliges Dreieck	Stumpfwinkliges Dreieck
		
$\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$	$\alpha \text{ oder } \beta \text{ oder } \gamma = 90^\circ$	$\alpha \text{ oder } \beta \text{ oder } \gamma > 90^\circ$

Abbildung 56 Spitzwinkliges, rechtwinkliges und stumpfwinkliges Dreieck

Winkelsumme im DreieckLehrbeispiel 1

Beweisen Sie, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt!

Lösung

Vor.: Wechselwinkel an Parallelen sind gleich.
Gestreckter Winkel beträgt 180° .

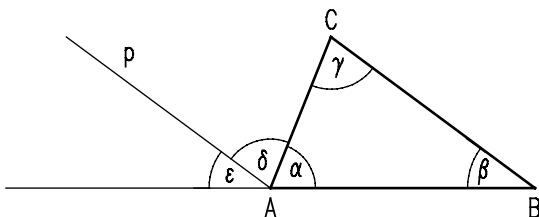
Beh.: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Bew.: Wird eine Parallele p zu $[BC]$ durch A gezogen, dann ist:

- (1) $\alpha + \delta + \varepsilon = 180^\circ$ (gestreckter Winkel)
- (2) $\varepsilon = \beta$ (Stufenwinkel, da $p \parallel BC$)
- (3) $\delta = \gamma$ (Wechselwinkel, da $p \parallel BC$)

(2) und (3) in (1) eingesetzt, \Rightarrow

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (w.z.b.w.)

**Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° .**

Folgerungen:

1. Sind zwei Winkel eines Dreiecks gegeben, so lässt sich der dritte berechnen.
2. In jedem Dreieck kann nur ein rechter und erst recht nur ein stumpfer Winkel vorkommen.
3. Im rechtwinkligen Dreieck müssen die beiden spitzen Winkel zusammen 90° ergeben, sie sind Komplementwinkel.
4. Die drei Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ ($= 180^\circ : 3$)

Lehrbeispiel 2

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist $\gamma = 90^\circ$ und $\alpha = 47^\circ 15'$.

Berechnen Sie β !

Lösung

Es ist $\alpha + \beta = 90^\circ$

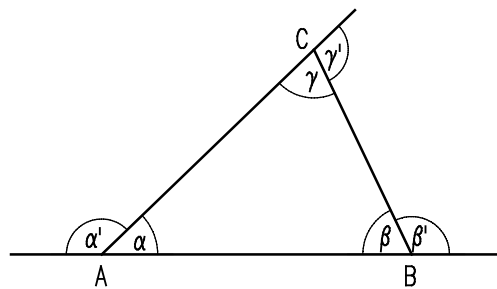
$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\beta = 90^\circ - 47^\circ 15' = \underline{\underline{42^\circ 45'}}$$

Lehrbeispiel 3

Beweisen Sie den Satz:

Die Außenwinkel eines Dreiecks sind jeweils gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.



Lösung

Der Beweis wird hier nur für α' durchgeführt.

Vor.: (1) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Beh.: (2) $\alpha' = \beta + \gamma$

(3) $\beta' = \alpha + \gamma$

(4) $\gamma' = \alpha + \beta$

Bew.: (5) $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ (Nebenwinkel)

(6) $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$ (aus Voraussetzung (1))

(6)in(5): $\alpha' = 180^\circ - (180^\circ - \beta - \gamma)$

$$\alpha' = 180^\circ - 180^\circ + \beta + \gamma$$

$$\underline{\underline{\alpha' = \beta + \gamma}}$$

(Beweisen Sie die Behauptungen (3) und (4) selbst!)

Lehrbeispiel 4

Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck und messen Sie alle Seiten und Winkel! Vergleichen Sie die Summe bzw. die Differenz zweier Seiten mit der dritten Seite! Vergleichen Sie die Größen der Winkel und die Größen der Seiten miteinander!

Lösung

Werden alle Messungen durchgeführt, fallen folgende Beziehungen auf:

$$\begin{array}{ll} a + b > c & a - b < c \\ a + c > b & a - c < b \\ b + c > a & c - b < a \end{array}$$

(Wobei bei der Differenzbildung immer die kleinere von der größeren Seite subtrahiert wird!)

und: Je länger eine Seite eines Dreiecks ist, desto größer ist auch der Winkel, der ihr gegenüberliegt.

In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite und die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite. Außerdem liegt der längsten Seite auch der größte Winkel gegenüber.

Lehrbeispiel 5

Beweisen Sie den Satz:

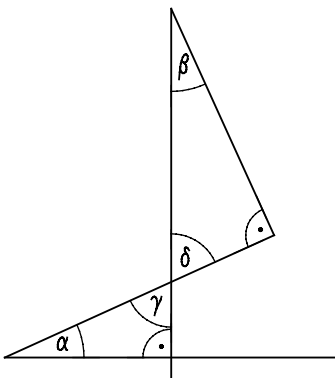
Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich groß oder ergänzen sich zu 180° .

Lösung

Der Beweis wird nur für den ersten Teil des Satzes geführt!

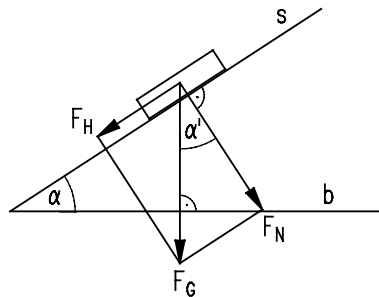
Vor.: Schenkel stehen paarweise aufeinander senkrecht

Beh.: $\alpha = \beta$



$$\begin{array}{lll} \text{Bew.:} & (1) & \alpha + \gamma = 90^\circ \quad (\text{Winkelsumme}) \\ & (2) & \beta + \delta = 90^\circ \quad (\text{Winkelsumme}) \\ & (3) & \gamma = \delta \quad (\text{Scheitelwinkel}) \\ (3) \text{ in } (1) \Rightarrow (4) & & \alpha + \delta = 90^\circ \\ \text{aus } (2) \Rightarrow (2') & & \delta = 90^\circ - \beta \\ (2') \text{ in } (4): \alpha + 90^\circ - \beta = 90^\circ & & | - 90^\circ + \beta \\ \underline{\underline{\alpha = \beta}} & & (\text{w.z.b.w.}) \end{array}$$

Anwendung: Schiefe Ebene



Da $F_G \perp b$ und $F_N \perp s \Rightarrow \underline{\underline{\alpha' = \alpha}}$

(Die Schenkel von α' und die Schenkel von α stehen paarweise aufeinander senkrecht.)

Kongruenzsätze

Die folgenden Kongruenzsätze liefern Aussagen darüber, wann zwei Dreiecke kongruent sind. Sie dienen als Vorbereitung auf die Dreieckskonstruktionen, bei der aus gegebenen Größen ein Dreieck eindeutig konstruiert werden soll. Mithilfe der Kongruenzsätze kann man genau das nachweisen.

Aus der Definition der Kongruenz ergibt sich der

1. Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (SSS).

Kongruente Dreiecke entstehen auch, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. In Abbildung 57 sind c , b und der eingeschlossene Winkel α gegeben.

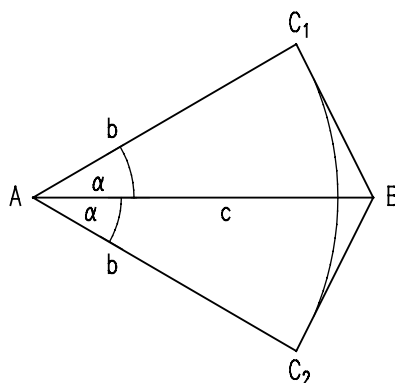


Abbildung 57 2. Kongruenzsatz

Durch Klappen um \overline{AB} als Achse decken sich die beiden Dreiecke.

2. Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS).

Wie später gezeigt wird, gilt dieser Satz nur uneingeschränkt, wenn es sich um den **eingeschlossenen** Winkel handelt.

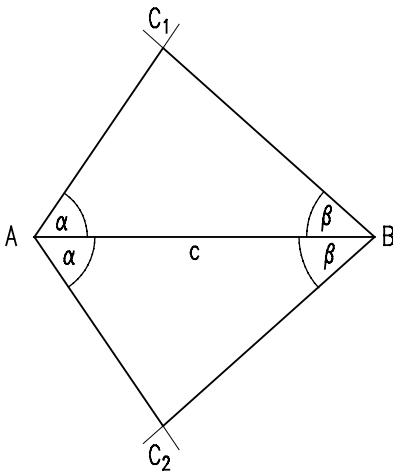


Abbildung 58 Kongruenzsatz WSW

Sind von einem Dreieck zwei Winkel und eine Seite gegeben, so ist ihre Lage zueinander ohne Bedeutung. In Abbildung 58 sind c , α und β , in Abbildung 59 c , β und γ gegeben.

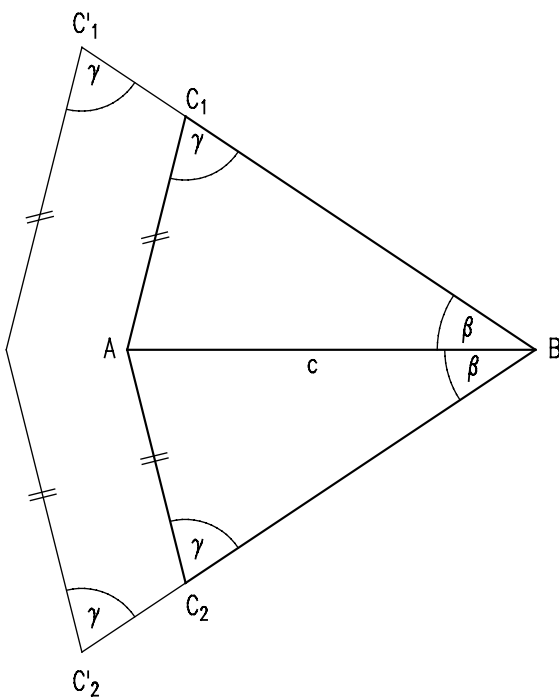


Abbildung 59 Kongruenzsatz SWW

Auch hier decken sich die Dreiecke durch Umklappen um \overline{AB} als Achse.

3. Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (WSW oder SSW).

Der 2. Kongruenzsatz schränkt die Kongruenz von Dreiecken aus zwei Seiten und einem Winkel auf den eingeschlossenen Winkel ein. Sind von Dreiecken zwei Seiten und ein **nicht eingeschlossener** Winkel gegeben, so gibt es nur in gewissen Fällen Kongruenz.

Geg.: $c = 3,4 \text{ cm}$; $a = 4,1 \text{ cm}$; $\alpha = 40^\circ$

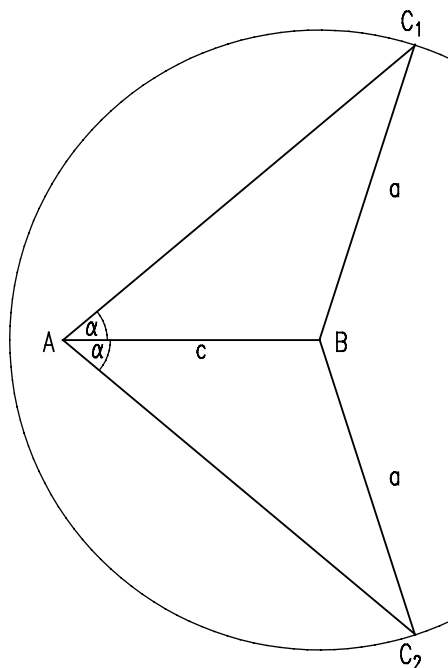


Abbildung 60 Zum 4. Kongruenzsatz

Geg.: $c = 4,1 \text{ cm}$; $a = 3,4 \text{ cm}$; $\alpha = 40^\circ$

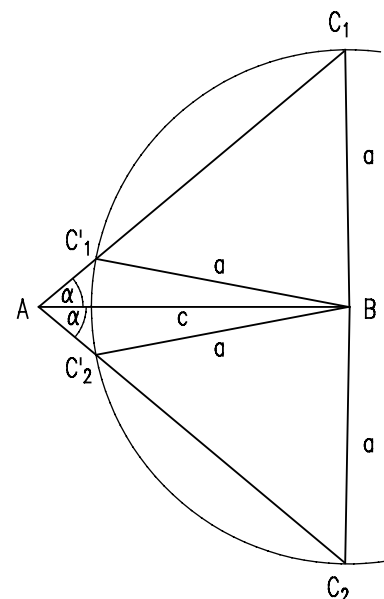


Abbildung 61 Zum 4. Kongruenzsatz

Abbildung 61 kann entnommen werden, dass vier Dreiecke entstehen, wenn die Seite a kleiner ist als die Seite c . Zwei Dreiecke sind jeweils kongruent, aber nicht alle vier. Hier gibt es also zwei voneinander verschiedene Dreiecke, die jedoch beide die gestellten Bedingungen $c = 4,1 \text{ cm}$; $a = 3,4 \text{ cm}$; $\alpha = 40^\circ$ erfüllen.

Zwei Lösungen gibt es immer dann, wenn der Kreisbogen mit der kleineren Seite (Seite a in Abbildung 61) den freien Schenkel des gegenüberliegenden Winkels (freier Schenkel des Winkels α in Abbildung 61) in zwei Punkten schneidet.

Ist die Seite $a > c$, so gibt es nur einen Schnittpunkt und demnach auch nur eine Lösung (Abbildung 60). Der gegebene Winkel muss dann der größeren der beiden Seiten gegenüberliegen.

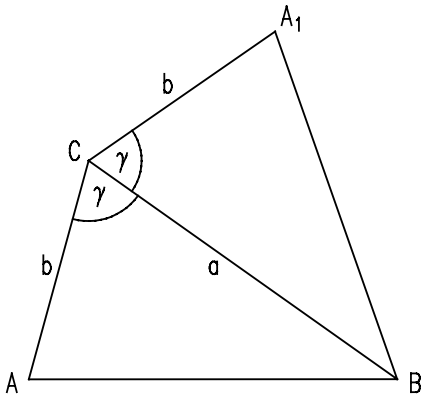
4. Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem „Gegenwinkel“ der größeren von diesen beiden Seiten übereinstimmen (SsW).

Lehrbeispiel 6

Gegeben: $\triangle ABC$ aus $a = 5 \text{ cm}$; $b = 3 \text{ cm}$; $\gamma = 70^\circ$

Untersuchen Sie, ob die Lösung eindeutig ist!

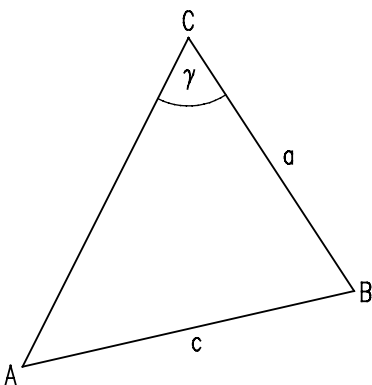
Lösung

Die Lösung ist eindeutig, da von dem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind (2. Kongruenzsatz SWS). Die Abbildung bestätigt dies.

Lehrbeispiel 7

Gegeben: $\triangle ABC$ aus $a = 4 \text{ cm}$; $c = 4,5 \text{ cm}$; $\gamma = 60^\circ$

Untersuchen Sie, ob die Lösung eindeutig ist!

Lösung

Die Lösung ist eindeutig. Der gegebene Winkel liegt der größeren der beiden Seiten gegenüber (4. Kongruenzsatz SsW).

Dreieckskonstruktionen

Charakteristisch bei den eben vorgestellten Kongruenzsätzen ist, dass in allen vier Sätzen jeweils auf 3 Bestimmungsstücke Bezug genommen wurde: 3 Seiten, oder 2 Seiten und ein Winkel, oder eine Seite und zwei Winkel (einen Kongruenzsatz mit 3 Winkeln gibt es nicht, da die Dreiecke dadurch nicht eindeutig bestimmt sind: sie sind nur ähnlich).

Folgerung:

Zur Konstruktion eines Dreiecks sind drei Bestimmungsstücke notwendig. Dabei reicht die Angabe von drei Winkeln nicht.

Bei den Dreieckskonstruktionen geht es nun darum, aus drei gegebenen Stücken das Dreieck - wenn möglich - eindeutig zu konstruieren. Das Verfahren der Konstruktion geschieht in 5 Schritten:

1. Planfigur

In der Planfigur wird ein allgemeines Dreieck ohne Beachtung der gegebenen Maße gezeichnet und die gegebenen Größen werden deutlich markiert hervorgehoben. Es dient der Klärung der Lagen. Es gibt oft die Schwierigkeit, ein wirklich allgemeines Dreieck zu zeichnen, also kein rechtwinkliges oder gleichschenkliges oder gleichseitiges. Eine gute Hilfe bildet folgende „Faustformel“:

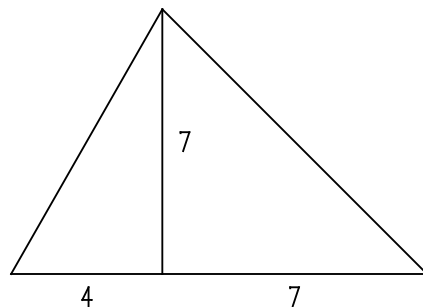


Abbildung 62 Das allgemeine Dreieck

2. Plantext

Der Plantext ist ein Plan zur Lösung der Aufgabe mithilfe von Ortslinien in Kurzform, mit Stichworten, Abkürzungen und Symbolen.

3. Konstruktionsfigur

Die Konstruktion ist die zeichnerische Lösung unter Benutzung der gegebenen Maße.

4. Konstruktionstext

Der Konstruktionstext ist eine eindeutige Beschreibung der Konstruktion, sodass die Konstruktion (auch von anderen) ausgeführt werden kann.

5. Determination

Die Determination ist eine Untersuchung, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist und ob die Lösung eindeutig ist.

Dreieckskonstruktion aus gegebenen Seiten

Lehrbeispiel 8

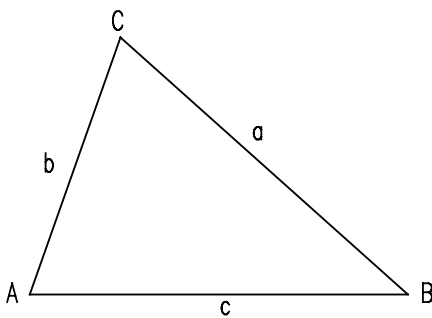
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 4 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ und $c = 5 \text{ cm}$!

Geg.: $a = 4 \text{ cm}$; $b = 6 \text{ cm}$; $c = 5 \text{ cm}$

Ges.: Planfigur, Plantext, Konstruktionsfigur, Konstruktionstext, Determination

Lösung

Planfigur:



Plantext:

Gezeichnet wird $\overline{AB} = c$

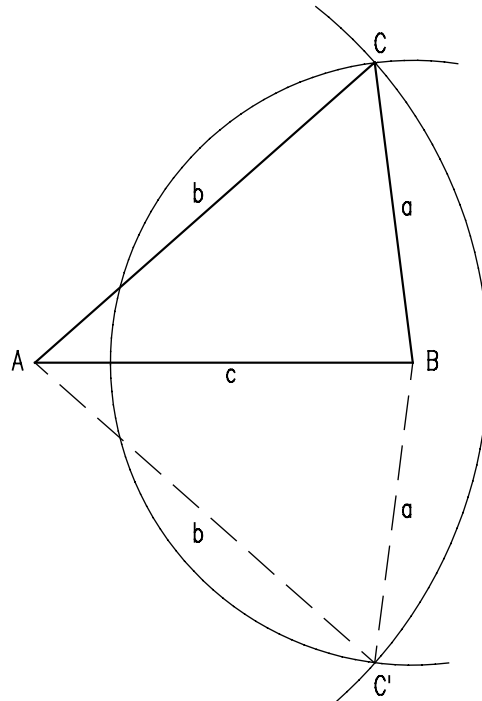
C liegt

1. k (A, b)
2. k (B, a)

Anmerkung:

Der Plantext soll ja in möglichst kurzer Form einen Plan zur Lösung darstellen. Durch den ersten Satz des Plantextes sind schon zwei Ecken (A und B) des Dreiecks angegeben. Es muss nur noch die fehlende Ecke C mithilfe zweier geometrischer Orte bestimmt werden. Dazu werden die bekannten Abkürzungen und Symbole verwendet.

Konstruktionsfigur:



Anmerkung:

Die Konstruktionsfigur muss so genau wie möglich sein. Die Konstruktionslinien müssen stehen bleiben.

Konstruktionstext:

Gezeichnet wird die Strecke $c = 5 \text{ cm}$ mit den Endpunkten A und B. Dann wird um A ein Kreis mit dem Radius $b = 6 \text{ cm}$ und um B ein Kreis mit dem Radius $a = 4 \text{ cm}$ geschlagen. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind C und C'. Dreieck ABC bzw. ABC' ist das gesuchte Dreieck.

Determination:

Damit sich die Kreise um A und B schneiden, muss $a + b > c$ sein. (Ebenso gilt: $a + c > b$ und $b + c > a$.)

Nach dem Kongruenzsatz SSS sind die Dreiecke ABC und ABC' kongruent.

Vereinbarung:

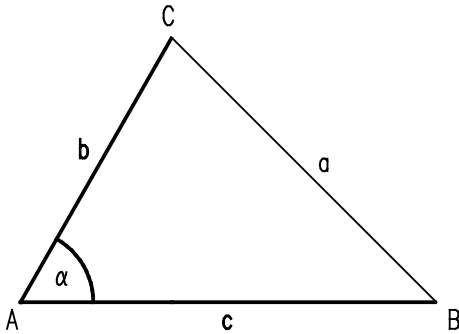
Bei allen folgenden Konstruktionen wird bei kongruenten Figuren immer das Dreieck als Lösung gewählt, bei dem die Punkte A, B, C im mathematisch positiven Umlaufsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) aufeinander folgen.

Dreieckskonstruktionen aus Seiten und WinkelnLehrbeispiel 9Geg.: $c = 5 \text{ cm}$; $\alpha = 40^\circ$; $b = 4,5 \text{ cm}$

Ges.: Planfigur, Plantext, Konstruktionstext.

Lösung

Planfigur:



Plantext:

Gezeichnet wird $[AB] = c$

- C liegt
1. auf dem freien Schenkel des Winkels α
 2. auf $k(A, b)$

Konstruktionstext:

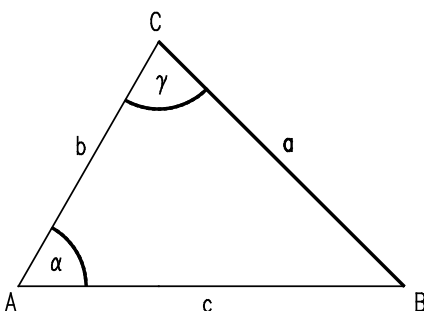
Gezeichnet wird die Strecke $c = 5 \text{ cm}$ mit den Endpunkten A und B. An $[AB]$ wird in A der Winkel $\alpha = 40^\circ$ abgetragen. Um A wird ein Kreis mit dem Radius $b = 4,5 \text{ cm}$ gezeichnet. Er schneidet den freien Schenkel des Winkels α in C.

*Fertigen Sie die Konstruktionsfigur zur Übung selbst an!*Lehrbeispiel 10Geg.: $a = 6 \text{ cm}$; $\alpha = 55^\circ$; $\gamma = 30^\circ$

Ges.: Planfigur, Plantext, Konstruktionsfigur, Konstruktionstext.

Lösung

Planfigur:



Plantext:

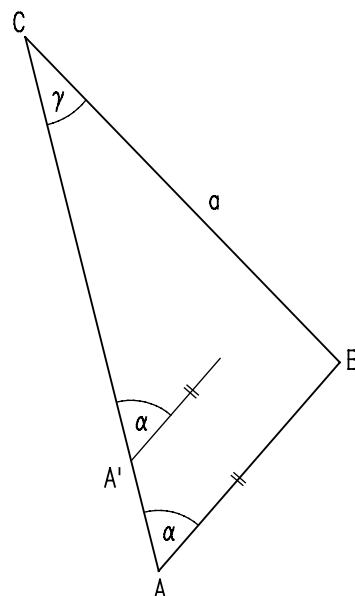
Gezeichnet wird $[BC] = a$

- A liegt
1. auf dem freien Schenkel des Winkels γ
 2. auf einer Parallelen durch B zum freien Schenkel des Winkels α . (α wird in einem beliebigen Punkt A' , der auf dem freien Schenkel von γ liegt, angetragen!)

Konstruktionstext:

Gezeichnet wird die Strecke $a = 6 \text{ cm}$ mit den Endpunkten B und C. An $[BC]$ in C wird der Winkel $\gamma = 30^\circ$ angetragen. In einem beliebigen Punkt A' auf dem freien Schenkel des Winkels γ wird der Winkel $\alpha = 55^\circ$ angetragen! A erhält man durch Verschieben des freien Schenkels des Winkels α durch B.

Konstruktionsfigur:



Besondere Linien und Punkte im Dreieck

Außer den Seiten und Eckpunkten gibt es im Dreieck noch einige andere Linien und Punkte mit besonderen Eigenschaften.

• **Mittellote und Umkreis**

Jedes beliebige Dreieck hat einen Umkreis, d. h., dass es für jedes Dreieck einen Kreis gibt, auf dem jeweils alle drei Eckpunkte liegen.

Wird in Abbildung 63 zunächst nur die Seite $[AB]$ betrachtet, gibt es unendlich viele Kreise, die durch A und B gehen. Die Mittelpunkte all dieser Kreise liegen auf dem Mittellot von $[AB]$ (z.B. M_1, M_2, M_3).

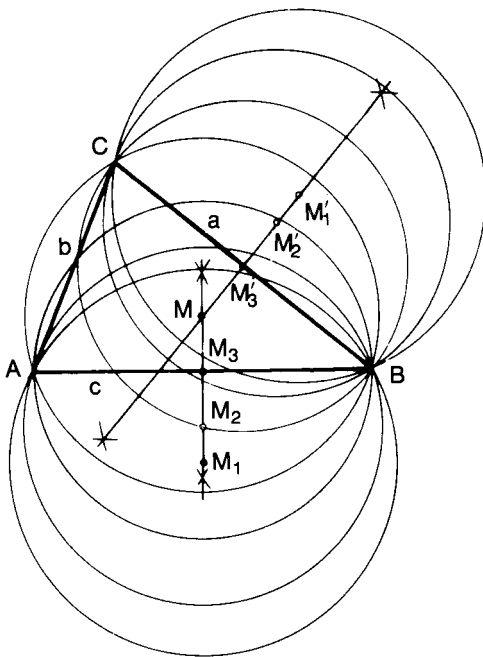


Abbildung 63 Mittellote und Umkreis

Einer dieser Kreise geht auch durch den Eckpunkt C und ist damit der Umkreis. Zur weiteren Bestimmung des Umkreismittelpunktes wird die Seite [BC] betrachtet.

Alle Mittelpunkte von Kreisen, die durch B und C gehen, liegen auf dem Mittellot von [BC] (M_1' , M_2' , M_3'). Der Umkreis muss durch A, B und C gehen, er muss demnach auf dem Mittellot von [AB] und dem Mittellot von [BC], also auf dem Schnittpunkt M der beiden Mittellote liegen.

Zur Kontrolle kann noch das Mittellot auf [AC] errichtet werden. Auch das dritte Mittellot geht durch M.

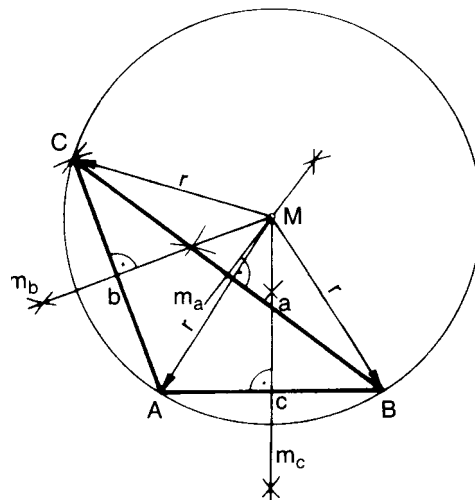
Der Umkreismittelpunkt M eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Mittellote. Der Umkreisradius wird mit r bezeichnet.

Lehrbeispiel 11

Konstruieren Sie den Umkreismittelpunkt M eines Dreiecks ABC aus $a = 70 \text{ mm}$; $b = 45 \text{ mm}$; $c = 40 \text{ mm}$!

Messen Sie den Umkreisradius r !

Lösung



Dreieck ABC ist stumpfwinklig.

Aus der Konstruktion kann entnommen werden, dass der Umkreismittelpunkt auch außerhalb des Dreiecks liegen kann.

Gemessen: $r = 37 \text{ mm}$

(Zeichnung nicht maßstäblich!)

Konstruktionstext:

Gezeichnet wird $[AB]$ ($c = 40 \text{ mm!}$). Dann wird ein Kreisbogen um B mit Radius $a = 70 \text{ mm}$ und ein Kreisbogen um A mit Radius $b = 45 \text{ mm}$ geschlagen! Sie schneiden sich in C. Nun werden auf den Dreiecksseiten $[AB]$, $[BC]$ und $[AC]$ die Mittellote errichtet. Sie schneiden sich in M, dem Umkreismittelpunkt.

Die Mittellote werden mit m bezeichnet und erhalten als Index den Buchstaben der Seite, auf der sie senkrecht stehen.

m_a = Mittellot auf die Seite a

m_b = Mittellot auf die Seite b

m_c = Mittellot auf die Seite c

• Seitenhalbierende und Schwerpunkt

Im Schwerpunkt einer Fläche oder eines Körpers kann man sich dessen gesamte Masse vereinigt denken. Unterstützt man die Fläche oder den Körper an dieser Stelle (z.B. mit einer Nadelspitze), so muss er im Gleichgewicht bleiben. Für einige geometrische Figuren ist der Schwerpunkt sehr leicht zu finden, so z.B. beim Kreis, dessen Mittelpunkt gleichzeitig der Schwerpunkt ist. Bei einer Strecke ist der Schwerpunkt gleich dem Mittelpunkt dieser Strecke, bei einem Rechteck der Schnittpunkt der beiden Diagonalen.

Bei vielen Aufgaben in der Physik und Festigkeitslehre benötigt man zur Lösung die Lage des Schwerpunktes, z.B. bei Blechen, Profilquerschnitten usw. Dies wird an entsprechender Stelle ausführlich behandelt. Hier soll nur das Ermitteln des Schwerpunktes einer Strecke, eines Rechtecks und eines Dreiecks erläutert werden.

Der Schwerpunkt von Dreiecken ist nicht so einfach zu finden. Er muss konstruiert werden. Betrachtet wird im Dreieck ABC (Abbildung 64) zuerst die Seite $[AB]$. Der Schwerpunkt dieser Seite ist die Mitte D von $[AB]$.

Nun wird das Dreieck in sehr schmale Streifen parallel zu $[AB]$ geteilt! Wenn die Streifen so schmal wie nur irgend möglich gewählt werden, so kann man annehmen, dass das Dreieck damit in lauter Strecken (besser: schmale Rechtecke) zerlegt würde.

Der Schwerpunkt dieser Strecken ist jeweils ihr Mittelpunkt. Verbindet man all diese Mittelpunkte, erhält man die Seitenhalbierende. Sie läuft von der Mitte der Seite zur gegenüberliegenden Ecke. Auf ihr muss der Schwerpunkt des Dreiecks liegen.

Die Strecke vom Mittelpunkt einer Dreiecksseite zum gegenüberliegenden Eckpunkt heißt Seitenhalbierende oder Schwerlinie.

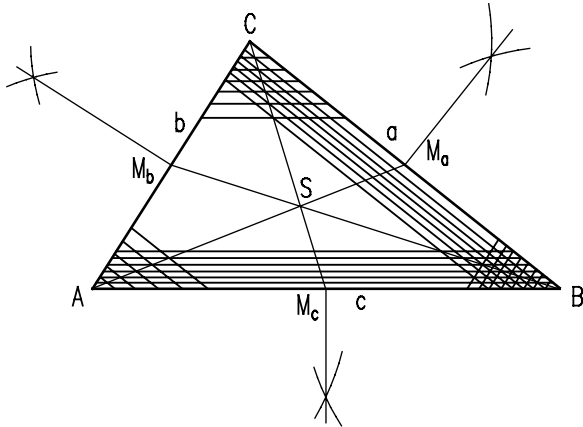


Abbildung 64 Schwerpunkt

Zur genauen Bestimmung des Schwerpunktes teilt man das Dreieck auch parallel zu [BC] in viele schmale Streifen. Die Schwerpunkte der so entstandenen Strecken liegen wieder auf ihren Mittelpunkten.

Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC muss demnach auch auf dieser Seitenhalbierenden $[M_aA]$ liegen. Damit kann der Schwerpunkt des Dreiecks nur der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sein.

Zur Kontrolle ist auch die dritte Seitenhalbierende $[M_bB]$ eingezeichnet! Damit gilt:

Die Seitenhalbierenden (Schwerlinien) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S.

Die Seitenhalbierenden werden mit s bezeichnet und erhalten als Index den betreffenden Kleinbuchstaben der Seite, die sie halbieren.

s_a = Seitenhalbierende der Seite a

s_b = Seitenhalbierende der Seite b

s_c = Seitenhalbierende der Seite c

Winkelhalbierende und Inkreis

Sollen aus dreieckigen Blechabfallstücken kreisförmige Scheiben geschnitten werden, so erhält man die größtmöglichen Scheiben dann, wenn von dem Kreis alle drei Dreiecksseiten von innen berührt werden. Diesen Kreis nennt man den Inkreis. Nicht jede geometrische Figur besitzt einen Inkreis; so haben z.B. Rechtecke oder Parallelogramme keinen Inkreis. Das Quadrat hingegen besitzt einen Inkreis.

Zur Konstruktion des Inkreismittelpunktes des Dreiecks ABC (Abbildung 65) geht man von den beiden Schenkeln des Winkels α , den Seiten b und c, aus. Die Mittelpunkte aller Kreise, die diese beiden Schenkel berühren, liegen auf der Winkelhalbierenden des Winkels α .

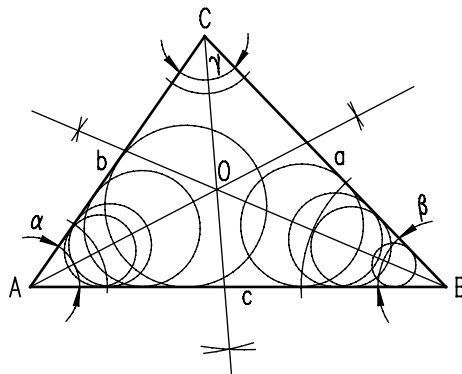


Abbildung 65 Inkreis

Auf der Winkelhalbierenden des Winkels β liegen alle Mittelpunkte der Kreise, die beide Schenkel von β berühren. Dasselbe gilt für den Winkel γ .

Der Schnittpunkt O der drei Winkelhalbierenden ist der Mittelpunkt für den Kreis, der die Schenkel aller drei Winkel und damit alle drei Dreiecksseiten von innen berührt.

Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt O. Der Radius des Inkreises heißt ρ .

Die Winkelhalbierenden werden mit w bezeichnet und erhalten als Index den Winkel, den Sie halbieren.

w_α = Winkelhalbierende des Winkels α

w_β = Winkelhalbierende des Winkels β

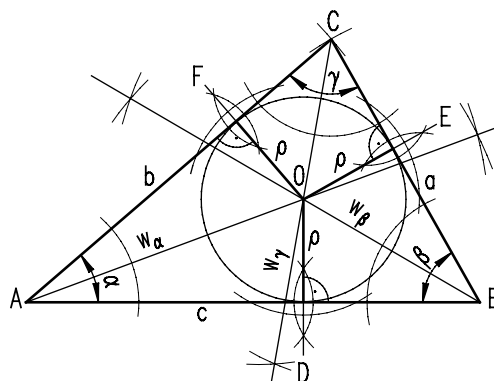
w_γ = Winkelhalbierende des Winkels γ

Lehrbeispiel 12

Konstruieren Sie den Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC aus $a = 60 \text{ mm}$; $b = 80 \text{ mm}$; $c = 90 \text{ mm}$! Konstruieren Sie die Berührungspunkte des Inkreises und messen Sie den Inkreisradius ρ !

Lösung

gemessen: $\rho = 20,5 \text{ mm}$



(Zeichnung nicht maßstäblich!)

Konstruktionstext: Gezeichnet wird $[AB]$ ($c = 90 \text{ mm}$)

Die Kreisbögen um B mit Radius $a = 60 \text{ mm}$ und um A mit Radius $b = 80 \text{ mm}$ schneiden sich in C. Die Winkel α , β und γ werden halbiert und die Winkelhalbierenden w_α , w_β , w_γ eingezeichnet!

Sie schneiden sich in O, dem Inkreismittelpunkt. Fällt man von O jeweils das Lot auf $[AB]$, $[BC]$ und $[AC]$, so sind die Fußpunkte D, E und F die Berührungspunkte des Inkreises.

• Höhe und Fläche des Dreiecks

Das Lot vom Eckpunkt eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite oder auf deren Verlängerung heißt Höhe des Dreiecks.

Die Höhen werden mit h bezeichnet und erhalten als Index den Kleinbuchstaben der Seite, auf der sie senkrecht stehen.

h_a = Höhe vom Eckpunkt A auf a

h_b = Höhe vom Eckpunkt B auf b

h_c = Höhe vom Eckpunkt C auf c

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich ebenfalls in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H.

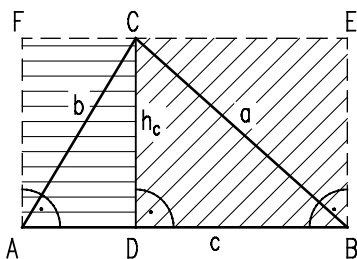
Der Höhenschnittpunkt H kann innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks liegen. Im Sonderfall eines rechtwinkligen Dreiecks liegt er im Scheitelpunkt des rechten Winkels.

Lehrbeispiel 13

Ermitteln Sie die Fläche eines Dreiecks aus Grundlinie und Höhe!

Lösung

Gezeichnet wird durch C eine Parallele zu AB und in A und B jeweils eine Senkrechte zu AB.



Da $\overline{AF} = \overline{BE} = h_c$, gilt für die Fläche des Rechtecks ABEF:

$$A_{\text{Rechteck}} = c \cdot h_c \quad (= \text{Länge} \times \text{Breite})$$

$\triangle ADC$ und $\triangle ACF$ sind flächengleich (jeweils die Hälfte des Rechtecks ADCF). $\triangle DBC$ und $\triangle BEC$ sind flächengleich (jeweils die Hälfte des Rechtecks DBEC). Die Fläche des $\triangle ABC$ ist somit die Hälfte von der Fläche des Rechtecks ABEF:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \quad (= \frac{1}{2} \times \text{Grundseite} \times \text{Höhe})$$

Da man jede Seite des Dreiecks als Grundseite auffassen kann, ergeben sich zur Berechnung der Fläche 3 Möglichkeiten:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a, \quad A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b; \quad A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus einer Dreiecksseite und der zugehörigen Höhe.

Aus diesem Satz kann man unmittelbar einen weiteren Sachverhalt folgern:

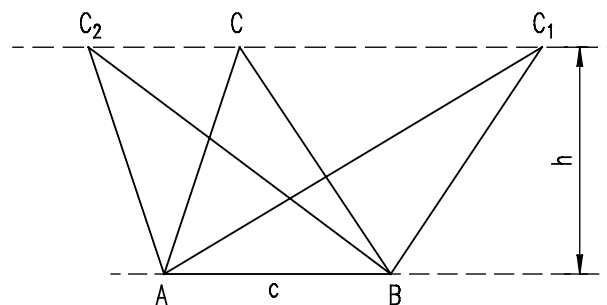


Abbildung 66 Scherung beim Dreieck

Verschiebt man den Eckpunkt C auf einer Parallelen zur Grundlinie c im Abstand h, so entstehen flächengleiche Dreiecke (alle Dreiecke haben die gleiche Grundlinie c und die gleiche Höhe h!). Eine solche Parallelverschiebung von Eckpunkten heißt **Scherung**.

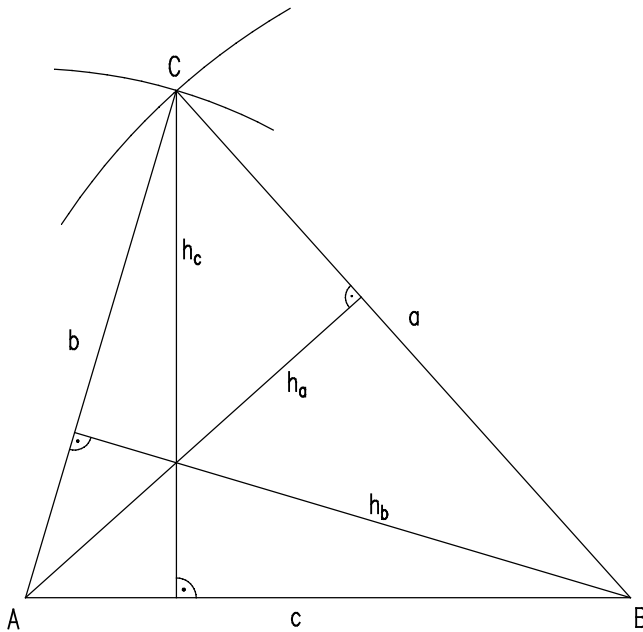
Entsteht eine geometrische Figur durch Scherung aus einer anderen Figur, so sind beide flächengleich, aber nicht deckungsgleich.

Lehrbeispiel 14

Konstruieren Sie im Dreieck ABC aus $a = 9,0 \text{ cm}$, $b = 7,0 \text{ cm}$ und $c = 8,0 \text{ cm}$ die drei Höhen! Messen Sie die Länge h_a , h_b und h_c ! Berechnen Sie hieraus jeweils die Dreiecksfläche!

Lösung

gemessen: $h_a = 6,0 \text{ cm}$
 $h_b = 7,7 \text{ cm}$
 $h_c = 6,8 \text{ cm}$



$$A_1 = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{9 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{2} = \underline{\underline{27 \text{ cm}^2}}$$

$$A_2 = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{7 \text{ cm} \cdot 7,7 \text{ cm}}{2} = 26,95 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{27 \text{ cm}^2}}$$

$$A_2 = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{8 \text{ cm} \cdot 6,8 \text{ cm}}{2} = 27,2 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{27 \text{ cm}^2}}$$

1.5 Rechtwinkliges Dreieck**Lehrsatz des Thales**

Der Satz des Thales (Thales von Milet, griechischer Philosoph um 600 v.Chr.) ermöglicht eine verhältnismäßig einfache Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks.

Zur Herleitung dieses Satzes wird von einem Rechteck ABCD ausgegangen, um das der Umkreis gezeichnet wird (Abbildung 67). Den Umkreismittelpunkt M findet man als den Schnittpunkt der beiden Diagonalen [AC] und [BD] (eine Diagonale ist eine gerade Linie, die zwei nicht benachbarte Ecken eines Vierecks miteinander verbindet).

Die Diagonale [AC] halbiert das Rechteck und es entstehen zwei Dreiecke ACD und ABC, die jeweils rechtwinklig sind. [AC] und [BD] gehen durch den Umkreismittelpunkt und sind deshalb immer Durchmesser.

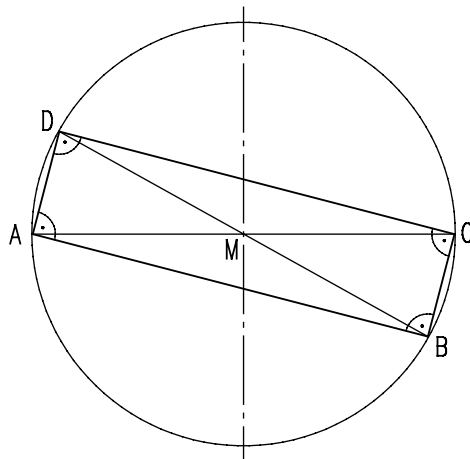


Abbildung 67 Umkreis eines Rechtecks

Jedes weitere Dreieck, das einen Durchmesser des Umkreises als Grundlinie und eine weitere Ecke auf dem Umkreis hat, ist die Hälfte eines solchen Rechtecks und somit rechtwinklig

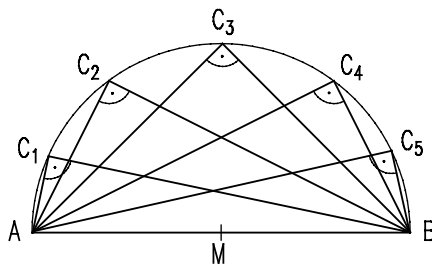


Abbildung 68 Satz des Thales

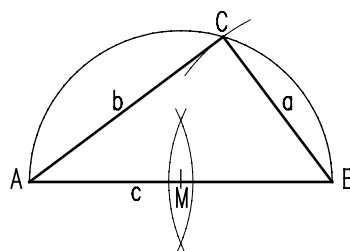
Satz des Thales:

Liegen die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis, dass eine Seite Kreis-durchmesser ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Lehrbeispiel 1

Konstruieren Sie das rechtwinklige Dreieck ABC ($\gamma = 90^\circ$) aus $c = 5 \text{ cm}$ und $a = 3 \text{ cm}$!

Lösung



(Zeichnung nicht maßstäblich!)

Konstruktionstext:

Gezeichnet wird $[AB]$ ($c = 5 \text{ cm}$). Danach wird $[AB]$ halbiert. Dadurch erhält man M !

Gezeichnet wird nun ein Halbkreis um M mit Radius $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2}$, danach um B

einen Kreis mit Radius $\overline{BC} = a = 3 \text{ cm}$. Er schneidet den Kreis um M in C . Damit ist das gesuchte Dreieck ABC konstruiert!

Dieses Dreieck ABC muss gemäß dem Satz von Thales rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C sein. Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ABC etwas genauer, so kann man folgende Aussagen machen:

1. Die Grundlinie c muss die längste Seite des Dreiecks sein, also
 $a < c$
 $b < c$
2. Die beiden anderen Seiten müssen zusammen länger sein als die Grundseite, denn sonst entsteht kein Dreieck, also
 $a + b > c$.

Ein weiterer Zusammenhang zwischen den Seiten lässt sich so einfach nicht finden. Dem griechischen Philosophen Pythagoras (er lebte im 6. Jahrh. v.Chr.) wird die Entdeckung des rechnerischen Zusammenhangs zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zugeschrieben.

Lehrsatz des Pythagoras

Die Seiten im rechtwinkligen Dreieck sind nicht gleichbedeutend. Eine besondere Rolle spielt die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. Sie wird mit **Hypotenuse** bezeichnet. Die beiden am rechten Winkel aneinander liegenden Dreiecksseiten bezeichnet man mit **Katheten**.

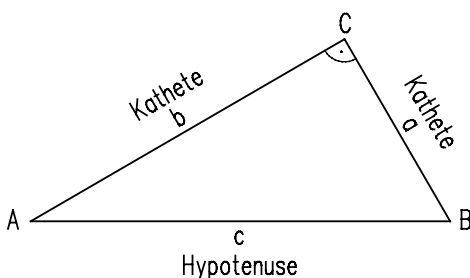


Abbildung 69 Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck

Über die rechnerische Beziehung zwischen der Hypotenuse und den Katheten sagt der

Lehrsatz des Pythagoras:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Mit den Bezeichnungen gemäß Abbildung 69 gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Beweis:

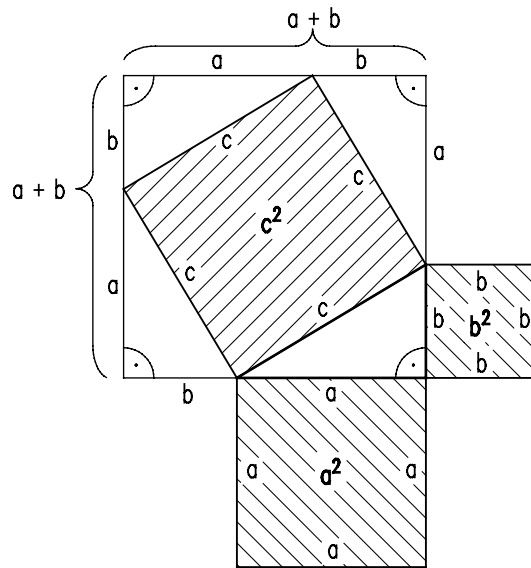


Abbildung 70 Beweis des Satzes von Pythagoras

Vor.: $\triangle ABC$ ist rechtwinklig,
 $\gamma = 90^\circ$

Beh.: $c^2 = a^2 + b^2$

Bew.: Das große Quadrat mit der Seite $a + b$ kann zerlegt werden in 4 rechtwinklige Dreiecke und dem Quadrat über c . Also kann die Fläche des großen Quadrats auf zwei Arten berechnet werden.

$$A = (a + b)^2 \text{ oder}$$

$$A = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

(Beachte: Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist b die Höhe zur Seite a !)

Wir setzen die Flächen gleich und erhalten

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2.$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \quad (\text{wenn man die Seiten vertauscht} \Rightarrow)$$

$$c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 \quad | -2ab$$

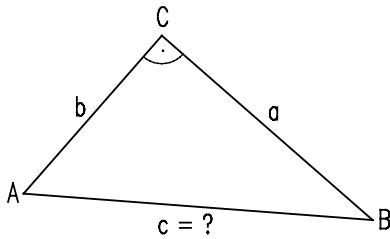
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{w.z.b.w.})$$

Lehrbeispiel 2

Berechnen Sie die Hypotenuse c im rechtwinkligen Dreieck ABC ($\gamma = 90^\circ$) mit $a = 4 \text{ cm}$; $b = 3 \text{ cm}$!

Lösung

Planfigur:



Nach Pythagoras gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (4 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2$$

$$c^2 = 16 \text{ cm}^2 + 9 \text{ cm}^2$$

$$c = \sqrt{25 \text{ cm}^2}$$

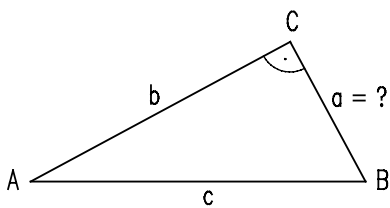
$$\underline{\underline{c = 5 \text{ cm}}}$$

Lehrbeispiel 3

Berechnen Sie die Kathete a im rechtwinkligen Dreieck ABC ($\gamma = 90^\circ$) mit $b = 5 \text{ cm}$; $c = 13 \text{ cm}$!

Lösung

Planfigur:

Nach Pythagoras gilt: $c^2 = a^2 + b^2$ (Seiten vertauschen)

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad | -b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = (13 \text{ cm})^2 - (5 \text{ cm})^2$$

$$a^2 = 169 \text{ cm}^2 - 25 \text{ cm}^2$$

$$a^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$\underline{\underline{a = 12 \text{ cm}}}$$

Bevor nun weitere Beispiele zum Lehrsatz des Pythagoras gerechnet werden, sollen noch zwei weitere Lehrsätze über das rechtwinklige Dreieck erläutert werden.

Der Kathetensatz (Satz von Euklid)

Einen Zusammenhang zwischen einer Kathete und der Hypotenuse bzw. einem Teil von ihr gibt der Kathetensatz an.

Dazu muss in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe auf der Hypotenuse errichtet werden. Der Fußpunkt dieser Höhe teilt die Hypotenuse in zwei Abschnitte, die **Hypotenusenabschnitte**, auf.

Kathetensatz:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete inhaltsgleich dem Rechteck, gebildet aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Der Beweis dieses Satzes benützt den Vergleich von Flächen gleich großer Dreiecke.

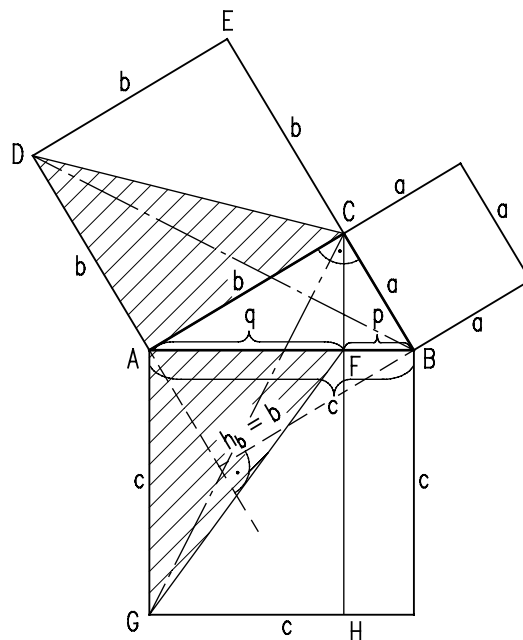


Abbildung 71 Beweis des Kathetensatzes

Vor.: $\triangle ABC$ ist rechtwinklig
($\angle ACB = 90^\circ$)

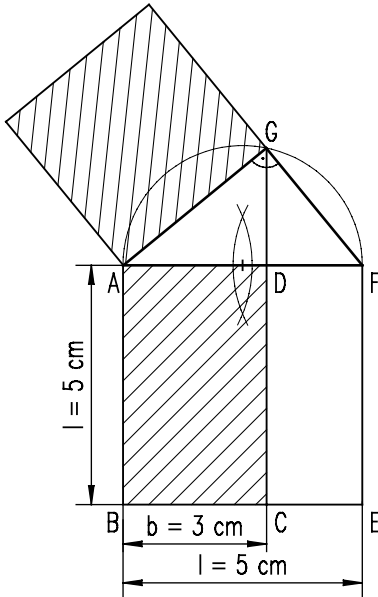
Beh.: $b^2 = c \cdot q$

Bew.: $\triangle ACD = \triangle ABD$ (flächengleich)
(Beide haben Grundseite b, Höhe b)
 $\triangle ABD = \triangle AGC$
(gemeinsam b, c, $\angle DAB = \angle CAG$)
 $\triangle AGC = \triangle AGF$
(Beide haben Grundseite c, Höhe q)
Damit $\triangle ACD = \triangle AGF$ und
 $\square ACED = \square AGHF$ d. h.
 $b^2 = c \cdot q$ (w.z.b.w.)

Der Kathetensatz ermöglicht die Verwandlung eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat.

Lehrbeispiel 4

Verwandeln Sie das Rechteck ABCD mit $l = 5 \text{ cm}$; $b = 3 \text{ cm}$ in ein flächengleiches Quadrat!



(Zeichnung nicht maßstäblich!)

Lösung

Um das Rechteck ABCD wird ein Quadrat ABEF mit der Seitenlänge $l = 5 \text{ cm}$ gezeichnet. Dann wird über der Quadratseite [AF] ein Halbkreis errichtet und [CD] bis zum Schnitt mit diesem Halbkreis verlängert! Verbindet man A mit G, so ist [AG] die Seite des flächengleichen Quadrats.

Die Fläche des Quadrats beträgt

$$\overline{AG}^2 = 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}$$

$$\overline{AG}^2 = 15 \text{ cm}^2$$

Die Quadratseite [AG] ist demnach

$$\overline{AG} = \sqrt{15 \text{ cm}^2}$$

Der Höhensatz

Einen Zusammenhang zwischen den beiden Hypotenusenabschnitten und der Höhe auf der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck gibt der Höhensatz.

Höhensatz:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe inhaltsgleich dem Rechteck, gebildet aus den Hypotenusenabschnitten.

$$h^2 = p \cdot q$$

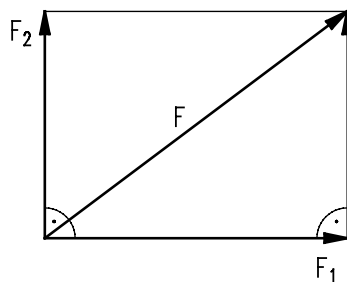
Auf den Beweis wird hier verzichtet.

Lehrbeispiel 5

Zwei Kräfte $F_1 = 60 \text{ N}$ und $F_2 = 40 \text{ N}$ stehen senkrecht aufeinander.

Berechnen Sie die Resultierende F !

Lösung

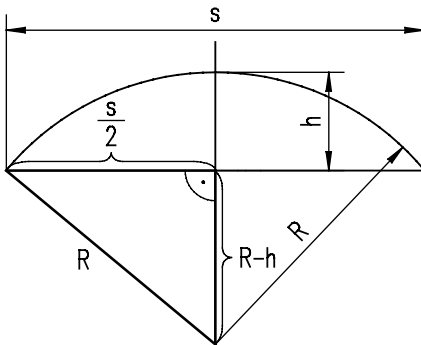


$$\begin{aligned} \text{Nach Pythagoras gilt: } F^2 &= F_1^2 + F_2^2 \\ F^2 &= (60 \text{ N})^2 + (40 \text{ N})^2 \\ F^2 &= 3600 \text{ N}^2 + 1600 \text{ N}^2 \\ F^2 &= 5200 \text{ N}^2 \\ F &= \sqrt{5200 \text{ N}^2} \\ F &= \underline{\underline{72,1 \text{ N}}} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 6

Ein Blechstück hat die Form eines Kreisabschnitts. Es werden die Maße $s = 380 \text{ mm}$ und $h = 95 \text{ mm}$ gemessen.

Berechnen Sie den Radius R zuerst allgemein und dann für die angegebenen Maße!

Lösung

Nach Pythagoras gilt:

$$R^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (R-h)^2$$

$$R^2 = \frac{s^2}{4} + R^2 - 2Rh + h^2 \quad | -R^2 + 2Rh$$

$$R^2 + 2Rh - R^2 = \frac{s^2}{4} + h^2$$

$$2Rh = \frac{s^2 + 4h^2}{4}$$

$$R = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}$$

Für $s = 380 \text{ mm}$ und $h = 95 \text{ mm}$ gilt:

$$R = \frac{380^2 + 4 \cdot 95^2 \text{ mm}^2}{8 \cdot 95 \text{ mm}} = \frac{144400 + 36100}{760} \text{ mm}$$

$$R = \frac{180500}{760} \text{ mm} = \underline{\underline{237,5 \text{ mm}}}$$

Lehrbeispiel 7

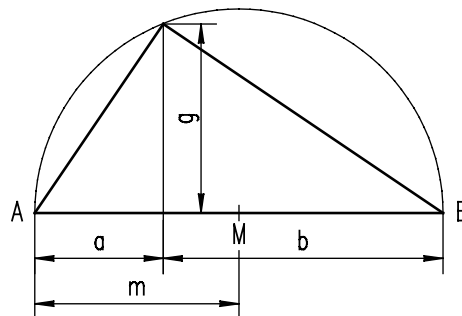
Konstruieren Sie aus den Strecken $a = 2 \text{ cm}$ und $b = 4 \text{ cm}$ das „geometrische Mittel“ und das „arithmetische Mittel“!

Lösung

Definition: Die Wurzel aus dem Produkt der Strecken a und b bezeichnet man als das **geometrische Mittel**.

$$\underline{\underline{g = \sqrt{a \cdot b}}}$$

Die Konstruktion des geometrischen Mittels erfolgt mit dem Höhensatz:



$$\begin{aligned} g &= \sqrt{a \cdot b} \\ &= \sqrt{2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}} \\ &= 2,83 \text{ cm} \end{aligned}$$

Das **arithmetische Mittel** ist die halbe Summe der Strecken a und b:

$$m = \frac{a + b}{2} = \frac{2 \text{ cm} + 4 \text{ cm}}{2} = 3 \text{ cm}$$

1.6 Kreis und Kreisteile

1.6.1 Kreis und Gerade

Die Linie, die den Kreis bildet, nennt man **Peripherie** oder Kreisumfang, einen Teil davon **Kreisbogen** b. Eine Gerade, die den Kreis schneidet, nennt man **Sekante**. Eine Strecke, deren Endpunkte auf der Peripherie liegen, heißt **Sehne** s. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt M des Kreises, so ist sie der **Durchmesser** d, die Hälfte davon ist der **Radius** r. Berührt eine Gerade den Kreis (d.h. haben Gerade und Kreis nur einen Punkt gemeinsam), so bezeichnet man diese Gerade als **Tangente**.

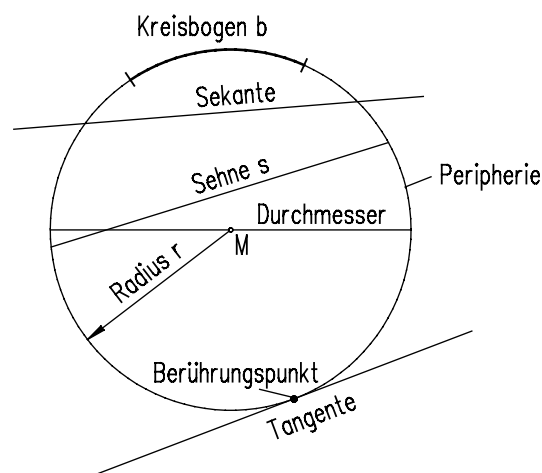
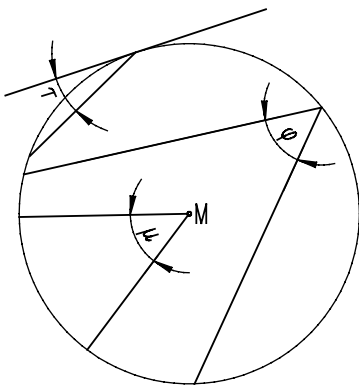


Abbildung 72 Linien am Kreis

Der Winkel zwischen zwei Radien heißt **Zentriwinkel** (Mittelpunktswinkel μ), der Winkel zwischen zwei Sehnen, dessen Scheitel auf dem Kreis liegt, heißt **Peripheriewinkel** (Umfangswinkel φ).

Von Bedeutung für Dreieckskonstruktionen ist noch der Winkel zwischen der Sehne und der Tangente, deren Schnittpunkt auf dem Kreis liegt. Er heißt **Sehnen-Tangenten-Winkel** (τ).



μ = Zentriwinkel
 φ = Peripheriewinkel
 τ = Sehnentangenten-Winkel

Abbildung 73 Winkel am Kreis

Sehnensätze

Als Nächstes sollen Gesetzmäßigkeiten über Sehnen erarbeitet werden.

Verbindet man die Endpunkte A und B einer Sehne [AB] mit dem Mittelpunkt M, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ABM. Wird nun das Mittellot auf der Sehne [AB] errichtet, geht es durch den Mittelpunkt M. Das Mittellot [MC] teilt das Dreieck ABM in zwei kongruente Dreiecke ACM und CBM. Beide haben einen rechten Winkel bei C, ferner sind $\overline{AM} = \overline{BM}$ und $\overline{AC} = \overline{BC}$. Daraus folgt: Nach dem Kongruenzsatz SsW sind die Dreiecke kongruent. Da die beiden Dreiecke ACM und CBM kongruent sind, müssen auch die beiden Winkel $\angle AMC = \angle CMB$ sein. Das Lot \overline{CM} halbiert demnach den Zentriwinkel.

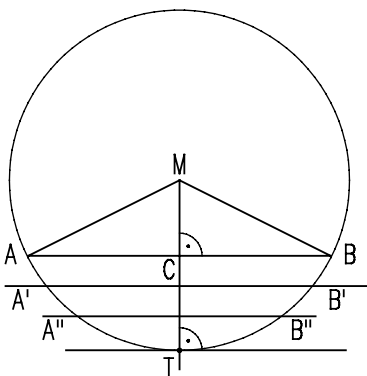


Abbildung 74 Mittellot einer Sehne

Das Mittellot auf einer Sehne geht durch den Mittelpunkt und halbiert den Zentriwinkel über der Sehne.

Umgekehrt gilt:

Das Lot vom Mittelpunkt auf die Sehne halbiert diese und den zugehörigen Zentriwinkel.

Ebenso:

Die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit dem Sehnenmittelpunkt steht senkrecht auf der Sehne und halbiert den zugehörigen Zentriwinkel.

Tangentensätze

Verschiebt man in Abbildung 74 die Sehne $[AB]$ parallel nach unten, so rücken die beiden Endpunkte A und B immer näher zusammen, während das Mittellot dasselbe bleibt. Im Grenzfall fallen die beiden Endpunkte A und B zusammen, die parallel verschobene Gerade berührt den Kreis nur noch in einem Punkt. Diese parallele Gerade ist die Tangente an dem Kreis im Punkt T . Punkt T ist gleichzeitig der Schnittpunkt des Mittellots der Sehne $[AB]$ mit dem Kreis. Der Winkel zwischen der Tangente in T und dem Mittellot auf $[AB]$ ist ein rechter. Das verlängerte Mittellot auf $[AB]$ bis T , also $[MT]$, ist gleichzeitig der Radius im Berührungspunkt T .

Der Radius im Berührungspunkt steht senkrecht auf der Tangente.

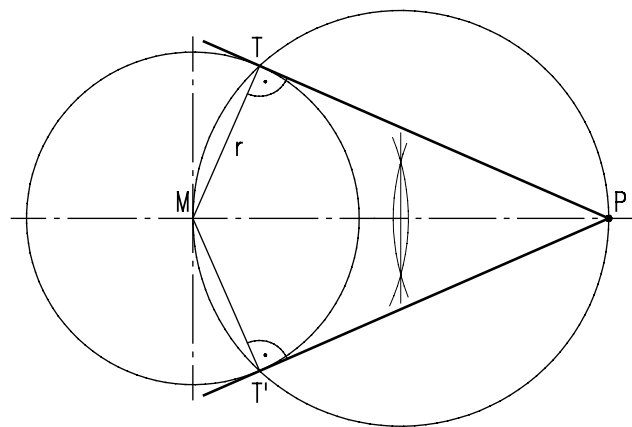
Umgekehrt gilt:

Das Lot auf einer Tangente im Berührungspunkt geht durch den Kreismittelpunkt.

Zur Konstruktion der Tangenten an einen Kreis benutzt man diese Erkenntnisse.

Lehrbeispiel 1

Konstruieren Sie von einem Punkt P außerhalb des Kreises $k(M, r)$ die beiden Tangenten an diesen Kreis!



Lösung

Da Radius und Tangente senkrecht aufeinander stehen, ist das Dreieck MPT (bzw. $MT'P$) **rechtwinklig**.

Ein rechtwinkliges Dreieck über \overline{MP} kann sehr einfach mithilfe des Satzes von Thales konstruiert werden, indem man über MP einen Halbkreis zeichnet. Er schneidet den gegebenen Kreis in T . Auf dieselbe Weise erhält man auch die zweite Tangente von P an den Kreis in T' .

Die beiden entstehenden Dreiecke MPT und $MT'P$ sind kongruent nach dem Kongruenzsatz SsW. (Gemeinsame Seite $[MP]$, $\overline{MT} = \overline{MT'} = r$ und beide Dreiecke sind rechtwinklig.) Hieraus ergeben sich folgende Lehrsätze:

Die von einem Punkt außerhalb eines Kreises an den Kreis gelegten Tangentenabschnitte sind gleich lang.

Die Zentrale (Verbindungsline von M mit P) halbiert den Winkel zwischen den von einem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten.

Die Winkelhalbierende des von zwei Tangenten gebildeten Winkels geht durch den Kreismittelpunkt.

1.6.2 Winkelsätze am Kreis

Zwischen Zentriwinkel, Peripheriewinkel und Sehnen-Tangenten-Winkel bestehen Zusammenhänge, die hier näher untersucht werden sollen. Durch Ausmessen des Zentriwinkels und des Peripheriewinkels in Abbildung 75 lässt sich folgender Zusammenhang vermuten:

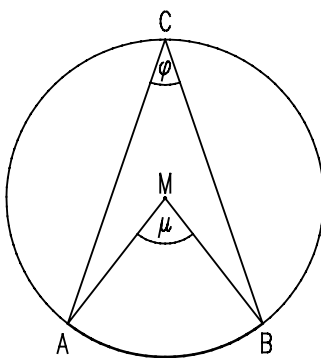


Abbildung 75 Zentri- und Peripheriewinkel

Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen.

Dieser Lehrsatz kann bewiesen werden, jedoch soll der Beweis hier nicht angeführt werden.

Weil dieser Lehrsatz für alle Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen gilt, kann Folgendes geschlossen werden:

Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen sind gleich groß (Abbildung 76).

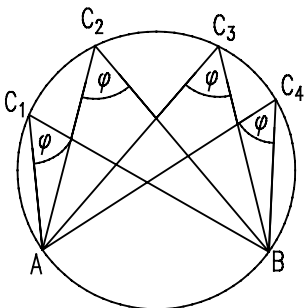


Abbildung 76 Peripheriewinkel über dem gleichen Kreisbogen

Sonderfall:

Im Halbkreis beträgt der Zentriwinkel 180° , die Peripheriewinkel betragen demnach 90° . Dies ist ein weiterer Beweis des Satzes von Thales.

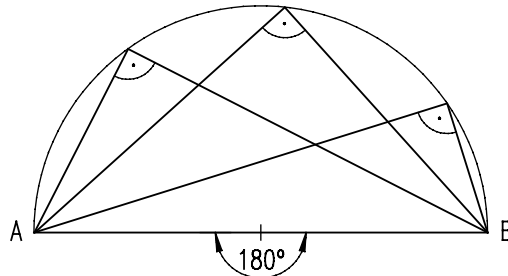


Abbildung 77 Satz des Thales

Einen Zusammenhang zwischen dem Sehnen-Tangenten-Winkel und dem Peripheriewinkel gibt der folgende Lehrsatz:

Der Sehnen-Tangenten-Winkel ist gleich dem Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Kreisabschnitt.

Beweis:

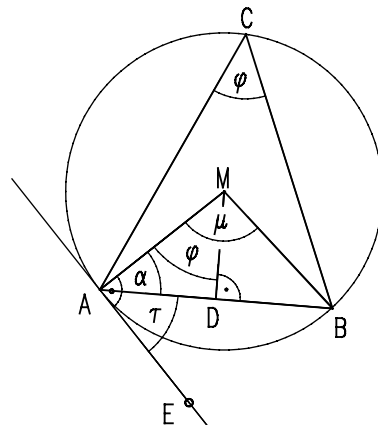


Abbildung 78 Sehnen-Tangenten-Winkel und Peripheriewinkel

Vor.: $\triangle EAM = 90^\circ$

Beh.: $\tau = \varphi = \frac{\mu}{2}$

Bew.: [MD] ist Mittellot auf [AB].
 $\Rightarrow \triangle ADM$ ist rechtwinklig.

$$\angle AMD = \frac{\mu}{2} = \varphi$$

Im Dreieck ADM gilt:

$$\alpha + \varphi = 90^\circ$$

$$\Rightarrow (1) \alpha = 90^\circ - \varphi$$

ferner gilt nach Voraussetzung:

$$(2) \quad \alpha + \tau = 90^\circ \quad (AE \perp AM)$$

(1) in (2) eingesetzt:

$$\Rightarrow 90^\circ - \varphi + \tau = 90^\circ \quad | -90^\circ + \varphi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tau = \varphi}} \quad (\text{w.z.b.w.})$$

Die Tangentensätze werden z.B. für die folgende Konstruktion der Tangenten zweier Kreise benötigt.

Konstruktion der Tangenten zweier Kreise

Aus Abbildung 79 kann entnommen werden, dass zwei Kreise vier gemeinsame Tangenten, nämlich die beiden äußeren t_1 und t_2 und die beiden inneren t_3 und t_4 haben.

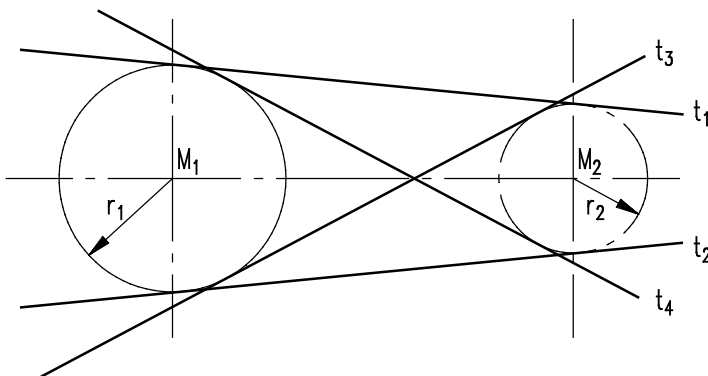


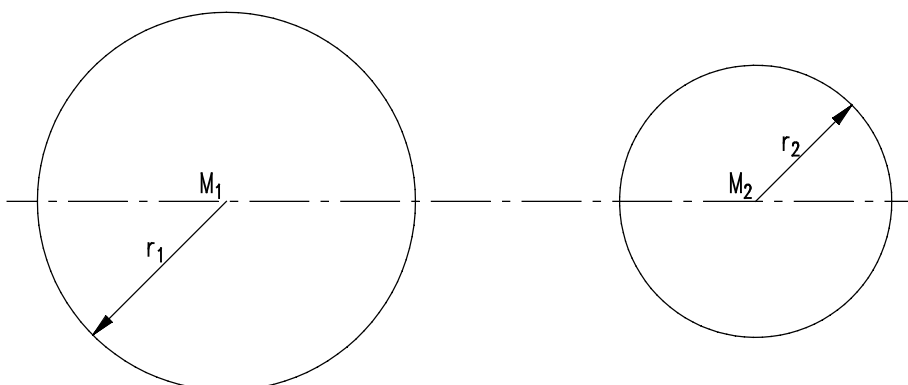
Abbildung 79 Tangenten an zwei Kreisen

Die Konstruktion der beiden äußeren und inneren Tangenten soll in 2 Lehrbeispielen erläutert werden.

Lehrbeispiel 1

Gegeben sind 2 Kreise $(M_1; r_1)$ und $(M_2; r_2)$.

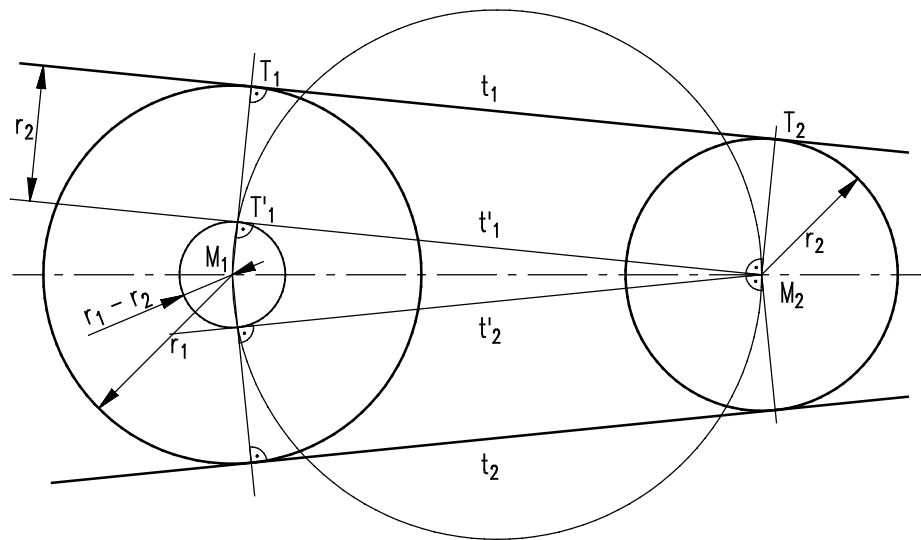
Konstruieren Sie die äußeren Tangenten!



Lösung

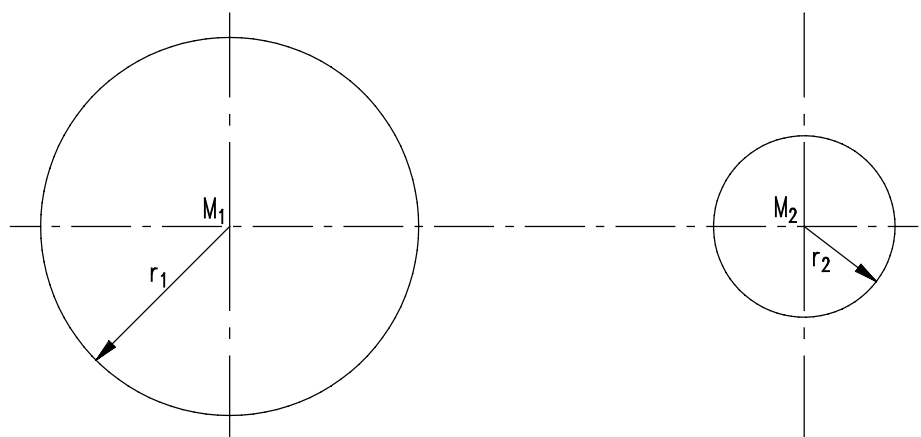
1. Hilfskreis um M_2 mit Radius $r_1 - r_2$ zeichnen.
2. Tangente t'_1 von M_2 an den Hilfskreis. (Thaleskreis über $[M_1M_2]$ ergibt den Berührungspunkt T'_1 !) konstruieren.
3. Durch Verlängerung von $[M_1T'_1]$ über T'_1 hinaus erhält man T_1 .
4. Das Lot auf t'_1 in M_2 schneidet den kleinen Kreis in Punkt T_2 .
5. T_2T_1 ist die gesuchte Tangente t_1 .

Ebenso verfährt man bei der Konstruktion der zu t_1 symmetrischen Tangente t_2 .



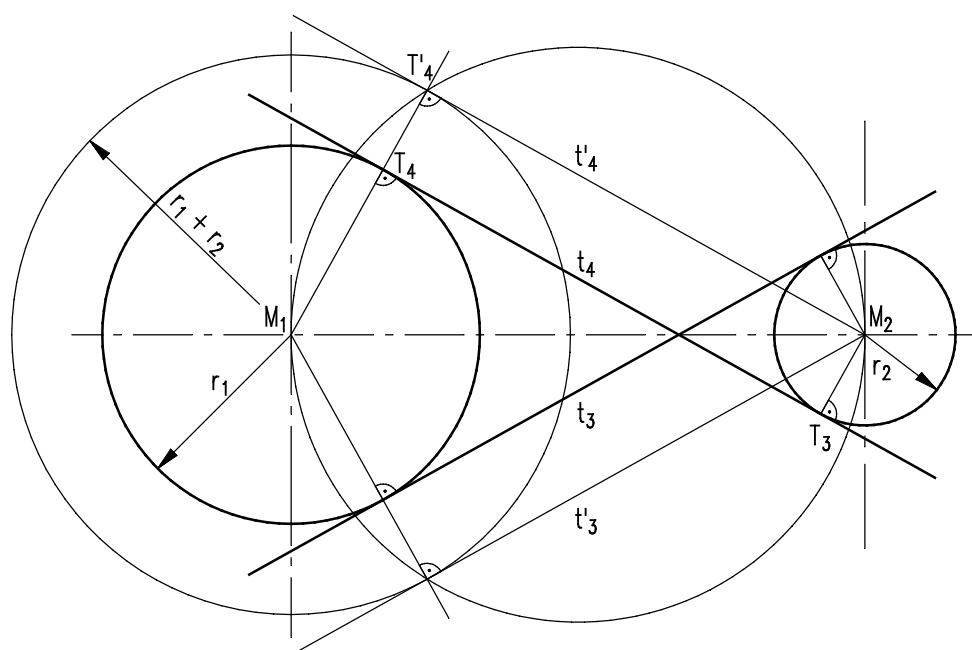
Lehrbeispiel 2

Konstruieren Sie die inneren Tangenten in der folgenden Abbildung!



Lösung

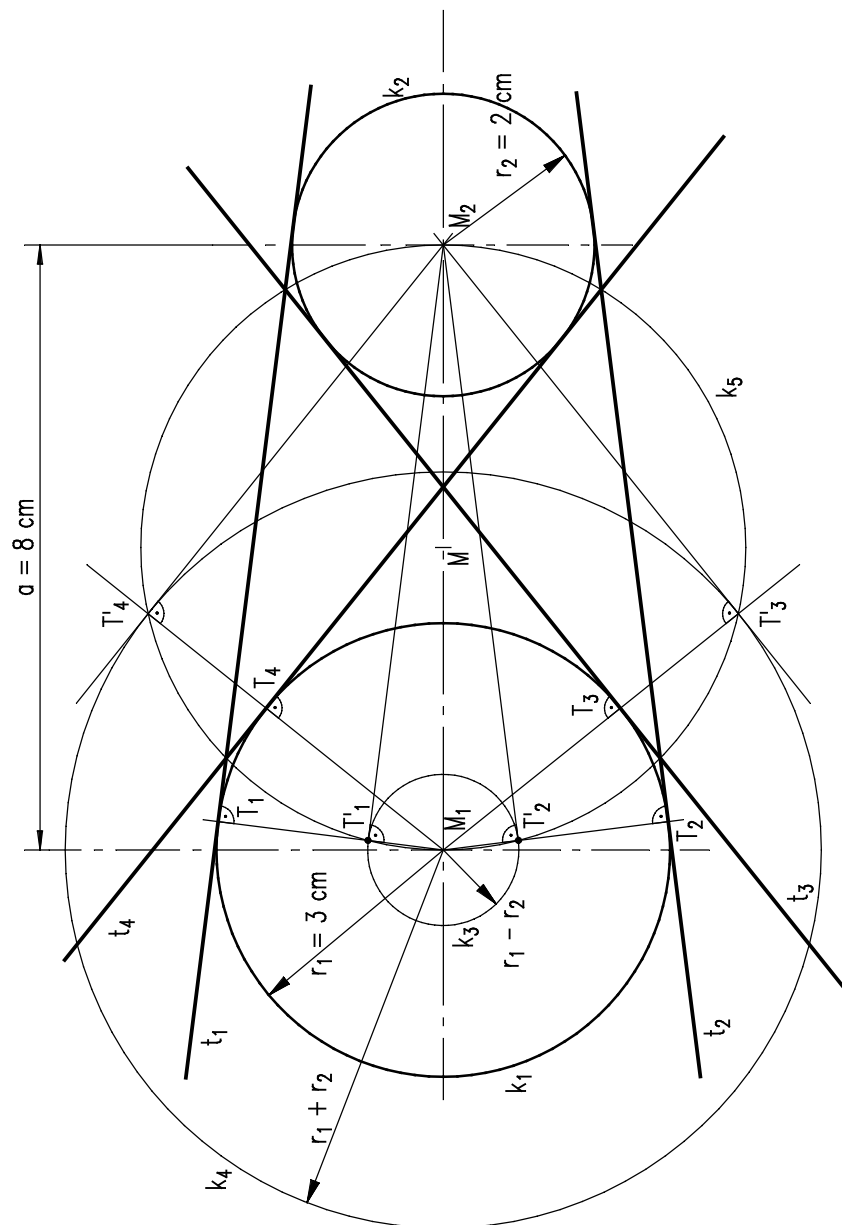
Zunächst wird ein Hilfskreis um M_1 mit dem Radius $r_1 + r_2$ gezeichnet. Anschließend wird wieder wie bei der Konstruktion der äußeren Tangenten verfahren.

Lehrbeispiel 3

Gegeben sind ein Kreis mit $r_1 = 3$ cm und ein Kreis mit $r_2 = 2$ cm. Der Abstand der Mittelpunkte beträgt $a = 8$ cm.

Konstruieren Sie die inneren und äußeren Tangenten!

Lösung



1. Vorbereitung

- Strecke $a = [M_1; M_2] = 8 \text{ cm}$ zeichnen
- Kreis k_1 um M_1 mit Radius $r_1 = 3 \text{ cm}$ zeichnen
- Kreis k_2 um M_2 mit Radius $r_2 = 2 \text{ cm}$ zeichnen
- Kreis k_3 um M_1 mit Radius $r_1 - r_2 = 1 \text{ cm}$ zeichnen
- Kreis k_4 um M_1 mit Radius $r_1 + r_2 = 5 \text{ cm}$ zeichnen
- Kreis k_5 um Mitte M von a mit $r = \frac{a}{2} = 4 \text{ cm}$ zeichnen

2. Innere Tangenten

T'_4 ist oberer Schnittpunkt von k_4 und k_5

T_4 ist der Schnittpunkt der Geraden $\overline{M_1 T'_4}$ mit k_1

t_4 ist die Parallele zu $\overline{M_2 T'_4}$ durch T_4

(Die zweite Tangente wird analog mit dem unteren Schnittpunkt von k_4 und k_5 konstruiert)

3. Äußere Tangenten

T'_1 ist oberer Schnittpunkt von k_3 und k_5

T_1 ist der Schnittpunkt der Geraden $\overline{M_1 T'_1}$ mit k_1

t_1 ist die Parallele zu $\overline{M_2 T'_1}$ durch T_1

(Die zweite Tangente wird analog mit dem unteren Schnittpunkt von k_3 und k_5 konstruiert)

1.6.3 Kreisteile

Ein **Kreissegment** (Kreisabschnitt) besteht aus einer Fläche zwischen der Sehne und dem dazugehörigen Bogen.

Ein **Kreis-sektor** (Kreisausschnitt) ist die Fläche zwischen dem Kreisbogen und zwei Radien. Sie setzt sich zusammen aus einem Kreissegment und einem gleichschenkligen Dreieck.

Beträgt der Winkel zwischen den beiden Radien eines Kreis-sektors 90° , so bezeichnet man die Fläche als **Kreisquadrant**.

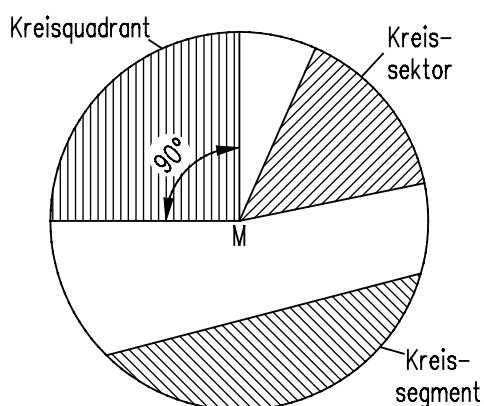


Abbildung 80 Kreisteile

1.7 Flächen- und Umfangsberechnungen

1.7.1 Geradlinig begrenzte Flächen

Vierecke

Bezeichnungen am Viereck

Die Bezeichnungen am Viereck stimmen nur z.T. mit den Bezeichnungen am Dreieck überein. So werden insbesondere die Seiten des Vierecks anders bezeichnet als beim Dreieck, da einer Ecke im Viereck jeweils 2 Seiten gegenüberliegen. Des weiteren kommen beim Viereck die beiden Diagonalen e, f hinzu.

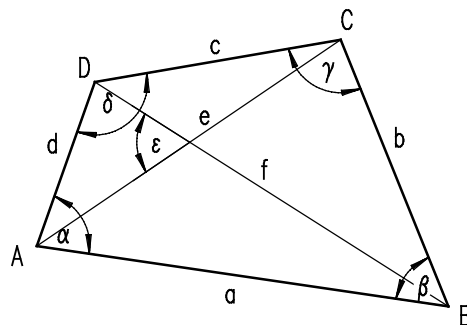


Abbildung 81 Bezeichnungen am Viereck

Der Winkel zwischen beiden Diagonalen wird mit ε bezeichnet. Aus ε lassen sich die drei übrigen Winkel der Diagonalenkreuzung berechnen (1 Scheitelwinkel, 2 Nebenwinkel).

Winkelsumme

Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360° . Dieser Satz lässt sich sehr einfach beweisen. Die Diagonale $\overline{AC} = e$ (Abbildung 81) teilt das Viereck ABCD in die zwei Dreiecke ABC und ACD. Jedes hat die Winkelsumme 180° , beide zusammen demnach $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$. An dieser Stelle kann gleich auf die Winkelsumme in einem beliebigen Vieleck (n-Eck) geschlossen werden.

Wird an ein Viereck ABCD (Abbildung 82) noch ein Dreieck ADE angefügt, so entsteht das Fünfeck ABCDE. Die Winkelsumme des Fünfecks ist um die Winkelsumme des Dreiecks ADE größer als die Winkelsumme des Vierecks ABCD.

Sie beträgt demnach $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$.

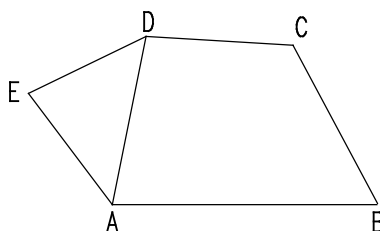


Abbildung 82 Fünfeck zerlegt in ein Dreieck und Viereck

Eckenzahl	Winkelsumme
3	$180^\circ = 1 \cdot 180^\circ = (3 - 2) \cdot 180^\circ$
4	$360^\circ = 2 \cdot 180^\circ = (4 - 2) \cdot 180^\circ$
5	$540^\circ = 3 \cdot 180^\circ = (5 - 2) \cdot 180^\circ$
6	$720^\circ = 4 \cdot 180^\circ = (6 - 2) \cdot 180^\circ$
n	$= (n - 2) \cdot 180^\circ$

Tabelle 3 Winkelsumme in n-Ecken

Die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks beträgt $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Übersicht über die Vierecke

Häufig kommen in der Praxis regelmäßige Vierecke (z.B. Quadrate, Rechtecke usw.) vor. Die nachfolgende Übersicht (Abbildung 83) enthält diese regelmäßigen Vierecke mit Angabe einiger ihrer besonderen Eigenschaften.

In der Übersicht werden aus dem allgemeinen Viereck alle besonderen Vierecke entwickelt:

1. Trapez

Definition: Ein Viereck mit 2 parallelen Seiten heißt **Trapez**.

Sonderfall: Gleichschenkliges Trapez.

2. Parallelogramm

Definition: Ein Viereck mit **je 2** parallelen Seiten heißt **Parallelogramm**.

Ein Parallelogramm ist auch ein Trapez, da es die Definition für das Trapez erfüllt.

Sonderfälle: Rechteck, Raute, Quadrat.

3. Drachenviereck

Definition: Ein Viereck, bei dem je 2 benachbarte Seiten gleich lang sind, heißt **Drachenviereck**.

Sonderfälle: Raute, Quadrat.

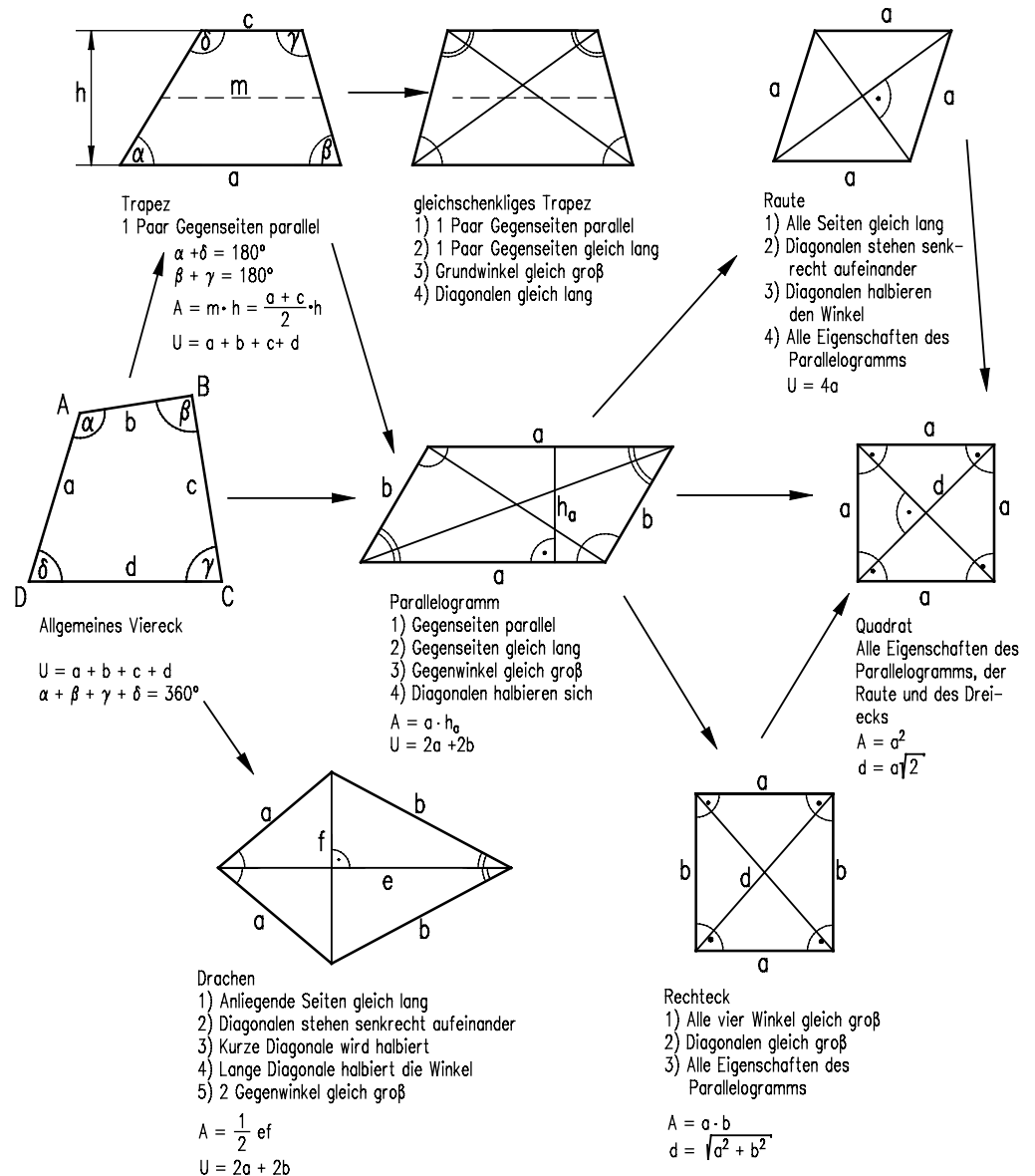


Abbildung 83 Familie der Vierecke

Regelmäßige Vielecke

Eigenschaften regelmäßiger Vielecke

Ein Vieleck, bei dem alle Seiten und Winkel gleich groß sind, heißt regelmäßiges Vieleck.

Einige dieser regelmäßigen Vielecke sind bekannt:

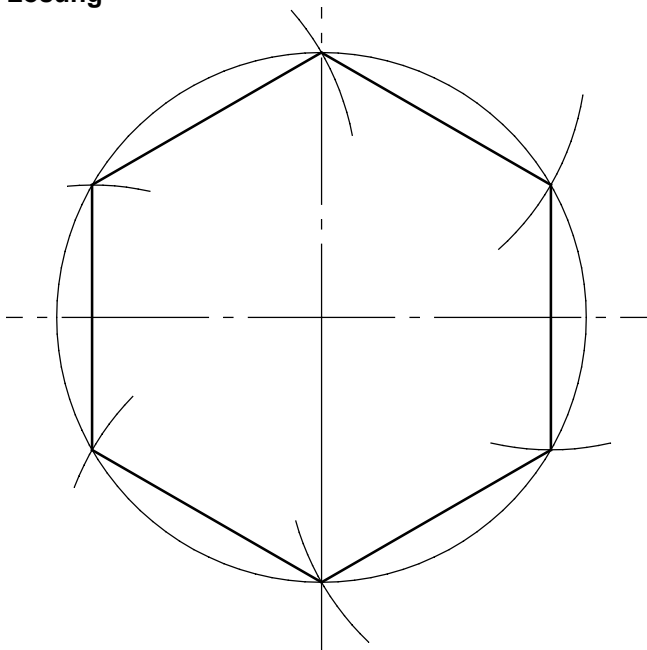
1. Das gleichseitige Dreieck, dessen Winkel alle 60° betragen.
2. Das Quadrat.
3. Das regelmäßige Sechseck, dessen Seiten genauso groß sind wie der Radius seines Umkreises.

Lehrbeispiel 1

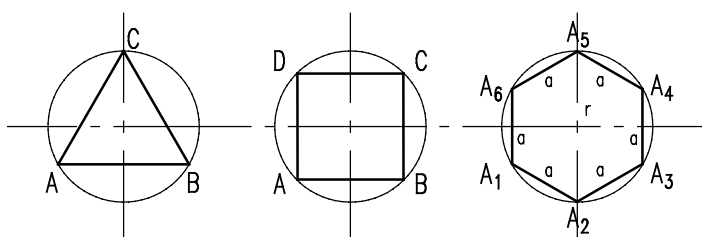
Konstruieren Sie ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seiten 3,5 cm lang sind!

Hinweis: Zeichnen Sie zunächst einen Kreis mit dem Radius 3,5 cm und tragen Sie den Radius sechsmal auf dem Kreisumfang ab.

Lösung



Die oben genannten regelmäßigen Vielecke lassen sich einfach konstruieren. Schwierigkeiten gibt es bei der Konstruktion anderer regelmäßiger Vielecke, die ebenfalls in der Praxis vorkommen, so z.B. regelmäßige 5-Ecke, 7-Ecke und 9-Ecke. Soll z.B. ein Flansch auf einem Lochkreis 5, 7 oder 9 Bohrungen gleichmäßig verteilt erhalten, so muss ein 5-, 7- oder 9-Eck angerissen werden.



Gleichseitige Dreiecke, Quadrate und regelmäßige Sechsecke haben einen Umkreis, d.h. es gibt einen Kreis, auf dem sich alle Eckpunkte befinden. Gleiches gilt für alle regelmäßigen Vielecke. Verbindet man den Mittelpunkt des Umkreises mit allen Eckpunkten, so entstehen gleichschenklige Dreiecke. Ein solches Teildreieck heißt **Bestimmungsdreieck** des Vielecks.

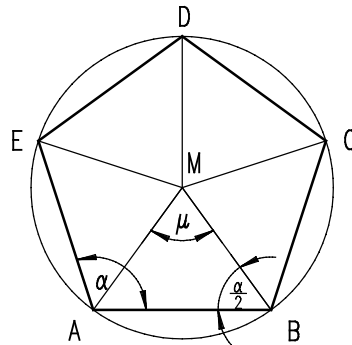


Abbildung 84 Regelmäßiges Fünfeck

Diese gleichschenkligen Bestimmungsdreiecke sind deckungsgleich (kongruent) und haben alle an der Spitze denselben Winkel μ , den **Mittelpunktswinkel** oder **Zentriwinkel** des regelmäßigen Vielecks. Ebenso sind die Basiswinkel $\alpha/2$ gleich groß.

Der Vieleckwinkel α ist gleich dem doppelten Basiswinkel.

Es gilt:

$$\mu = \frac{360^\circ}{n} \quad (n = \text{Eckenzahl})$$

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Hieraus können die Zentriwinkel μ und die Vieleckwinkel α berechnet werden.

Seitenzahl n	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Zentriwinkel μ	120°	90°	72°	60°	$51\frac{3}{7}^\circ$	45°	40°	36°	30°	24°	18°
Vieleckwinkel α	60°	90°	108°	120°	$128\frac{4}{7}^\circ$	135°	140°	144°	150°	156°	162°

Tabelle 4 Berechnung von Zentriwinkel μ und Vieleckwinkel α

Mit dieser Kenntnis können nun regelmäßige Vielecke gezeichnet werden, sofern die Eckenzahl und der Radius (oder Durchmesser) des Umkreises gegeben ist.

Sehnen- und Tangentenvierecke

Sehnenvierecke

Der Name dieser Vierecke kommt von ihrer wichtigsten Eigenschaft: Die vier Viereckseiten bilden Sehnen eines Kreises, d.h.

Sehnenvierecke haben einen Umkreis.

Es stellt sich nun die Frage, welche Eigenschaft besitzt ein Viereck, das einen Umkreis hat? Zur Untersuchung dieser Frage wird ein beliebiger Kreis und in diesen Kreis ein beliebiges Viereck, dessen Eckpunkte auf dem Kreis liegen, gezeichnet.

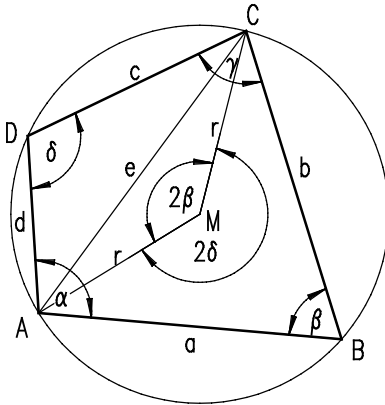


Abbildung 85 Sehnenviereck

Verbindet man A und C mit dem Mittelpunkt M, so entstehen über der Diagonalen e (als Sehne des Umkreises) zwei Winkel, nämlich Winkel β und Winkel CMA. Winkel CMA ist der Zentriwinkel zum Peripheriewinkel β .

Demnach gilt: $\angle CMA = 2 \cdot \beta$

Andererseits gilt, dass der Winkel, der den Winkel CMA zu 360° ergänzt, gleich $2 \cdot \delta$ beträgt.

Folglich:

$$2 \cdot \beta + 2 \cdot \delta = 360^\circ \text{ oder}$$

$$\underline{\underline{\beta + \delta = 180^\circ}}$$

Mithilfe der Diagonale $f(\overline{BD})$ kann gleiches für die Winkel α und γ bewiesen werden.

$$\underline{\underline{\alpha + \gamma = 180^\circ}}$$

In jedem Sehnenviereck beträgt die Winkelsumme von zwei gegenüberliegenden Winkeln 180° .

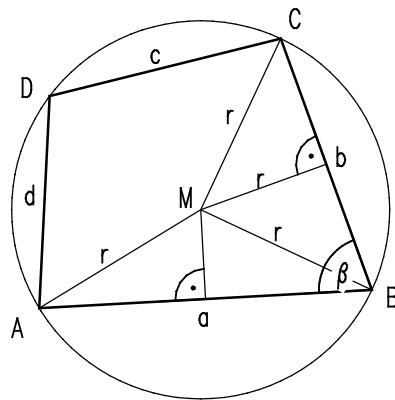
Die Kenntnis dieses Sachverhaltes ermöglicht nun die Konstruktion von Sehnenvierecken, die gleichzeitig eine Wiederholung der Dreieckskonstruktionen darstellen soll.

Lehrbeispiel 2

Konstruieren Sie das Sehnenviereck ABCD mit $a = 3 \text{ cm}$; $\beta = 120^\circ$; $b = 2,5 \text{ cm}$; $c = 3,5 \text{ cm}$!

Lösung

Planfigur:



Die **Planfigur** wird am einfachsten mit dem Umkreis begonnen.

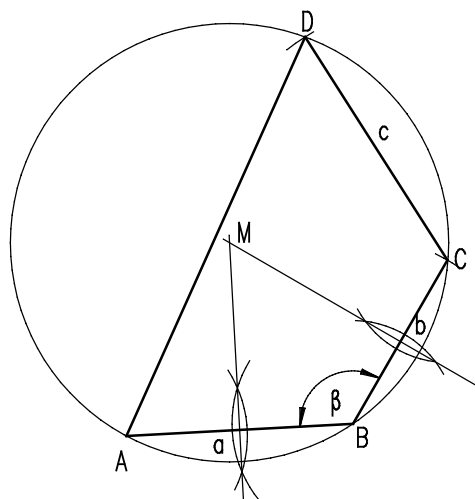
Der Umkreismittelpunkt M hat von allen vier Ecken den Abstand r (Umkreisradius). Die entstehenden Dreiecke ABM und BCM sind demnach gleichschenkelig. M liegt auf den Mittelloten von [AB] und [BC].

Plantext:

Teilviereck ABCM ist konstruierbar aus a, β , b und den Mittelloten auf \overline{AB} und \overline{BC} .

- D liegt:
1. auf k (M, $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$)
 2. auf k (C, c)

Konstruktionsfigur:



Konstruktionstext:

Gezeichnet wird die Strecke $a = 3 \text{ cm}$ mit den Endpunkten A und B. Dann A [AB] in B den Winkel $\beta = 120^\circ$ antragen!

Der Kreis um B mit Radius $b = 2,5 \text{ cm}$ schneidet den freien Schenkel des Winkels β in C. Nun werden die Mittellote auf $[AB]$ und $[BC]$ errichtet! Sie schneiden sich in M, dem Umkreismittelpunkt. Um M wird ein Kreis mit Radius $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ gezeichnet! Der Kreis um C mit Radius $c = 3,5 \text{ cm}$ schneidet den Kreis um M in D. So ist das gesuchte Sehnenviereck ABCD konstruiert.

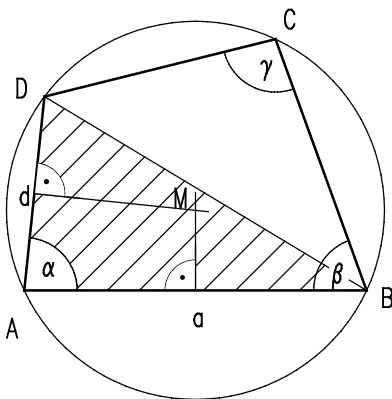
Lehrbeispiel 3

Konstruieren Sie das Viereck ABCD mit $a = 5 \text{ cm}$, $d = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 100^\circ$ und $\gamma = 110^\circ$!

Lösung

Beim gesuchten Viereck ABCD handelt es sich um ein Sehnenviereck, da $\alpha + \gamma = 180^\circ$ betragen. Viereck ABCD hat demnach einen Umkreis.

Planfigur:



Plantext:

Teildreieck ABD ist konstruierbar aus a , d , α .

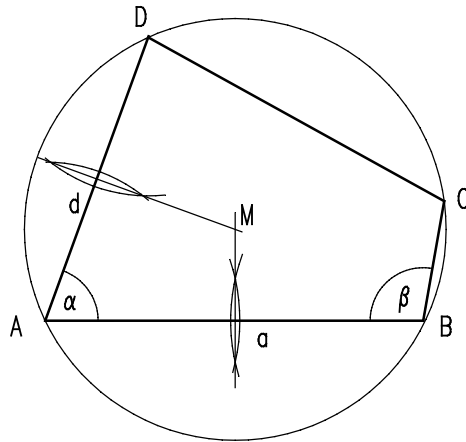
M liegt:

1. auf dem Mittellot von $[AB]$
2. auf dem Mittellot von $[AD]$

C liegt:

1. auf dem freien Schenkel des Winkels β
2. auf $k(M, \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD})$

Konstruktionsfigur:



Tangentenvierecke

Bei den Tangentenvierecken bilden die vier Viereckseiten Tangenten an einem gemeinsamen Kreis, d.h.

Tangentenvierecke haben einen Inkreis.

Von den bisher bekannten Vierecken haben nur drei einen Inkreis: Quadrat, Raute und Drachen. Auch für die Tangentenvierecke soll untersucht werden, welche besonderen Eigenschaften sie besitzen. Gezeichnet wird dazu ein Kreis und um diesen Kreis ein Viereck.

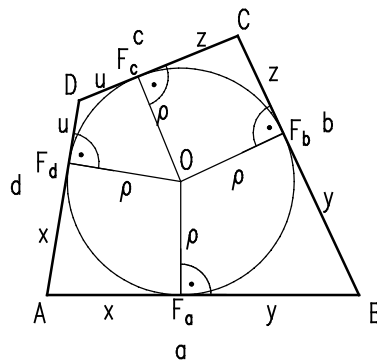


Abbildung 86 Tangentenviereck

Fällt man vom Inkreismittelpunkt O die Lote auf die vier Seiten, so erhält man die Fußpunkte F_a , F_b , F_c und F_d . Ihr Abstand von O ist gleich dem Inkreisradius ρ .

Die vier Viereckseiten werden durch die Lote in jeweils zwei Teile geteilt.

Nach dem Lehrsatz „Die von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis gezogenen Tangenten sind gleich lang“ erhält man für die Teilstrecken:

$$\overline{AF_a} = \overline{AF_d} = x$$

$$\overline{BF_a} = \overline{BF_b} = y$$

$$\overline{CF_b} = \overline{CF_c} = z$$

$$\overline{DF_c} = \overline{DF_d} = u$$

Für die Seiten des Vierecks gilt deshalb:

$$(1) \quad \overline{AB} = x + y$$

$$(2) \quad \overline{BC} = y + z$$

$$(3) \quad \overline{DC} = z + u$$

$$(4) \quad \overline{AD} = x + u$$

$$(1) + (3): \quad \overline{AB} + \overline{DC} = x + y + z + u$$

$$(2) + (4): \quad \overline{AD} + \overline{BC} = x + y + z + u$$

Die Summe der Gegenseiten ist demnach gleich groß.

In jedem Tangentenviereck sind die Summen der Gegenseiten gleich.

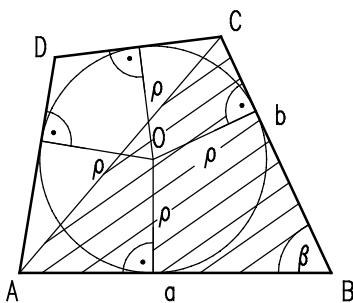
Für die drei regelmäßigen Vierecke mit Inkreis, Quadrat, Raute und Drachen kann die Richtigkeit dieses Lehrsatzes sehr schnell nachgeprüft werden.

Lehrbeispiel 4

Konstruieren Sie das Tangentenviereck ABCD aus $\rho = 3 \text{ cm}$, $a = 6 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$ und $\beta = 100^\circ$!

Lösung

Planfigur:



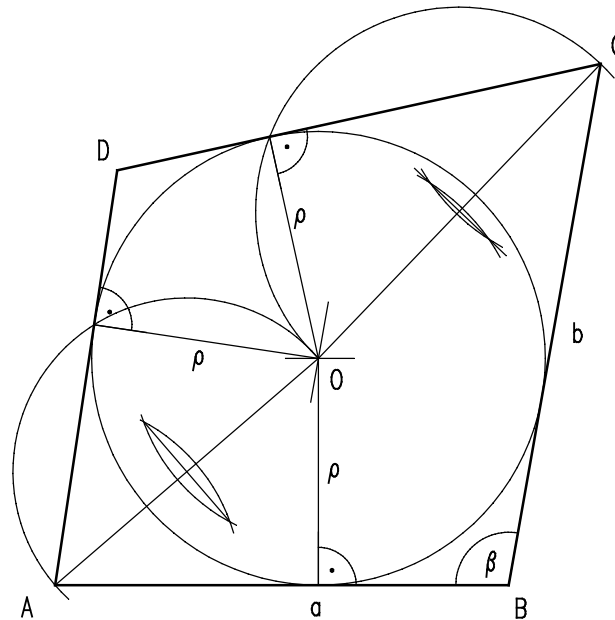
Plantext:

Teildreieck ABC ist konstruierbar aus a , β , b .

- O liegt:
1. auf einer Parallelen zu AB im Abstand ρ
 2. auf einer Parallelen zu BC im Abstand ρ

- D liegt:
1. auf der Tangente von A an den $k(O, \rho)$
 2. auf der Tangente von C an den $k(O, \rho)$

Konstruktionsfigur:



Lehrbeispiel 5

Untersuchen Sie, ob das Viereck ABCD aus $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6,3 \text{ cm}$, $c = 5,9 \text{ cm}$ und $d = 4,6 \text{ cm}$ einen Inkreis hat!

Lösung

Vierecke mit Inkreis sind Tangentenvierecke. Für sie gilt, dass die Summen der Gegenseiten gleich groß sind.

$$a + c = 5 \text{ cm} + 5,9 \text{ cm} = \underline{10,9 \text{ cm}}$$

$$b + d = 6,3 \text{ cm} + 4,6 \text{ cm} = \underline{10,9 \text{ cm}}$$

Antwort: Viereck ABCD ist ein Tangentenviereck mit einem Inkreis.

Flächen- und Umfangsberechnung bei geradlinig begrenzten Flächen

Rechteck und Parallelogramm

Der Flächeninhalt eines Rechtecks berechnet sich mit dem Produkt aus Länge und Breite. Ein Parallelogramm kann durch Scherung in ein flächengleiches Rechteck verwandelt werden. Deshalb wird die Fläche dort auch aus Grundlinie und Höhe berechnet.

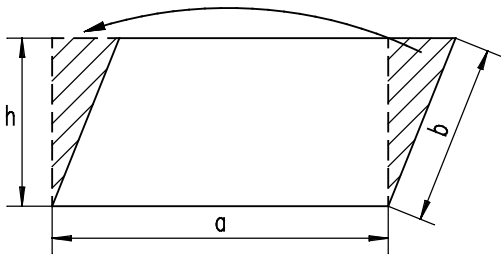


Abbildung 87 Flächenumwandlung Parallelogramm in Rechteck

Flächeninhalt von Parallelogramm und Rechteck: $A = a \cdot h$.

Umfang von Parallelogramm und Rechteck: $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

Da eine Raute ein spezielles Parallelogramm ist, gilt die Formel auch für die Raute.

Umfang einer Raute: $U = 4 \cdot a$

Dreieck

Ein Dreieck lässt sich zu einem Rechteck ergänzen. Dabei zeigt sich, dass die Dreiecksfläche die halbe Rechtecksfläche darstellt.

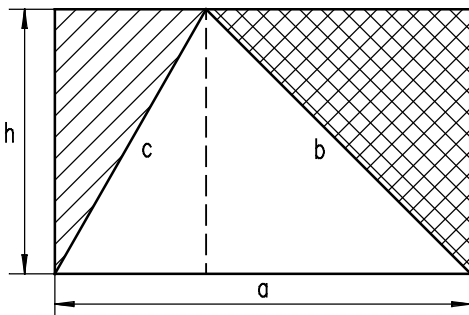


Abbildung 88 Dreiecksfläche als halbe Rechtecksfläche

Flächeninhalt eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2} a \cdot h$

Umfang eines Dreiecks: $U = a + b + c$

Trapez

Indem kongruente Dreiecke weggenommen, bzw. angefügt werden, entsteht aus einem Trapez ein Rechteck.

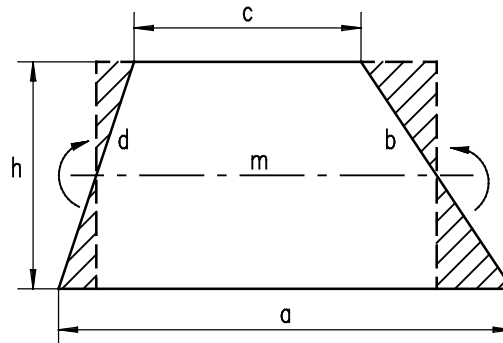


Abbildung 89 Umwandlung eines Trapezes in ein Rechteck

Flächeninhalt eines Trapezes: $A = m \cdot h$

Umfang eines Trapezes: $U = a + b + c + d$

Drachenviereck

Indem kongruente Dreiecke weggenommen, bzw. angefügt werden, entsteht aus einem Drachenviereck ein Rechteck.

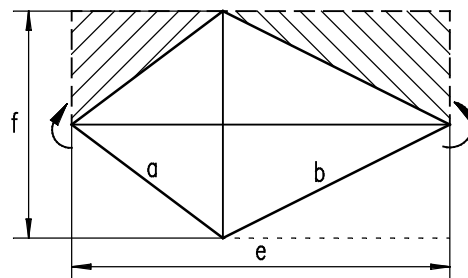


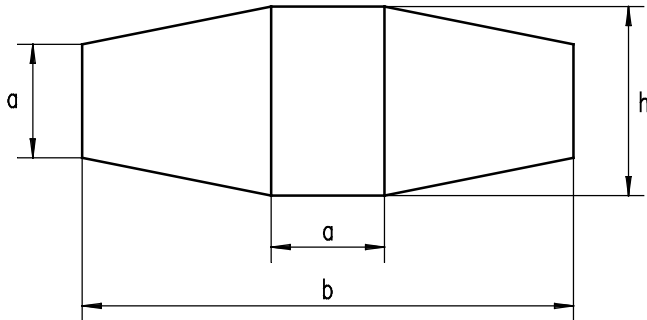
Abbildung 90 Umwandlung eines Drachenvierecks in ein Rechteck

Flächeninhalt eines Drachenvierecks: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

Umfang eines Drachenvierecks: $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

Lehrbeispiel 6

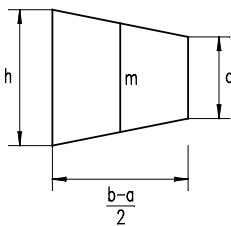
Berechnen Sie den Blechbedarf für das abgebildete Knotenblech für $a = 90 \text{ mm}$, $b = 350 \text{ mm}$ und $h = 200 \text{ mm}$!

**Lösung**

Die Fläche setzt sich aus 2 Trapez- und einer Rechteckfläche zusammen

$$A = 2 \cdot A_{\text{Trapez}} + A_{\text{Rechteck}}$$

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot h$$



$$m = \frac{a+h}{2}$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a+h}{2} \cdot \frac{b-a}{2}$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{a+h}{2} \cdot \frac{b-a}{2} + a \cdot h \\ &= \frac{(a+h)(b-a)}{2} + a \cdot h \\ &= \frac{(90 \text{ mm} + 200 \text{ mm})(350 \text{ mm} - 90 \text{ mm})}{2} + 90 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm} \\ &= 55700 \text{ mm}^2 \\ A &= 557 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Antwort: Der Blechbedarf beträgt 557 cm^2 .

Mithilfe der Winkelfunktionen und rechtwinkliger Dreiecke lassen sich noch weitere Spezialformeln herleiten, bzw. weitere Größen in den Vielecken bestimmen.

1.7.2 Kreisförmig begrenzte Flächen

Kreis

Mithilfe des Umfangs eines Kreises ist die Zahl π definiert worden. π ist das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser.

$$\pi = \frac{U}{d}$$

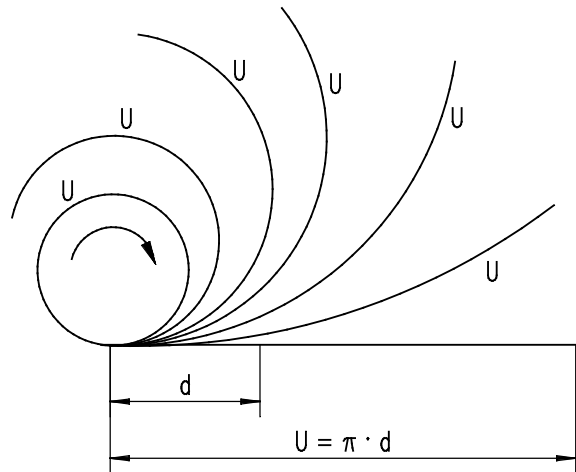


Abbildung 91 Aufrollen eines Kreises

Wenn nun π bekannt ist, so gilt:

Umfang eines Kreises: $U = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$

Zur Herleitung der Flächenformel wird einem Kreis ein Sechseck umschrieben.

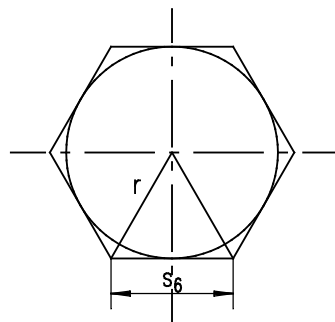


Abbildung 92 Umschriebenes Sechseck

Die Fläche des Sechsecks berechnet sich aus:

$$A_6 = 6 \cdot \frac{s_6 \cdot r}{2}$$

Der Umfang des Sechsecks beträgt:

$$U_6 = 6 \cdot s_6$$

Damit lässt sich für den Flächeninhalt schreiben:

$$A_6 = U_6 \cdot \frac{r}{2}$$

Wird ein n-Eck mit einer sehr großen Eckenzahl genommen, so strebt einerseits die Fläche des n-Ecks gegen die Fläche des Kreises. Andererseits strebt der Umfang des n-Ecks gegen den Umfang des Kreises $U = 2 \cdot \pi \cdot r$. Also gilt für den Kreis:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \\ &= \pi \cdot r^2 \end{aligned}$$

Flächeninhalt eines Kreises: $A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie den Durchmesser eines Kupferdrahtes von $1,5 \text{ mm}^2$ Querschnittsfläche!

Lösung

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \\ d^2 &= \frac{4 \cdot A}{\pi} \\ d &= \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{4 \cdot 1,5 \text{ mm}^2}{\pi}} \\ &\approx 1,382 \text{ mm} \end{aligned}$$

Antwort: Der Durchmesser beträgt 1,38 mm.

Kreisring

Die Kreisringfläche ergibt sich als Differenz von äußerer und innerer Kreisfläche.

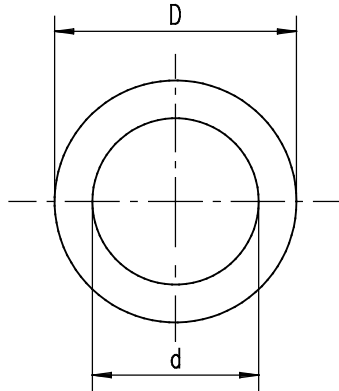


Abbildung 93 Kreisring

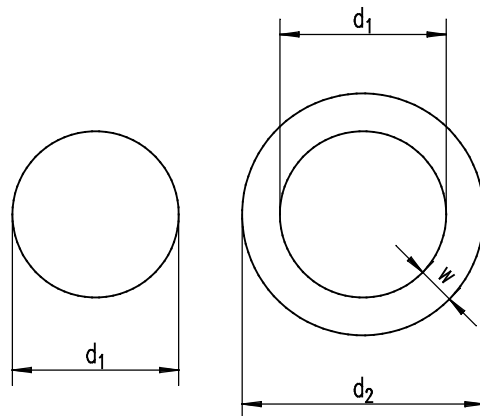
Fläche eines Kreisrings: $A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$

Lehrbeispiel 2

Ein Rohr wird mit einer Isolationsschicht umwickelt. Dadurch vergrößert sich der Umfang des Rohres um 75 mm.

Berechnen Sie die Dicke der Isolationsschicht!

Lösung



Ursprünglicher Umfang: $U_1 = \pi \cdot d_1$

Umfang mit Isolation: $U_2 = \pi \cdot d_2 \quad | \quad d_2 = d_1 + 2 \cdot w$
 $= \pi (d_1 + 2w)$

Umfangsunterschied: 75 mm

$$\begin{aligned}
 U_2 - U_1 &= 75 \text{ mm} && | \text{ einsetzen} \\
 \pi (d_1 + 2 w) - \pi d_1 &= 75 \text{ mm} \\
 \pi d_1 + 2\pi w - \pi d_1 &= 75 \text{ mm} \\
 w &= \frac{75 \text{ mm}}{2\pi} \\
 &= 11,9366 \\
 &\approx 12 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Antwort: Die Wanddicke beträgt 12 mm.

Kreisausschnitt (Kreissektor)

Mithilfe des Dreisatzes kann die Fläche des Kreissektors berechnet werden.

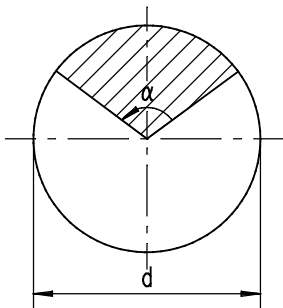


Abbildung 94 Kreisausschnitt

Es gilt

$$\text{Gesamtfläche} \hat{=} 360^\circ$$

$$\text{Sektorfläche } A \hat{=} \alpha$$

Und damit gilt

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$\text{Fläche des Kreisausschnitts: } A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$$

Da für die Länge des Sektorbogens ebenfalls das o.g. Verhältnis anwendbar ist, also

$$\text{Kreisumfang} \hat{=} 360^\circ$$

$$\text{Sektorbogen } b \hat{=} \alpha$$

gilt:

$$b = \pi \cdot d \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$\text{Bogenlänge des Kreisausschnitts: } b = \frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360^\circ}$$

Kreisabschnitt (Kreissegment)

Der Flächeninhalt eines Kreisabschnitts lässt sich berechnen, indem von der Fläche des Kreisausschnitts das Dreieck abgezogen wird, dass von der Sehne und den Radien gebildet wird.

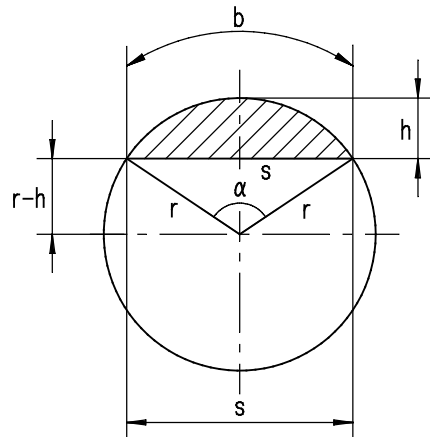


Abbildung 95 Kreisabschnitt

$$A = A_{\text{Kreisausschnitt}} - A_{\text{Dreieck}}$$

$$= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 - \frac{s(r-h)}{2}$$

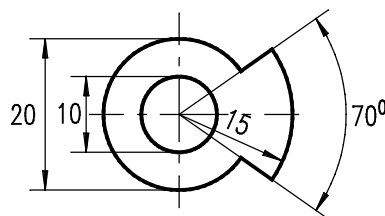
Fläche des Kreisabschnitts: $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 - \frac{s(r-h)}{2}$

Für die Länge des zugehörigen Bogens gilt die Formel wie für den Kreisausschnitt.

Bogenlänge des Kreisabschnitts: $b = \frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360^\circ}$

Lehrbeispiel 3

Berechnen Sie die Fläche des dargestellten Abdeckbleches!



Lösung

Die Fläche ergibt sich aus dem Kreisring mit $d_1 = 20 \text{ mm}$ und $d_2 = 10 \text{ mm}$ und dem Kreisringausschnitt mit $d_3 = 30 \text{ mm}$, $d_1 = 20 \text{ mm}$ und $\alpha = 70^\circ$.

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{Ring}} + A_{\text{Ausschnitt}} & A_{\text{Ring}} &= \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2) & A_{\text{Ausschnitt}} &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot (d_3^2 - d_1^2) \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(d_1^2 - d_2^2) + \frac{\alpha}{360^\circ} (d_3^2 - d_1^2) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(20^2 \text{ mm}^2 - 10^2 \text{ mm}^2) + \frac{70^\circ}{360^\circ} (30^2 \text{ mm}^2 - 20^2 \text{ mm}^2) \right] \\ &= 311,96 \text{ mm}^2 \\ &\approx 3,12 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

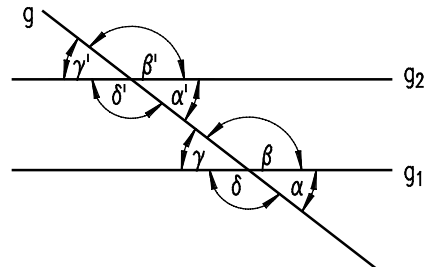
Antwort: Die Fläche des Bleches beträgt 3,12 cm².

Mithilfe der Winkelfunktionen und rechtwinkliger Dreiecke lassen sich noch weitere Spezialformeln herleiten, bzw. weitere Größen bei den Kreisteilen bestimmen.

Aufgaben

Aufgabe 1

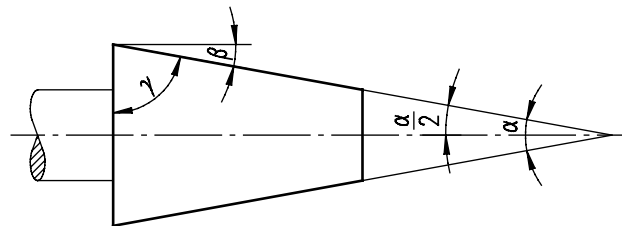
Die beiden Parallelen g_1 und g_2 werden von der Geraden g geschnitten.



- 1.1 Geben Sie die entstehenden Scheitelwinkel an (4 Möglichkeiten)!
- 1.2 Geben Sie die Nebenwinkel zu α an!
- 1.3 Errechnen Sie α' , β' , γ' und δ' für $\alpha = 35^\circ$! (Begründungen angeben!)

Aufgabe 2

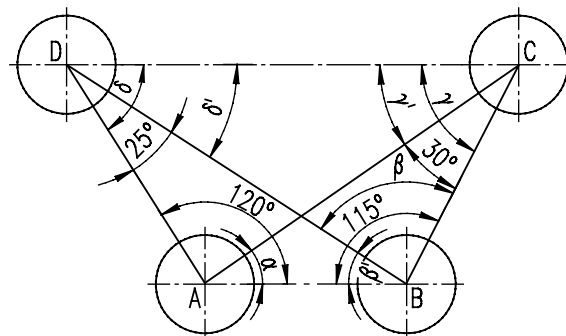
Bei einem Kegel beträgt der Öffnungswinkel an der Spitze $\alpha = 36^\circ 52'$.



Berechnen Sie die Winkel β und γ ! (Begründungen angeben!)

Aufgabe 3

Die Lochmittenabschnitte von 4 Bohrungen A, B, C und D stehen zueinander in den angegebenen Winkeln. ($AB \parallel CD$).



Berechnen Sie die fehlenden Winkel α , β , γ und δ ! (Begründungen angeben!)

Aufgabe 4

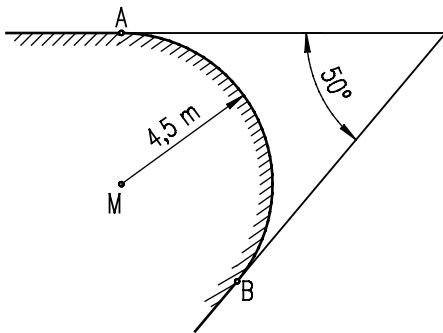
Konstruieren Sie den Punkt P , der vom Scheitel S des Winkels $\alpha = 50^\circ$ den Abstand $r = 4 \text{ cm}$ hat und von den Schenkeln des Winkels α gleich weit entfernt ist! Geben Sie die geometrischen Orte an!

Aufgabe 5

Wo liegen alle Punkte P , die von den beiden festen Punkten A und B gleich weit entfernt sind? Geben Sie den geometrischen Ort an!

Aufgabe 6

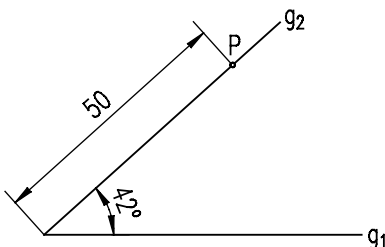
Die Bordsteinkanten zweier Straßen schneiden sich unter dem Winkel 50° . Die Ecke soll mit dem Radius $r = 4,5 \text{ m}$ gerundet werden.



Konstruieren Sie die Übergangspunkte im Maßstab 1:200! Messen Sie das Kontrollmaß \overline{AB} !

Aufgabe 7

Teilen Sie die Strecke $s = 6,6 \text{ cm}$ mit dem Zirkel in 4 gleiche Teile!

Aufgabe 8

(Zeichnung nicht maßstäblich!)

Konstruieren Sie die kürzeste Entfernung des Punktes P von der Geraden g_1 und messen Sie anschließend diese Entfernung a !

Aufgabe 9

Drehen Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $A(2;1)$, $B(5;3)$ und $C(1,5;2,5)$ um den Punkt $P(-1;1)$ und verschieben Sie es anschließend um den Vektor, der im Ursprung beginnt und im Punkt $E(4;1)$ endet!

Aufgabe 10

Spiegeln Sie das Viereck, das durch die Punkte $A(-1;1)$, $B(-2;6)$, $C(-4;4)$ und $D(-3;2)$ gegeben ist zunächst an der y -Achse und das Spiegelbild anschließend an der x -Achse! Bestimmen Sie die Koordinaten der gespiegelten Punkte. Was fällt auf? Wo- durch kann diese Spiegelung ersetzt werden?

Aufgabe 11

Konstruieren Sie die Strecke x zu den Strecken $a = 4 \text{ cm}$, $b = 6,5 \text{ cm}$, $d = 3,5 \text{ cm}$, wenn $a:b = x:d$! (Berechnen Sie x zur Probe!)

Aufgabe 12

Die Bohrungen für neun Klemmen sollen auf einer Strecke $l = 11,7 \text{ cm}$ gleichmäßig verteilt werden (Endabstände und Teilung sind gleich groß).

Konstruieren Sie die Bohrungsmittelpunkte, und messen Sie die Teilung s !

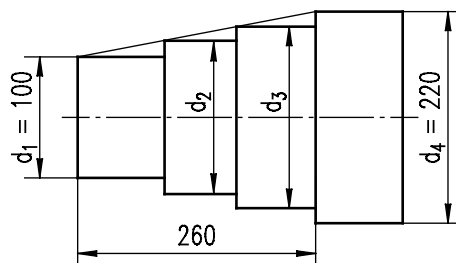
Aufgabe 13

Teilen Sie eine Strecke $s = 12 \text{ cm}$ im Verhältnis $s_1:s_2 = 2:3$!

Messen Sie die beiden Teilstrecken s_1 und s_2 !

Aufgabe 14

Eine Stufenscheibe, deren Stufen gleich breit sind, soll gerade so abgestuft werden, dass die Verbindungslinie der Kanten eine Gerade ergibt.



Ermitteln Sie zeichnerisch die Durchmesser d_2 und d_3 (Maßstab 1:2)!

Aufgabe 15

Zeichnen Sie in ein Rechteck $ABCD$ die beiden Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$! Ihr Schnittpunkt sei M . Welche dabei entstehenden Dreiecke sind kongruent? Geben Sie den entsprechenden Kongruenzsatz in Kurzform an!

Aufgabe 16

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit $\alpha = \beta = \gamma$ und $h_c = 3 \text{ cm}$!

Aufgabe 17

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ und $c = 5 \text{ cm}$!

Messen Sie zur Kontrolle den Winkel γ !

Aufgabe 18

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $a = 4,5 \text{ cm}$, $b = 5,5 \text{ cm}$ und $\gamma = 70^\circ$!

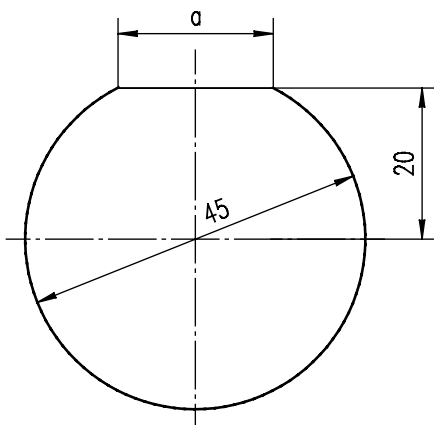
Messen Sie zur Kontrolle die Seite c !

Aufgabe 19

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b = 5 \text{ cm}$, $\beta = 50^\circ$ und $\gamma = 80^\circ$!

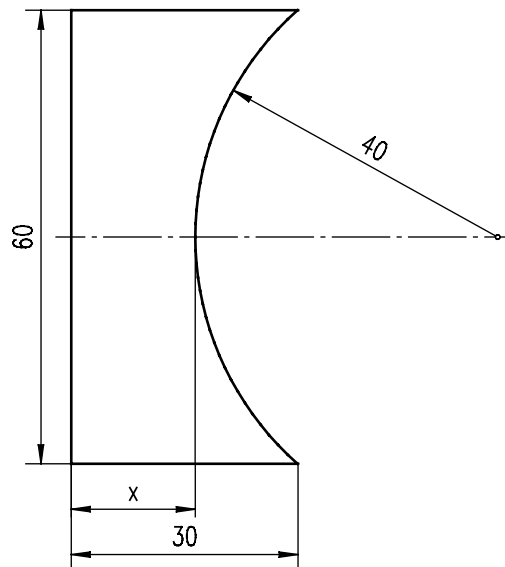
Messen Sie zur Kontrolle a !

Aufgabe 20



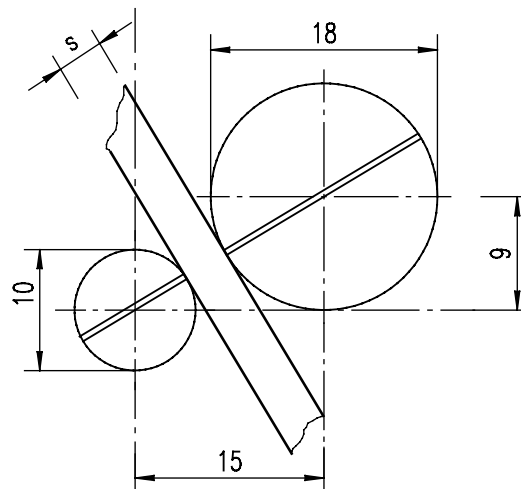
Berechnen Sie das Maß a , das beim Abfräsen der Welle entsteht!

Aufgabe 21



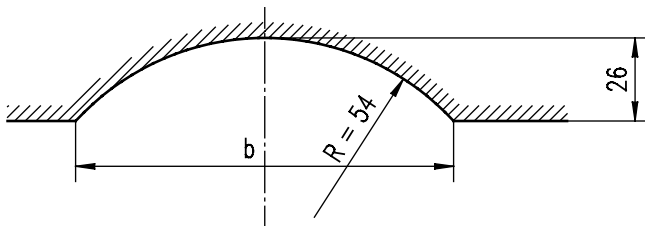
Berechnen Sie das Maß x an der abgerundeten Blechbeilage!

Aufgabe 22



Berechnen Sie die Blechdicke s , die ein Sicherungsblech für die beiden Zylinderschrauben gerade noch haben darf! (nicht maßstäblich)

Aufgabe 23

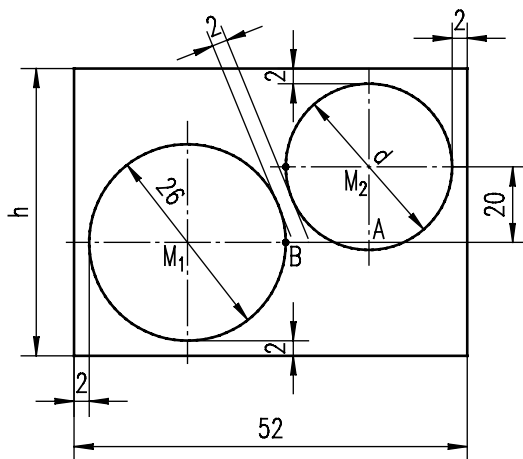


(nicht maßstäblich)

In eine Platte soll eine Vertiefung wie skizziert eingearbeitet werden.

Berechnen Sie das Maß b ! (nicht maßstäblich)

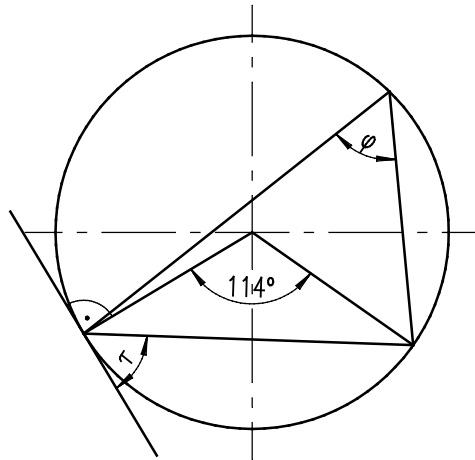
Aufgabe 24



In einer Platte sollen sich zwei Bohrungen befinden, deren Abstände zu allen Kanten jeweils 2 mm betragen.

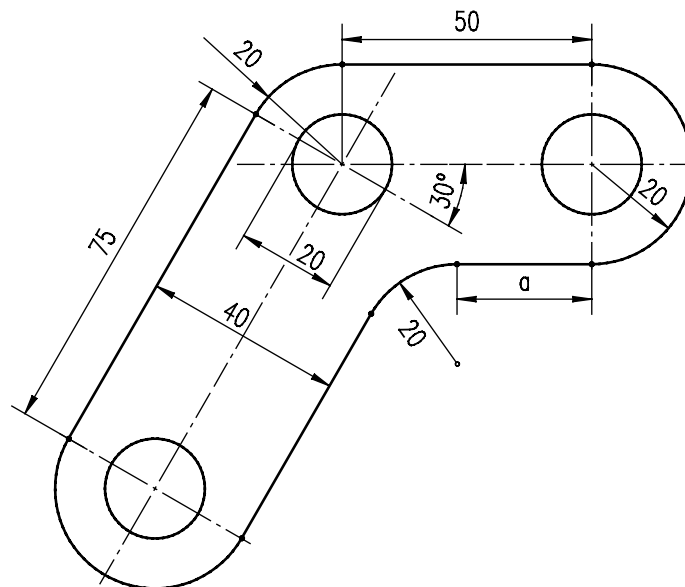
Berechnen Sie den Durchmesser d der Bohrung und die Höhe h der Platte!

Aufgabe 25



Berechnen Sie die Winkel φ und τ !

Aufgabe 26



(Zeichnung nicht maßstäblich!)

Konstruieren Sie die Lasche einschließlich aller Berührungspunkte der geraden Stücke mit den Kreisbögen! Wie lang ist das Maß a ?

Aufgabe 27

Bei einem Riementrieb haben die beiden Riemenscheiben die Durchmesser $D = 300 \text{ mm}$ und $d = 120 \text{ mm}$ und den Achsabstand $a = 500 \text{ mm}$.

Konstruieren Sie die Riemen für einen

- *offenen Riementrieb und*
- *gekreuzten Riementrieb*

im Maßstab 1:5 durch Konstruktion der Berührungspunkte! Kontrollieren Sie Ihre Zeichnung durch Messen der geraden Riemenstücke t_1 (offener Riementrieb) und t_2 (gekreuzter Riementrieb)!

Aufgabe 28

Konstruieren Sie für ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $a = b = 10 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$ den

- *Umkreismittelpunkt,*
- *Inkreismittelpunkt und*
- *Schwerpunkt!*

Aufgabe 29

Stellen Sie fest, welche Gemeinsamkeiten zwischen einer Raute und einem Rechteck bestehen!

Aufgabe 30

Ein Parallelogramm hat die Seiten $a = c = 5,5 \text{ cm}$ und $b = d = 2,5 \text{ cm}$ und die Diagonale $e = 7 \text{ cm}$.

Wandeln Sie das Parallelogramm in ein flächengleiches Rechteck und anschließend in ein flächengleiches Quadrat um! Messen Sie die Quadratseiten und berechnen Sie hieraus die Fläche A!

Aufgabe 31

In einem gleichschenkligen Trapez sind die Parallelseiten 13 cm und 7 cm lang. Die beiden Schenkel sind 5 cm lang.

Berechnen Sie die Fläche des Trapezes!

Aufgabe 32

Untersuchen Sie, ob die Vierecke mit folgenden Winkeln Sehnenvierecke sind!

- | | | | | |
|------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| 32.1 | $\alpha = 60^\circ;$ | $\beta = 100^\circ;$ | $\gamma = 120^\circ;$ | $\delta = 80^\circ$ |
| 32.2 | $\alpha = 60^\circ;$ | $\beta = 90^\circ;$ | $\gamma = 100^\circ;$ | $\delta = 110^\circ$ |
| 32.3 | $\alpha = 110^\circ;$ | $\beta = 70^\circ;$ | $\gamma = 70^\circ;$ | $\delta = 110^\circ$ |
| 32.4 | $\alpha = 90^\circ;$ | $\beta = 75^\circ;$ | $\gamma = 90^\circ;$ | $\delta = 105^\circ$ |

Aufgabe 33

Konstruieren Sie ein Sehnenviereck ABCD mit $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $d = 7 \text{ cm}$ und $\alpha = 80^\circ$!

Aufgabe 34

Stellen Sie fest, ob es unter den Vierecken mit folgenden Seitenlängen Tangentenvierecke gibt!

34.1 $a = 4 \text{ cm}$; $b = 5,5 \text{ cm}$; $c = 6 \text{ cm}$; $d = 4,5 \text{ cm}$

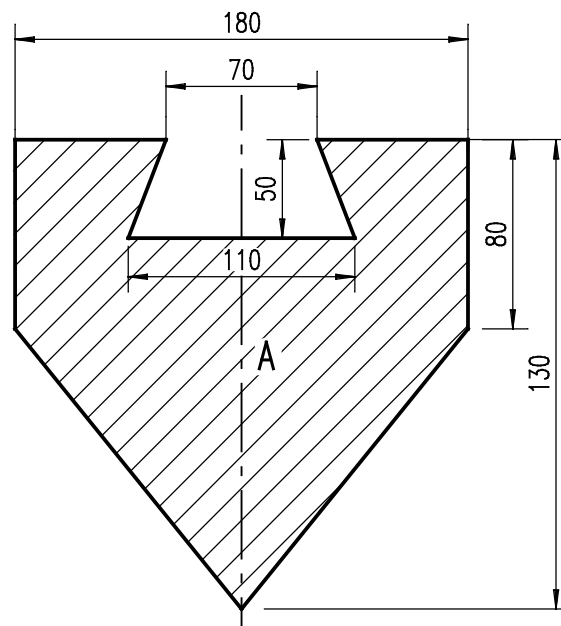
34.2 $a = 5 \text{ cm}$; $b = 6 \text{ cm}$; $c = 5 \text{ cm}$; $d = 6 \text{ cm}$

Aufgabe 35

Konstruieren Sie ein Tangentenviereck ABCD mit $\rho = 3,5 \text{ cm}$, $a = 6,5 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$ und $\beta = 80^\circ$!

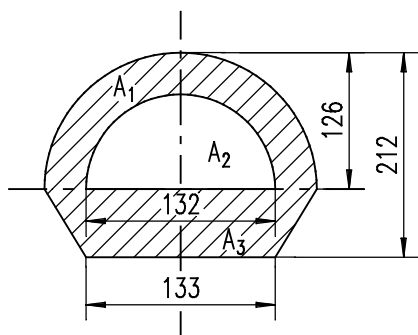
Aufgabe 36

Berechnen Sie folgenden Flächeninhalt!



Aufgabe 37

Berechnen Sie folgenden Flächeninhalt!



Lernbereich

2 Trigonometrie

2.1 Sinus, Kosinus und Tangens

Die Sinusfunktion

Steigt in einem Gelände die Straße auf 100 m um 20 m, so berechnet sich das Verhältnis von Höhenzunahme a zur Straßenlänge c zu

$$\frac{a}{c} = \frac{20 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0,2.$$

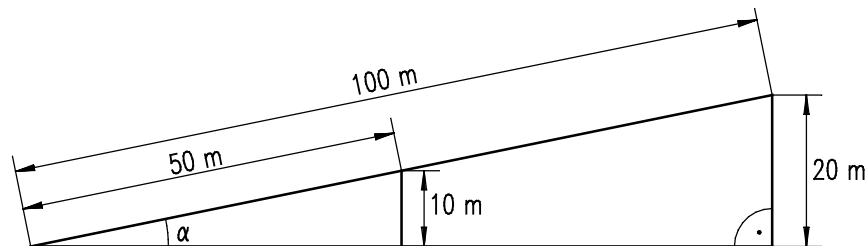


Abbildung 96 Straße mit Steigung

Bei der halben Strecke c' erfolgt auch nur der halbe Höhengewinn a' . Das Verhältnis bleibt gleich:

$$\frac{a'}{c'} = \frac{10 \text{ m}}{50 \text{ m}} = 0,2$$

Dies würde ebenso für die doppelte Strecke oder jede beliebige vielfache Strecke gelten. Offensichtlich ist dieses Verhältnis vom Steigungswinkel α abhängig. Für alle rechtwinkligen Dreiecke, die diesen Winkel α haben, ist das Verhältnis von a/c gleich. Für andere Winkel α ist dieses Verhältnis anders. Da dieses Verhältnis also eindeutig vom Winkel α abhängt, kann es als neues Maß für den Winkel benutzt werden.

Da dieses Seitenverhältnis also von der Größe des Winkels abhängt und sich mit diesem vergrößert oder verkleinert, kann es als Funktion des Winkels aufgefasst werden, als **Winkelfunktion** oder als **trigonometrische Funktion**. Diese Funktion heißt **Sinusfunktion**.

Allgemein:

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

wobei die Gegenkathete die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete ist und die Hypotenuse die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist.

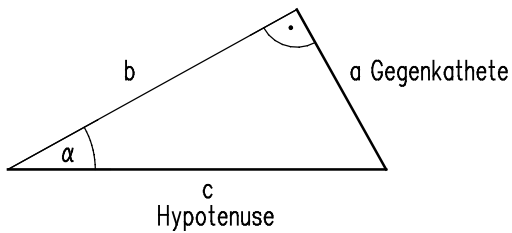


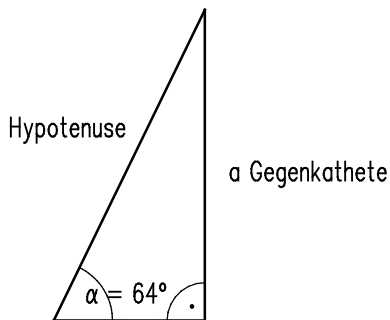
Abbildung 97 Rechtwinkliges Dreieck

Lehrbeispiel 1

Bestimmen Sie zeichnerisch den Sinus von 64° !

Lösung

1. Ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 64^\circ$ wird gezeichnet



2. Durch Abmessen ergibt sich

$$\sin 64^\circ = \frac{4,1}{4,6} = 0,89$$

In jeder Zeichnung ergeben sich natürlich andere Längen. Das Verhältnis wird aber dem hier berechneten gleichen.

Je größer das Dreieck gewählt wird, desto genauer wird die Berechnung des Sinus-Wertes.

Lehrbeispiel 2

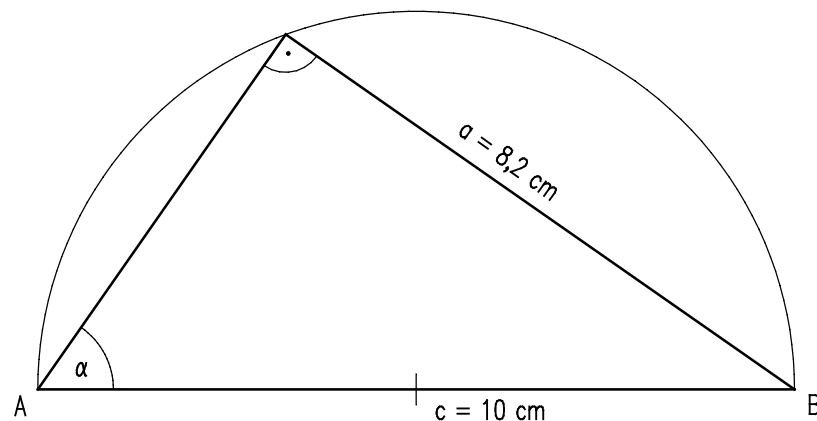
Bestimmen Sie durch Konstruktion den Winkel α , für den gilt $\sin \alpha = 0,82$!

Lösung

1. Berechnung von a und c

Für $c = 10$ cm und $a = 8,2$ cm ist das Verhältnis $0,82$.

2. Konstruktion eines Dreieckes mit diesen Werten (mithilfe des Thaleskreises)



3. Ablesen des Winkels α

$$\alpha = 55^\circ$$

Die zeichnerischen Methoden sind relativ ungenau. Die Sinus-Werte der einzelnen Winkel sind durch Taschenrechnerfunktionen abrufbar. Allerdings ist die Bedienung von Rechner zu Rechner leicht unterschiedlich. Vor allem muss der Rechner in den Dezimalgradmodus umgeschaltet werden. Bei den meisten Rechnern erscheint dann DEG in der Statusanzeige.

Lehrbeispiel 3

Berechnen Sie $\sin 73^\circ$ und $\sin 15^\circ 20' 30''$ mit **Ihrem** Taschenrechner!

Lösung

Durch Drücken von 73 SIN gibt der Rechner den Wert 0.9563047559 aus.

Da die meisten Rechner nicht mit Minuten und Sekunden rechnen können, muss zunächst der Winkel in Dezimalgrad umgerechnet werden

$$15^\circ 20' 30'' = 15 + 20/60 + 30/3600 = 15.34166666^\circ$$

Durch anschließendes Drücken der SIN-Taste gibt der Rechner den Wert 0.2645744260 aus.

Lehrbeispiel 4

Berechnen Sie mit **Ihrem** Taschenrechner aus $\sin \alpha = 0,4975$ und $\sin 2\beta = 0,8372$ die Winkel α und β !

Lösung

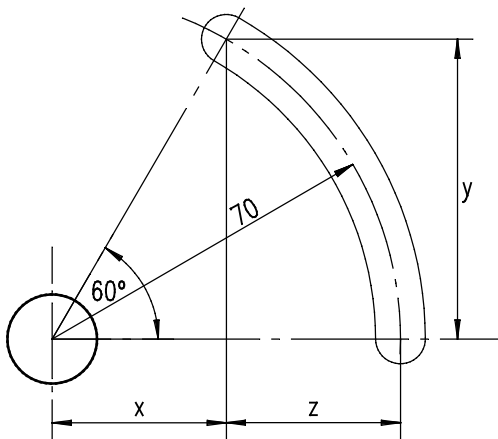
Durch Eingabe von 0.4975 INV SIN gibt der Taschenrechner den Wert 29.83473870 aus. Also ist $\alpha \approx 29,8^\circ$.

Durch Eingabe von 0.8372 INV SIN gibt der Taschenrechner den Wert 56.84561701 aus. Das ist der Wert für 2β . Also ist $\beta = 28.42280850 \approx 28,4^\circ$

Da durch die Sinusfunktion eine Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und einem Winkel gegeben ist, können jetzt aus Seiten Winkel und aus Winkeln Seiten berechnet werden. Dies eröffnet eine ganz neue Klasse von Berechnungsmöglichkeiten.

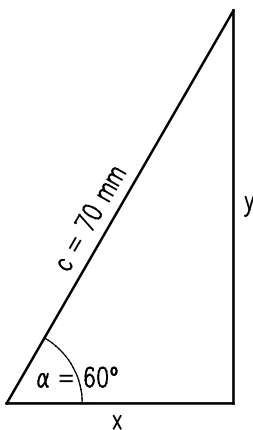
Lehrbeispiel 5

Bestimmen Sie für die abgebildete Langlochführung die Maße x , y und z !



Lösung

1. Aus dem Dreieck



(Zeichnung nicht maßstäblich!)

erhält man

$$\begin{aligned} \frac{y}{c} &= \sin \alpha \Rightarrow y = c \cdot \sin \alpha = 70 \text{ mm} \cdot \sin 60^\circ \\ &= 70 \text{ mm} \cdot 0,866025 \\ &= 60,622 \\ &\approx \underline{\underline{60,6 \text{ mm}}} \end{aligned}$$

2. Mit dem Satz des Pythagoras gilt im selben Dreieck

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= c^2 \\x^2 &= c^2 - y^2 \\x &= \sqrt{70^2 \text{ mm}^2 - 60,622^2 \text{ mm}^2} \\&= \underline{\underline{35 \text{ mm}}}\end{aligned}$$

3. Aus $c = x + z$ berechnet sich z zu

$$\begin{aligned}z &= c - x \\&= 70 \text{ mm} - 35 \text{ mm} \\&= \underline{\underline{35 \text{ mm}}}\end{aligned}$$

Die Kosinusfunktion

Auch das Verhältnis von Ankathete zur Hypotenuse ist im rechtwinkligen Dreieck ein Kennzeichen, eine Funktion des Winkels, ein Maß für den Winkel. Diese Funktion wird **Kosinusfunktion** genannt.

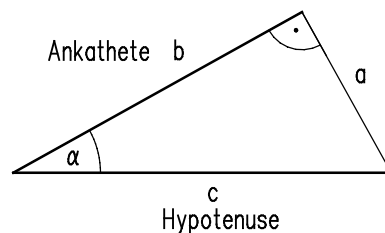


Abbildung 98 Ankathete am rechtwinkligen Dreieck

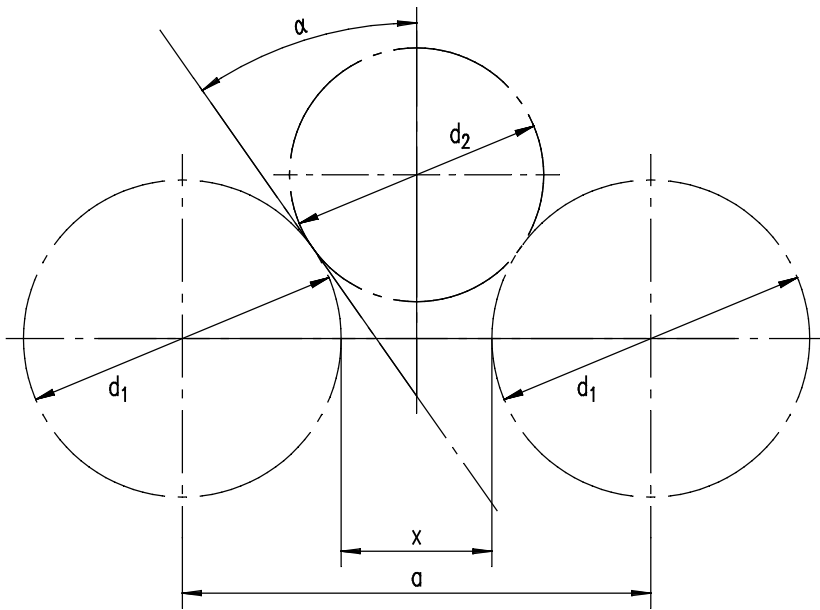
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

wobei die Ankathete die dem Winkel anliegende Kathete des Dreiecks ist.

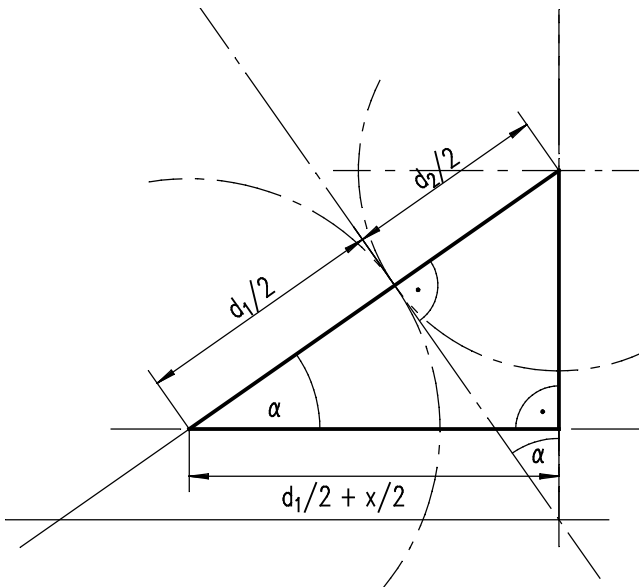
Lehrbeispiel 6

Bei einem Zahnradgetriebe beträgt der Winkel $\alpha = 35^\circ$. Die Durchmesser betragen $d_1 = 60 \text{ mm}$ und $d_2 = 48 \text{ mm}$.

Berechnen Sie den Abstand x und damit den Achsabstand a !



(Zeichnung nicht maßstäblich!)

Lösung

Aus dem skizzierten Dreieck erhält man

$$\cos \alpha = \frac{\frac{d_1}{2} + \frac{x}{2}}{\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}} = \frac{d_1 + x}{d_1 + d_2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \cos \alpha (d_1 + d_2) - d_1 \\ &= \cos 35^\circ (60 \text{ mm} + 48 \text{ mm}) - 60 \text{ mm} \\ &= 28,468 \text{ mm} \\ &\approx 28,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{d_1}{2} + x + \frac{d_1}{2} \\
 &= d_1 + x \\
 &= 60 \text{ mm} + 28,468 \text{ mm} \\
 &= 88,468 \text{ mm} \\
 &\approx 88,5 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Antwort: Der Abstand x beträgt 28,5 mm und der Achsenabstand 88,5 mm.

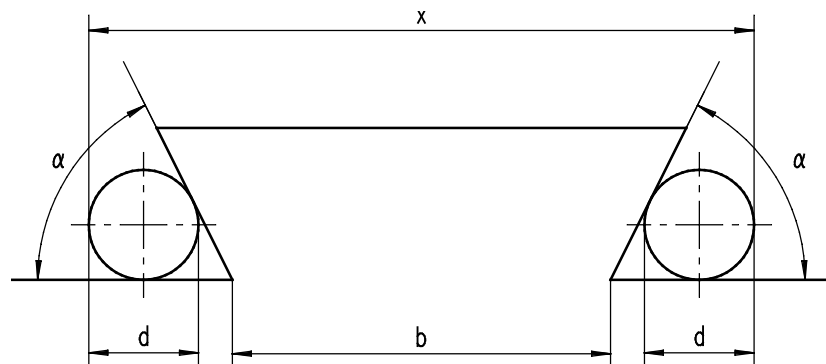
Die Tangensfunktion

Auch das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete ist eine Funktion des Winkels α , die **Tangensfunktion**.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

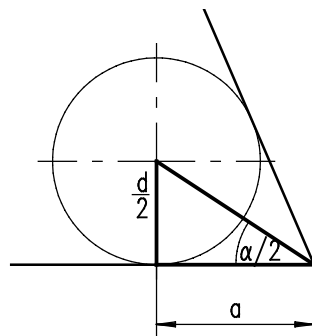
Lehrbeispiel 7

Bestimmen Sie für eine Schwalbenschwanzführung in Abhängigkeit von α , b und d das Kontrollmaß x !



Lösung

In dem skizzierten Dreieck lässt sich a bestimmen



$$\frac{d/2}{a} = \tan \frac{\alpha}{2} \Rightarrow a = \frac{d/2}{\tan \alpha/2}$$

Damit gilt für x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} + a + b + a + \frac{d}{2} \\ &= d + 2a + b \\ &= d + \frac{d}{\tan \alpha / 2} + b \end{aligned}$$

Beziehung zwischen den Winkelfunktionen

Da in einem rechtwinkligen Dreieck $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ und $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan \alpha \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Da neben den Winkelfunktionsdefinitionen in einem rechtwinkligen Dreieck auch der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Diese Gesetzmäßigkeit bezeichnet man auch als **Trigonometrischen Pythagoras**.

Anmerkung: $\sin^2 \alpha$ bedeutet, dass zunächst von α der Sinus-Wert berechnet wird. Dann wird dieser Wert quadriert.

Lehrbeispiel 8

Berechnen Sie den $\tan \alpha$, wenn $\sin \alpha = 0,6$ ist!

Lösung

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ & & \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \\ & & \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ & & & \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \\ &= \frac{0,6}{\sqrt{1 - 0,6^2}} \\ &= 0,75 \end{aligned}$$

2.2 Trigonometrische Funktionen

In diesem Abschnitt wird der Funktionsaspekt der trigonometrischen Funktionen genauer analysiert. Insbesondere ist die Frage zu beantworten, ob die Funktionen auch für andere Winkel als zwischen 0° und 90° sinnvoll sind. Dabei hilft eine andere Betrachtungsweise: die Winkelfunktionen im Einheitskreis.

Der Einheitskreis ist ein Kreis mit dem Radius 1.

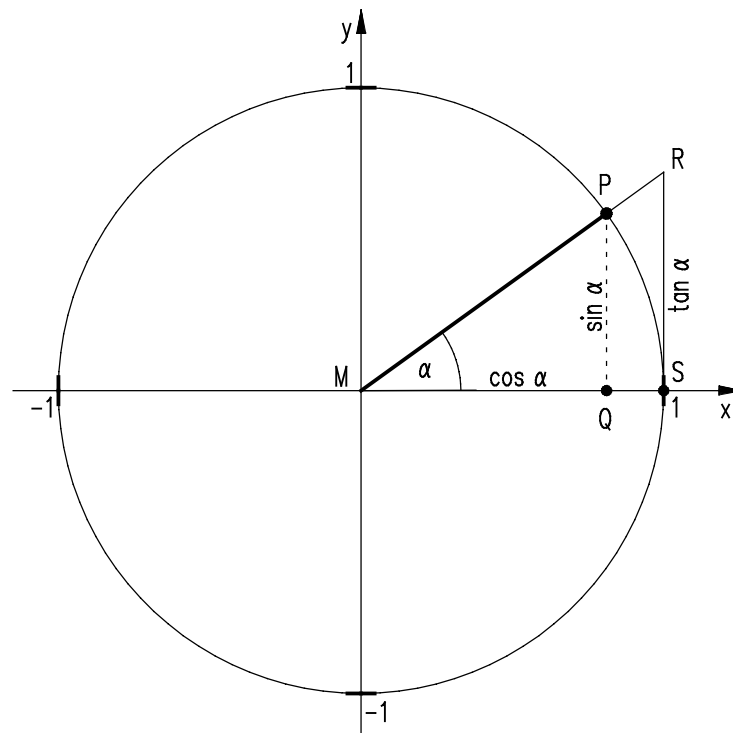


Abbildung 99 Einheitskreis

Der Winkel α ist dann eindeutig durch einen Punkt P auf dem Kreisrand festgelegt.

Das Dreieck PMQ ist dann ein rechtwinkliges Dreieck. Im rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus definiert als Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse. Da die Hypotenuse aber den Wert 1 hat, kann man $\sin \alpha$ direkt an der Gegenkathete ablesen.

Bezogen auf die Koordinaten des Punktes P ist die Gegenkathete gleich der y-Koordinate von P, oder $\sin \alpha$ ist gleich der y-Koordinate des Punktes P.

Mit der gleichen Begründung gilt:

$\cos \alpha$ ist die x-Koordinate des Punktes P.

Um den Tangens direkt ablesen zu können, muss die Ankathete die Länge 1 haben. Dazu zeichnet man ein neues Dreieck RMS. Damit gilt:

$\tan \alpha$ ist die y-Koordinate des Punktes R.

Im Folgenden wird nicht mehr das rechtwinklige Dreieck betrachtet, sondern der Einheitskreis wird als rotierende Scheibe aufgefasst und die Bewegungen der Punkte P, Q und R verfolgt.

2.2.1 Sinusfunktion

An den Einheitskreis wird nach rechts ein Koordinatensystem angelegt. Die y-Koordinate des Punktes P gibt den $\sin \alpha$ an.

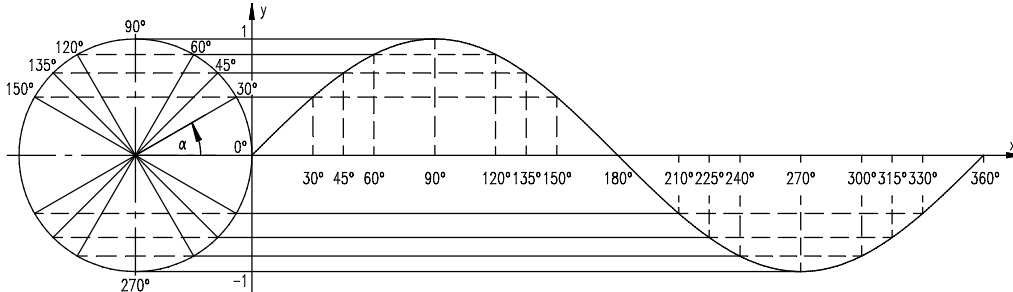


Abbildung 100 Graf der Sinusfunktion

Am Grafen der Sinusfunktion erkennt man folgende Eigenschaften:

- Die Sinusfunktion ist periodisch mit 360° , d.h. $\sin(z \cdot 360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$, $z \in \mathbb{Z}$.
- Sie verläuft zwischen $+1$ und -1 .
- Spezielle Werte sind:
 $\sin(0) = 0$
 $\sin(90^\circ) = 1$
 $\sin(180^\circ) = 0$
 $\sin(270^\circ) = -1$
 $\sin(360^\circ) = 0$

2.2.2 Kosinusfunktion

An den Einheitskreis wird nach unten ein Koordinatensystem angelegt. Die Ankathete, welche den Kosinus angibt, wird dann auf der y-Achse dieses Koordinatensystems abgetragen.

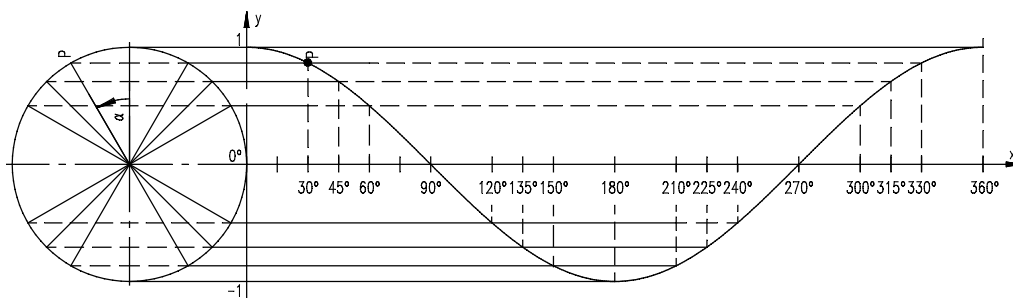


Abbildung 101 Kosinusfunktion

Am Grafen der Kosinusfunktion erkennt man folgende Eigenschaften:

- Die Kosinusfunktion ist periodisch mit 360° , d.h. $\cos(z \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$, $z \in \mathbb{Z}$.
- Sie verläuft zwischen $+1$ und -1 .
- Spezielle Werte sind:
 $\cos(0) = 1$
 $\cos(90^\circ) = 0$
 $\cos(180^\circ) = -1$
 $\cos(270^\circ) = 0$
 $\cos(360^\circ) = 1$

2.2.3 Tangensfunktion

An den Einheitskreis wird nach rechts ein Koordinatensystem angelegt. Die Gegenkathete, welche den Tangens angibt, wird dann auf der y-Achse dieses Koordinatensystems abgetragen.

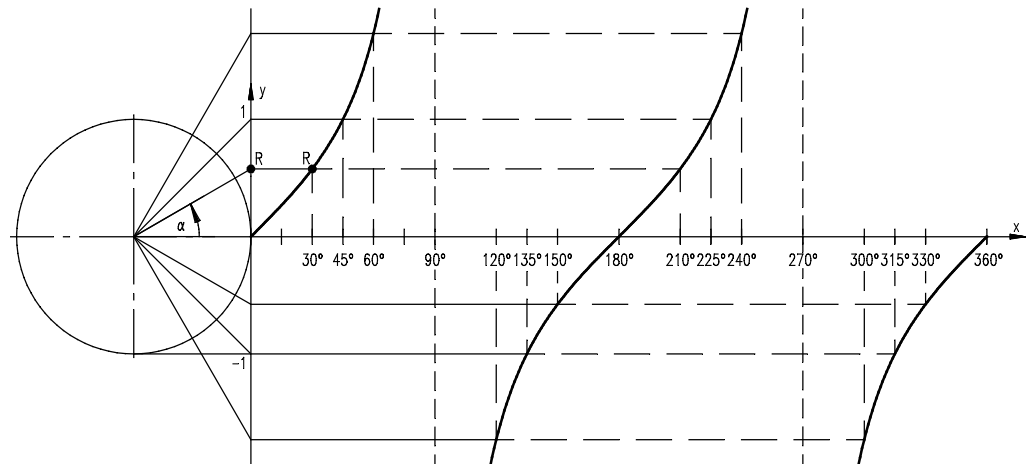


Abbildung 102 Tangensfunktion

Am Grafen der Tangensfunktion erkennt man folgende Eigenschaften:

- Die Tangensfunktion ist periodisch mit 180° , d.h. $\tan(z \cdot 180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$, $z \in \mathbb{Z}$.
- Sie verläuft zwischen $+\infty$ und $-\infty$.
- Spezielle Werte sind:
 $\tan(0) = 0$
 $\tan(45^\circ) = 1$
 $\tan(90^\circ) = \infty$
 $\tan(135^\circ) = -1$
 $\tan(180^\circ) = 0$

2.3 Trigonometrische Berechnungen im allgemeinen Dreieck

2.3.1 Sinus und Kosinus für stumpfe Winkel

Solange Winkel zwischen 0 und 90° liegen, liefern Taschenrechner sowohl den richtigen Sinus-Wert eines Winkels, als auch umgekehrt zu einem Sinus-Wert den richtigen Winkel.

Beispiel: Für 30° liefert der Taschenrechner mit der SIN-Taste den Wert $0,5$. Die Umkehrtaste (meist INV SIN) des Taschenrechners liefert wiederum, wie erwartet, 30° .

Anders verhält es sich, wenn stumpfe und überstumpfe Winkel vorkommen können. Dann ist die Umkehrung, d.h. die Berechnung von Winkeln aus dem Sinus- bzw. Kosinus-Wert nicht mehr eindeutig.

Beispiel: $\sin 120^\circ = 0,8660$. Die Umkehrtaste des Taschenrechners liefert aber 60° .

Das Problem wird klarer, wenn man sich den Sachverhalt am Einheitskreis ansieht.

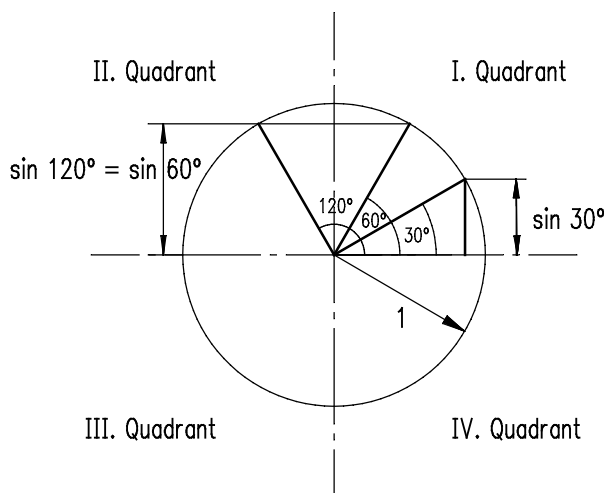


Abbildung 103 $\sin 30^\circ$, $\sin 60^\circ$ und $\sin 120^\circ$ im Einheitskreis

In der Tat haben $\sin 60^\circ$ und $\sin 120^\circ$ denselben Wert.

Wie kommt man nun zurück auf die 120° ? Zunächst einmal muss man wissen, in welchem Quadranten der Winkel liegen soll. 120° liegt im II. Quadranten.

Im II. Quadranten gilt (vgl. Abbildung 103): $\sin \alpha = \sin (180 - \alpha)$. Dieser letzte Winkel liegt dann zwischen 0 und 90° und die Umkehrung ist eindeutig. Mit anderen Worten: liegt der Winkel im II. Quadranten und die Berechnung des Winkels aus dem Sinus-Wert ergibt 60° , so ist der gesuchte Winkel $\varphi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie den Winkel φ im II. Quadranten mit $\sin \varphi = 0,763$!

Lösung

Der Taschenrechner liefert mit 0,763 SIN den Winkel $49,73^\circ$.
Der gesuchte Winkel ist dann $\varphi = 180^\circ - 49,73^\circ = 130,27^\circ$.

Bemerkung: Dies gilt nur für den II. Quadranten. Für die anderen Quadranten gilt

III. Quadrant: $\varphi = \alpha_{\text{TR}} - 180^\circ$

IV. Quadrant: $\varphi = 360^\circ + \alpha_{\text{TR}}$

Lehrbeispiel 2

Berechnen Sie den Winkel φ im IV. Quadranten mit $\sin \varphi = -0,637$!

Lösung

Der Taschenrechner liefert mit $-0,637$ INV SIN den Winkel $-39,57^\circ$.
Der gesuchte Winkel ist dann $\varphi = 360^\circ + (-39,57^\circ) = 320,43^\circ$.

Für die Kosinusfunktion lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen. Allerdings liegt hier die Besonderheit vor, dass die Umkehrung der Kosinusfunktion im Bereich zwischen 0 und 180° eindeutig ist, d.h. in diesem Bereich liefert auch der Taschenrechner die korrekten Werte für die zugehörigen Winkel.

	φ im		
	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant
$\sin \alpha$ gegeben, daraus α_{TR} berechnet	$\varphi = 180^\circ - \alpha_{\text{TR}}$	$\varphi = \alpha_{\text{TR}} - 180^\circ $	$\varphi = 360^\circ + \alpha_{\text{TR}}$
$\cos \alpha$ gegeben, daraus α_{TR} berechnet	$\varphi = \alpha_{\text{TR}}$ Die Kosinusfunktion ist hier noch eindeutig	$\varphi = 360^\circ - \alpha_{\text{TR}}$	$\varphi = 360^\circ - \alpha_{\text{TR}}$

Tabelle 5 Berechnung von Winkeln $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$

Lehrbeispiel 3

Berechnen Sie den Winkel φ im III. Quadranten mit $\cos \varphi = -0,637$!

Lösung

Der Taschenrechner liefert mit $-0,637$ INV COS den Winkel $129,57^\circ$.
Der gesuchte Winkel ist dann $\varphi = 360^\circ - 129,57^\circ = 230,43^\circ$.

2.3.2 Sinussatz

Bisher war es nur möglich, Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken durchzuführen. Hier werden nun spitz- und stumpfwinklige Dreiecke behandelt. Spitzwinklige Dreiecke sind Dreiecke, bei denen alle Winkel kleiner als 90° sind. Bei stumpfwinkligen Dreiecken ist ein Winkel größer als 90° .

Vorgegeben ist ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC mit der Höhe $\overline{CD} = h_c$. Jedes spitzwinklige Dreieck lässt sich durch die Höhen in rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Im gezeichneten Dreieck sind dies die Teildreiecke ADC und CDB.

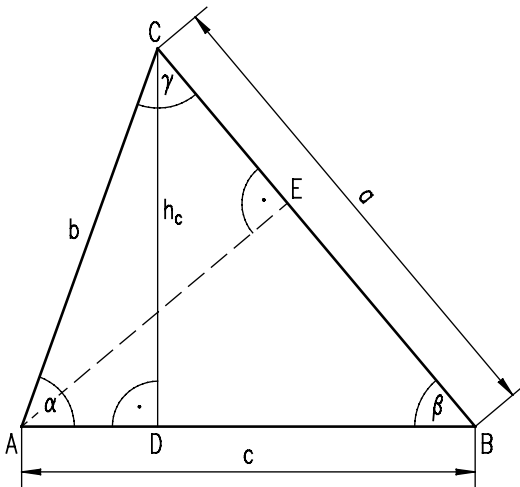


Abbildung 104 Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke

Im rechtwinkligen $\triangle ADC$ gilt:

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \quad | \cdot b$$

$$\Rightarrow \quad (1) \quad h_c = b \cdot \sin \alpha$$

Im rechtwinkligen $\triangle CDB$ gilt:

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a} \quad | \cdot a$$

$$\Rightarrow \quad (2) \quad h_c = a \cdot \sin \beta$$

aus (1) und (2) folgt:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta \quad | \cdot \frac{1}{b \cdot \sin \beta}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad (3) \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Damit ist auch für spitzwinklige Dreiecke ein Zusammenhang zwischen den Seiten und den Winkeln gefunden.

Zeichnet man im Dreieck ABC der Planfigur die Höhe $\overline{AE} = h_a$ ein, so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABE und AEC. Im rechtwinkligen $\triangle ABE$ gilt:

$$\sin \beta = \frac{h_a}{c} \quad | \cdot c$$

$$\Rightarrow \quad (4) \quad h_a = c \cdot \sin \beta$$

Im rechtwinkligen $\triangle AEC$ gilt:

$$\sin \gamma = \frac{h_a}{b} \quad | \cdot b$$

$$\Rightarrow \quad (5) \quad h_a = b \cdot \sin \gamma$$

aus (4) und (5) folgt:

$$c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma \quad | \cdot \frac{1}{c \cdot \sin \gamma}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow \quad (6) \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Um den dritten Teil des Sinussatzes zu erhalten, werden die Gleichungen (3) und (6) nach b aufgelöst.

$$(3') \quad b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$(4') \quad b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} \quad | \cdot \frac{\sin \alpha}{c \cdot \sin \beta}$$

$$(7) \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

Die Gleichungen (3), (6) und (7) kann man auch als Verhältnisgleichungen schreiben:

$$(3) \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow a : b = \sin \alpha : \sin \beta$$

$$(6) \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow b : c = \sin \beta : \sin \gamma$$

$$(7) \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \Rightarrow a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

Diese drei Gleichungen können auch als fortlaufende Proportion geschrieben werden:

$$(8) \ a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Die Gleichungen (3), (6), (7) und (8) kann man in einem Satz formulieren, den man den **Sinussatz** nennt:

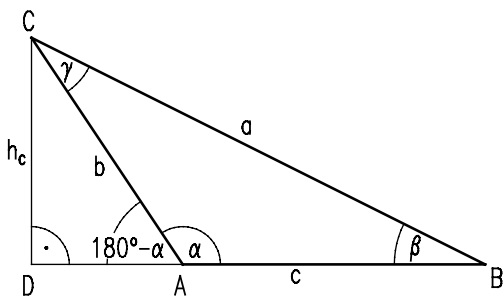
Im spitzwinkligen Dreieck verhalten sich zwei Dreiecksseiten wie die Sinuswerte ihrer gegenüberliegenden Winkel.

Lehrbeispiel 1

Beweisen Sie den Sinussatz auch für stumpfwinklige Dreiecke!

Lösung

Gezeichnet wird ein stumpfwinkliges Dreieck ABC ($\alpha > 90^\circ$) mit der Höhe $\overline{CD} = h_c$. Durch die Verlängerung von [BA] bis zum Schnitt mit h_c erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke ACD und BCD.



Im rechtwinkligen Dreieck BCD gilt:

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a} \quad | \cdot a$$

$$\Rightarrow \quad (1) \quad h_c = a \cdot \sin \beta$$

Im rechtwinkligen Dreieck ACD gilt:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h_c}{b} \quad | \cdot b$$

$$\Rightarrow \quad (2) \quad h_c = b \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \quad | \cdot \frac{1}{b \cdot \sin \beta}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin \beta}$$

Wie bereits bekannt ist, gilt für einen Winkel im 2. Quadranten:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

(4) in (3):
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

In derselben Weise lassen sich mithilfe der Höhen h_a und h_b die Beziehungen

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

herleiten.

⇒ Der Sinussatz gilt auch für **stumpfwinklige** Dreiecke.

Für jedes beliebige Dreieck (auch für rechtwinklige) gilt der **Sinussatz**:

In jedem Dreieck verhalten sich zwei Dreiecksseiten wie die Sinuswerte ihrer **gegenüberliegenden** Winkel.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Berechnungen mithilfe des Sinussatzes

Der Sinussatz sagt etwas aus über das Verhältnis der Seiten zum Sinuswert der gegenüberliegenden Winkel. Ein Dreieck lässt sich mithilfe des Sinussatzes also berechnen, wenn

- zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel
(z.B. a, b und α oder β ;
 b, c und β oder γ ;
 a, c und α oder γ)
- eine Seite und zwei beliebige Winkel gegeben sind.

Immer, wenn zu einer Seite der gegenüberliegende Winkel bekannt ist, führt der Sinussatz zur Lösung. Es spielt keine Rolle, ob außerdem eine Seite oder ob ein Winkel bekannt ist.

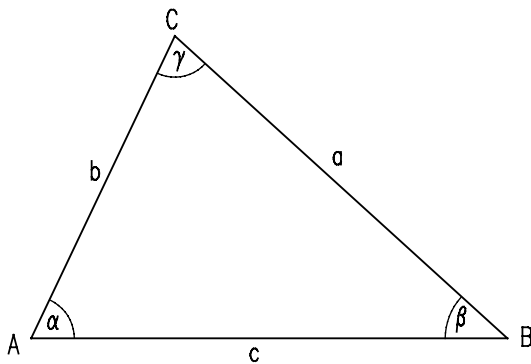
Lehrbeispiel 2

Von einem Dreieck sind zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel durch $a = 49 \text{ mm}$, $b = 32 \text{ mm}$ und $\alpha = 68^\circ 20'$ gegeben.

Berechnen Sie β , γ und c !

Lösung

Planfigur:



Mit dem Sinussatz folgt:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} \quad | \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{32 \text{ mm}}{49 \text{ mm}} \cdot \sin 68^\circ 20'$$

$$\underline{\underline{\beta = 37^\circ 22'}}$$

Da der Sinus eines Winkels im 2. Quadranten ebenfalls positiv ist, gibt es eine zweite Lösung:

$$\beta' = 180^\circ - \beta$$

$$\beta' = 180^\circ - 37^\circ 22' = \underline{\underline{142^\circ 38'}}$$

Man muss nun untersuchen, ob beide Lösungen möglich sind. Addiert man den gegebenen Winkel α und die zweite Lösung β' , so folgt:

$$\alpha + \beta' = 68^\circ 20' + 142^\circ 38' = 210^\circ 58' > 180^\circ$$

Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ist die zweite Lösung β' geometrisch unbrauchbar.

Hinweis:

Bei der Anwendung des Sinussatzes muss stets untersucht werden, ob eine zweite Lösung möglich ist!

Den Winkel γ erhält man mithilfe der Winkelsumme im Dreieck:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 68^\circ 20' - 37^\circ 22' = \underline{\underline{73^\circ 18'}}$$

Für die Berechnung von c gibt es zwei Möglichkeiten:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \quad | \cdot a$$

$$c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$c = \frac{\sin 73^\circ 18'}{\sin 68^\circ 20'} \cdot 49 \text{ mm}$$

$$\underline{\underline{c = 50,5 \text{ mm}}}$$

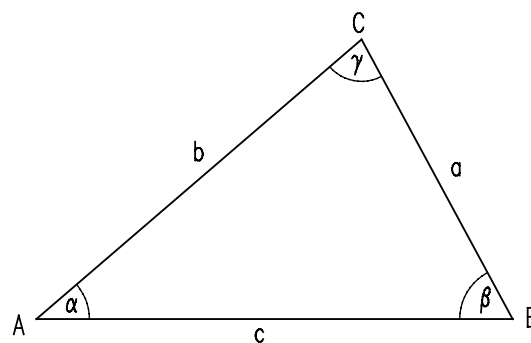
Lehrbeispiel 3

In einem Dreieck ABC sind die drei Größen $a = 140 \text{ mm}$, $c = 185 \text{ mm}$, $\alpha = 40,7^\circ$ bekannt.

Berechnen Sie die Winkel β und γ und die Seite b !

Lösung

Planfigur:



Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} \quad | \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \gamma = \frac{185 \text{ mm}}{140 \text{ mm}} \cdot \sin 40,7^\circ$$

$$\sin \gamma = 0,8617015$$

Da die Sinuswerte für Winkel aus dem ersten Quadranten und aus dem zweiten Quadranten positiv sind, gibt es zwei Lösungen:

$$\underline{\underline{\gamma_1 = 59,51^\circ}}$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - 59,51^\circ = \underline{\underline{120,49^\circ}}$$

Beide Lösungen sind bei dieser Aufgabe brauchbar, da sowohl $\alpha + \gamma_1 < 180^\circ$ als auch $\alpha + \gamma_2 < 180^\circ$ ist.

Selbstverständlich gibt es jetzt auch für β und b jeweils zwei Lösungen:

$$\Rightarrow \beta_1 = 180^\circ - \alpha - \gamma_1$$

$$\beta_1 = 180^\circ - 40,7^\circ - 59,51^\circ = \underline{\underline{79,79^\circ}}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = 180^\circ - \alpha - \gamma_2$$

$$\beta_2 = 180^\circ - 40,7^\circ - 120,49^\circ = \underline{\underline{18,81^\circ}}$$

Die Seite b wird mithilfe des Sinussatzes berechnet:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$b_1 = \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$b_1 = \frac{\sin 79,79^\circ}{\sin 40,7^\circ} \cdot 140 \text{ mm} = \underline{\underline{211 \text{ mm}}}$$

$$b_2 = \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$b_2 = \frac{\sin 18,81^\circ}{\sin 40,7^\circ} \cdot 140 \text{ mm} = \underline{\underline{69 \text{ mm}}}$$

Aus den beiden letzten Lehrbeispielen lässt sich erkennen, in welchen Fällen die Lösung eindeutig und wann sie doppeldeutig ist. Sind von einem Dreieck zwei Seiten und der Gegenwinkel der **größeren** Seite gegeben, so ist die Lösung eindeutig. Die Lösung ist doppeldeutig, wenn der gegebene Winkel der **kleineren** Seite gegenüberliegt.

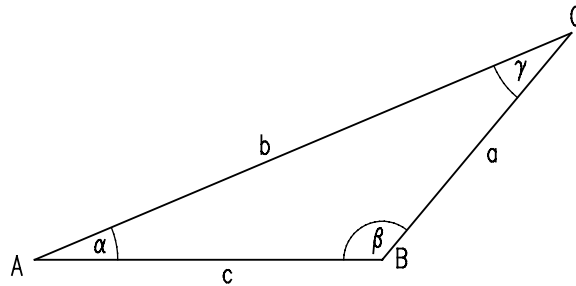
Lehrbeispiel 4

Von einem Dreieck ABC sind eine Seite und zwei Winkel $c = 80 \text{ mm}$, $\beta = 104^\circ$ und $\gamma = 36,4^\circ$ bekannt.

Bestimmen Sie α , a und b !

Lösung

Planfigur:



$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$

$$\alpha = 180^\circ - 104^\circ - 36,4^\circ = \underline{\underline{39,6^\circ}}$$

Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad | \cdot c$$

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot c$$

$$a = \frac{\sin 39,6^\circ}{\sin 36,4^\circ} \cdot 80 \text{ mm}$$

$$a = \underline{\underline{85,9 \text{ mm}}}$$

Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad | \cdot c$$

$$b = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot c$$

$$b = \frac{\sin 104^\circ}{\sin 36,4^\circ} \cdot 80 \text{ mm}$$

$$b = \underline{\underline{131 \text{ mm}}}$$

In diesem Abschnitt wurde der Sinussatz und als Anwendung die Berechnung von Dreiecken erarbeitet. Allerdings lässt sich der Sinussatz nur dann anwenden, wenn zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel oder eine Seite und zwei Winkel bekannt sind. Für den Fall, dass drei Seiten oder zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bei einem Dreieck gegeben sind, muss ein neues Gesetz gefunden werden.

2.3.3 Kosinussatz

Gegeben ist ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC mit der Höhe $\overline{CD} = h_c$. Bezeichnet wird die Strecke \overline{AD} mit x , dann ist $\overline{DB} = c - x$. Die Höhe $\overline{CD} = h_c$ teilt das spitzwinklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke ADC und BCD.

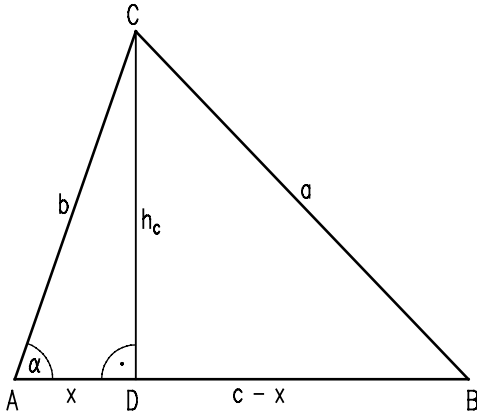


Abbildung 105 Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke

Im rechtwinkligen $\triangle ADC$ gilt:

$$\cos \alpha = \frac{x}{b} \quad | \cdot b$$

$$(1) \quad x = b \cdot \cos \alpha$$

Im rechtwinkligen $\triangle BCD$ gilt nach Pythagoras:

$$(2) \quad a^2 = h_c^2 + (c - x)^2$$

Im rechtwinkligen $\triangle ADC$ gilt nach Pythagoras:

$$(3) \quad b^2 = h_c^2 + x^2$$

(2) - (3):

$$a^2 - b^2 = h_c^2 + (c - x)^2 - h_c^2 - x^2$$

$$a^2 - b^2 = h_c^2 + c^2 - 2cx + x^2 - h_c^2 - x^2$$

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cx$$

$$(4) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

(1) in (4):

$$(5) \quad \underline{\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}}$$

Ebenso lassen sich mithilfe der Höhen h_a und h_b folgende Beziehungen ableiten:

$$(6) \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos \beta$$

$$(7) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Die drei Gleichungen (5), (6) und (7) heißen **Kosinussatz**. In Worten lautet dieser Satz:

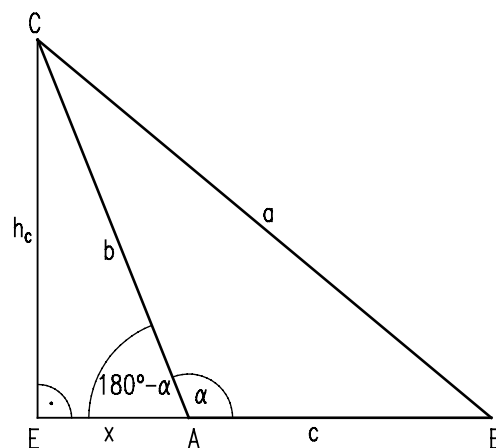
Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt dieser beiden Seiten und des Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Lehrbeispiel 1

Beweisen Sie den Kosinussatz für stumpfwinklige Dreiecke!

Lösung

Planfigur:



Im rechtwinkligen $\triangle ACE$ gilt:

$$(1) \quad \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{b}$$

Daraus folgt:

$$x = b \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

Für den Kosinus eines stumpfen Winkels gilt:

$$(2) \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

(2) in (1):

$$(3) \quad x = -b \cdot \cos \alpha$$

Im rechtwinkligen $\triangle ACE$ gilt nach Pythagoras:

$$(4) \quad h_c^2 = b^2 - x^2$$

und im rechtwinkligen $\triangle EBC$ gilt:

$$(5) \quad h_c^2 = a^2 - (c + x)^2$$

(3) in (4) und (5):

$$(4') \quad h_c^2 = b^2 - (-b \cdot \cos \alpha)^2 \quad \text{und}$$

$$(5') \quad h_c^2 = a^2 - (c - b \cdot \cos \alpha)^2$$

$$\Rightarrow \quad h_c^2 = a^2 - (c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha)$$

$$(5'') \quad h_c^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha - b^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$(5'') = (4'): \quad a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha - b^2 \cdot \cos^2 \alpha = b^2 - b^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}}$$

In derselben Weise kann man mithilfe der Höhen h_a und h_b in einem schiefwinkligen Dreieck zeigen:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Zu beachten ist, dass der Kosinus eines stumpfen Winkels negativ ist.

Berechnungen mithilfe des Kosinussatzes

Der Kosinussatz sagt etwas aus über die Beziehungen der drei Seiten eines Dreiecks und eines Winkels. Ein Dreieck lässt sich also mithilfe des Kosinussatzes dann berechnen, wenn

- drei Seiten oder
- zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel

bekannt sind.

Lehrbeispiel 2

Von einem Dreieck ABC sind drei Seiten bekannt.
 $a = 26 \text{ mm}$; $b = 28 \text{ mm}$; $c = 30 \text{ mm}$

Berechnen Sie α , β und γ !

Lösung

$$\text{Es ist } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad | \cdot 2bc \cdot \cos \alpha - a^2$$

$$\Rightarrow 2bc \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad | \cdot \frac{1}{2bc}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

mit den gegebenen Werten:

$$\cos \alpha = \frac{(28^2 + 30^2 - 26^2) \text{ mm}^2}{2 \cdot 28 \cdot 30 \text{ mm}^2}$$

$$\alpha = \underline{\underline{53,13^\circ}}$$

Hinweis

Nun sind von diesem Dreieck drei Seiten und ein Winkel bekannt. Es können die weiteren Winkel jetzt auch mithilfe des Sinussatzes bestimmt werden. Dieser Weg ist in der Regel der einfachere. Hier wird jedoch zur Übung mit dem Kosinussatz weitergerechnet.

Um mithilfe des Kosinussatzes den Winkel β zu bestimmen, braucht man die Form

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \quad | +2ac \cdot \cos \beta - b^2$$

$$\Rightarrow 2ac \cdot \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2 \quad | \cdot \frac{1}{2ac}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

mit den gegebenen Werten:

$$\cos \beta = \frac{(26^2 + 30^2 - 28^2) \text{ mm}^2}{2 \cdot 26 \cdot 30 \text{ mm}^2}$$

$$\beta = \underline{\underline{59,49^\circ}}$$

Hinweis

Die Zwischenergebnisse des Taschenrechners werden i. Allg. nicht mehr aufgeschrieben. Man berechnet den Wert des Terms $\frac{26^2 + 30^2 - 28^2}{2 \cdot 26 \cdot 30}$ und tippt dann sofort „INV“ „cos“ (bzw. „arc“ „cos“)!

Für den Winkel γ gilt:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 53,13^\circ - 59,49^\circ = \underline{\underline{67,38^\circ}}$$

Lehrbeispiel 3

Von einem Dreieck ABC sind die Seiten bekannt: $a = 120 \text{ mm}$; $b = 80 \text{ mm}$; $c = 60 \text{ mm}$

Berechnen Sie α , β und γ !

Lösung

Nach dem Kosinussatz gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{(80^2 + 60^2 - 120^2) \text{ mm}^2}{2 \cdot 80 \cdot 60 \text{ mm}^2}$$

$$\alpha = \underline{\underline{117,28^\circ}}$$

Zur Berechnung des Winkels β verwendet man den Kosinussatz für die gegenüberliegende Seite b:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{(120^2 + 60^2 - 80^2) \text{ mm}^2}{2 \cdot 120 \cdot 60 \text{ mm}^2}$$

$$\beta = \underline{\underline{36,34^\circ}}$$

Für den Winkel γ gilt:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 117,28^\circ - 36,34^\circ = \underline{\underline{26,38^\circ}}$$

Schon vor Beginn der Zahlenrechnung kann man kontrollieren, ob ein Winkel größer als 90° ist.

Für $\alpha > 90^\circ$ ist $\cos \alpha$ negativ.

Der Bruch $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ wird nur dann negativ, wenn $b^2 + c^2 - a^2 < 0$.

$$\Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Entsprechendes gilt, wenn $\beta > 90^\circ$ oder $\gamma > 90^\circ$.

Allgemein:

Ist das Quadrat einer Dreiecksseite größer als die Summe aus den Quadraten der beiden anderen Seiten, so ist das Dreieck stumpfwinklig.

Lehrbeispiel 4

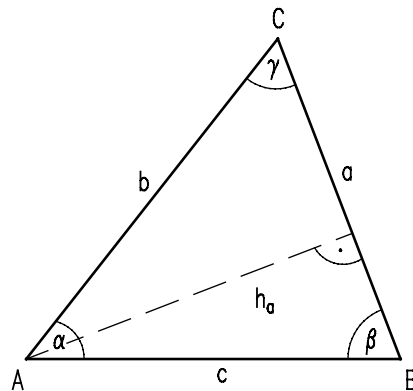
Von einem Dreieck ABC sind die beiden Seiten $a = 115 \text{ mm}$ und $b = 174 \text{ mm}$ sowie der eingeschlossene Winkel $\gamma = 50^\circ$ gegeben.

Berechnen Sie die Seite c und die Winkel α und β ! Welche Fläche hat das Dreieck?

Lösung

Geg.: $a = 115 \text{ mm}$; $b = 174 \text{ mm}$; $\gamma = 50^\circ$

Ges.: c ; α ; β ; A



Da 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, gilt nach dem Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$c^2 = 115^2 \text{ mm}^2 + 174^2 \text{ mm}^2 - 2 \cdot 115 \text{ mm} \cdot 174 \text{ mm} \cdot \cos 50^\circ$$

$$\underline{\underline{c = 133,3 \text{ mm}}}$$

Für den Winkel α gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

mit den gegebenen Werten:

$$\cos \alpha = \frac{(174^2 + 133,3^2 - 115^2) \text{ mm}^2}{2 \cdot 174 \cdot 133,3 \text{ mm}^2}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 41,36^\circ}}$$

Für den Winkel β gilt:

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$\beta = 180^\circ - 41,36^\circ - 50^\circ = \underline{\underline{88,64^\circ}}$$

Zur Berechnung der Fläche wird eine Dreieckshöhe, z.B. h_a benötigt. Im rechtwinkligen $\triangle ADC$ gilt:

$$\sin \gamma = \frac{h_a}{b}$$

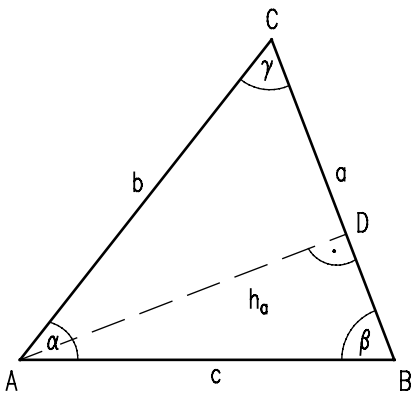
$$\Rightarrow h_a = b \cdot \sin \gamma$$

$$h_a = 174 \text{ mm} \cdot \sin 50^\circ = 133,29 \text{ mm}$$

Für die Dreiecksfläche gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 115 \text{ mm} \cdot 133,29 \text{ mm} = \underline{\underline{76,64 \text{ cm}^2}}$$



Übersicht über die Grundaufgaben

Entsprechend der vier Kongruenzsätze gibt es vier Grundaufgaben für die Berechnung spitz- und stumpfwinkliger Dreiecke.

Gegebene Stücke	Lösung
1. eine Seite, zwei Winkel (WSW)	Sinussatz
2. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel (SWS)	Kosinussatz oder Kosinussatz und Sinussatz
3. zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel (SSW)	Sinussatz (genau eine Lösung, wenn der Winkel der größeren Seite gegenüberliegt); zwei Lösungen (wenn der Winkel der kleineren Seite gegenüberliegt)
4. drei Seiten (SSS)	Kosinussatz oder Kosinussatz und Sinussatz

Tabelle 6 Berechnungen am allgemeinen Dreieck

Die Anwendung des Sinus- und Kosinussatzes in der Praxis

Beispiele aus der Physik

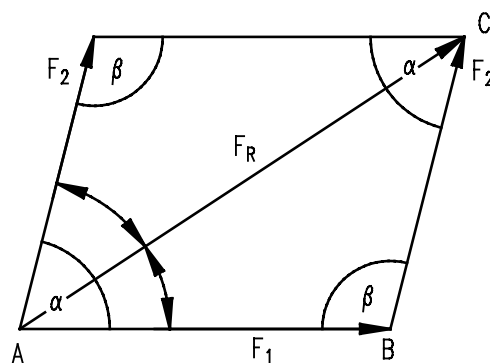
Lehrbeispiel 5

Zwei Kräfte $F_1 = 145 \text{ N}$ und $F_2 = 110 \text{ N}$ haben eine resultierende $F_R = 235 \text{ N}$.

Unter welchem Winkel α wirken F_1 und F_2 zueinander?

Lösung

Planfigur:



Im Dreieck ABC sind die drei Seiten F_1 , F_2 und F_R bekannt, der Winkel β kann demnach nur mit dem Kosinussatz berechnet werden.

Es gilt:

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta$$

$$2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta = F_1^2 + F_2^2 - F_R^2 \quad | \cdot \frac{1}{2 \cdot F_1 \cdot F_2}$$

$$\cos \beta = \frac{F_1^2 + F_2^2 - F_R^2}{2 \cdot F_1 \cdot F_2}$$

$$\cos \beta = \frac{(145^2 + 110^2 - 235^2) \text{ N}}{2 \cdot 145 \cdot 110 \text{ N}}$$

$$\beta = \underline{\underline{133,85^\circ}}$$

Da sich in einem Parallelogramm die Nachbarwinkel zu 180° ergänzen, folgt:

$$\alpha = 180^\circ - \beta$$

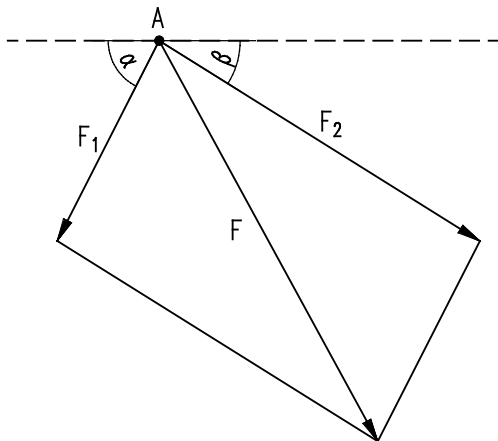
$$\alpha = 180^\circ - 133,85^\circ$$

$$\alpha = \underline{\underline{46,15^\circ}}$$

Lehrbeispiel 6

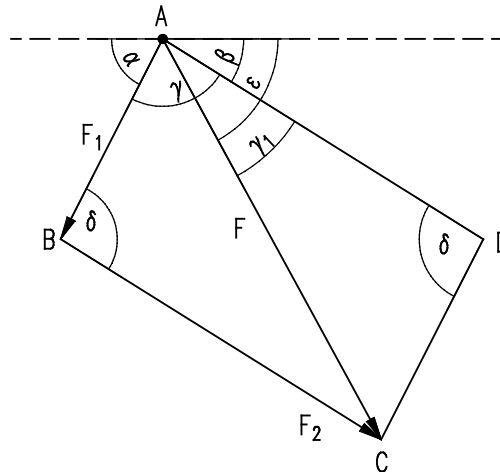
An einem Lager A greifen die Kräfte $F_1 = 15 \text{ kN}$ und $F_2 = 27 \text{ kN}$ mit den Winkeln $\alpha = 63^\circ$ und $\beta = 41,5^\circ$ gegen die Horizontale an. (Siehe Kräfteplan!)

Berechnen Sie Betrag und Richtung der Gesamtkraft F!



Lösung

Zunächst müssen in den Kräfteplan zusätzliche Bezeichnungen für Winkel und Eckpunkte eingetragen werden:



Für den Winkel γ gilt:

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta \\ \gamma &= 180^\circ - 63^\circ - 41,5^\circ \\ \gamma &= \underline{75,5^\circ}\end{aligned}$$

Da das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, gilt:

$$\begin{aligned}\delta &= 180^\circ - \gamma \\ \delta &= 180^\circ - 75,5^\circ \\ \delta &= \underline{104,5^\circ}\end{aligned}$$

Im $\triangle ABC$ gilt nach dem Kosinussatz:

$$\begin{aligned}F^2 &= F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \delta \\ F^2 &= (15^2 + 27^2 - 2 \cdot 15 \cdot 27 \cdot \cos 104,5^\circ) (\text{kN})^2 \\ F &= 34,012 \text{ kN} \\ F &= \underline{34 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Analog zur Richtungsangabe von F_1 und F_2 wird der kleinere Winkel (ϵ) berechnet, den die resultierende Kraft F mit der Horizontalen einschließt.

Im $\triangle ACD$ gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

$$\text{da } \overline{CD} = F_1 \text{ und } \overline{AC} = F$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta} = \frac{F_1}{F} \quad | \cdot \sin \delta$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{F_1}{F} \cdot \sin \delta$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{15 \text{ kN}}{34,012 \text{ kN}} \cdot \sin 104,5^\circ$$

$$\underline{\underline{\gamma_1 = 25,28^\circ}}$$

Da der Sinus eines Winkels im 2. Quadranten ebenfalls positiv ist, gibt es für γ_1 eine 2. Lösung:

$$\gamma_1' = 180^\circ - 25,28^\circ$$

$$\gamma_1' = 154,72^\circ$$

Diese zweite Lösung ist aber geometrisch unbrauchbar, da $\gamma_1' + \delta > 180^\circ$ ist.

$$\Rightarrow \varepsilon = \beta + \gamma_1$$

$$\varepsilon = 41,5^\circ + 25,28^\circ$$

$$\varepsilon = 66,78^\circ$$

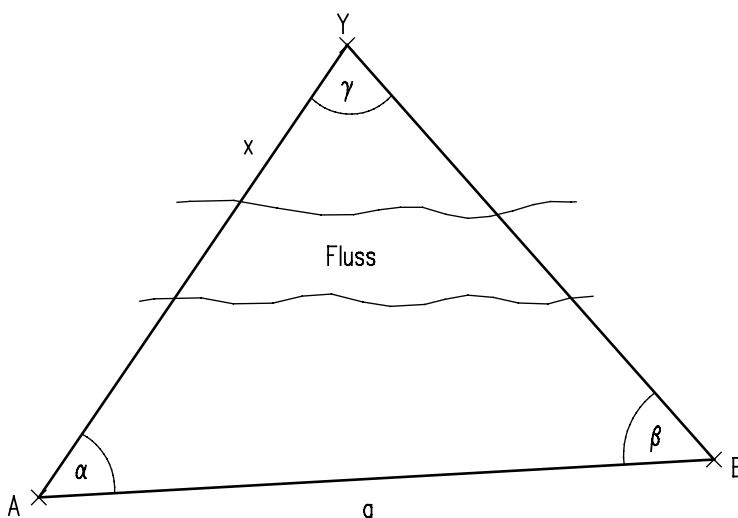
$$\underline{\underline{\varepsilon = 67^\circ}}$$

Beispiele aus der Landvermessung

Lehrbeispiel 7

Es ist die Entfernung eines unzugänglichen Punktes Y vom Standort A zu bestimmen. Dazu wird vom Standort A eine beliebige Strecke a (Standlinie) bis zu einem Punkt B, von dem der Punkt Y ebenfalls sichtbar ist, ausgemessen und die Winkel $BAY = \alpha$ und $YBA = \beta$ bestimmt.

Berechnen Sie die Strecke $\overline{AY} = x$ für $a = 600 \text{ m}$, $\alpha = 54^\circ 10'$ und $\beta = 48^\circ 47'$!



Lösung

Im Dreieck ABY sind eine Seite und zwei Winkel bekannt. Mithilfe des Sinussatzes kann man eine weitere Seite berechnen, dann braucht man jedoch noch den Winkel $\angle AYB = \gamma$:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 54^\circ 10' - 48^\circ 47'$$

$$\underline{\gamma = 77^\circ 3'}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad | \cdot a$$

$$\Rightarrow x = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

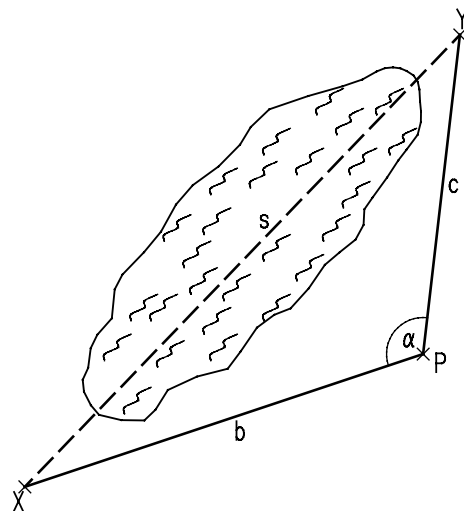
$$x = \frac{600 \text{ m} \cdot \sin 48^\circ 47'}{\sin 77^\circ 3'} = \underline{\underline{463 \text{ m}}}$$

Der Punkt Y ist 463 m vom Standort A entfernt.

Lehrbeispiel 8

Es ist die Entfernung s zweier unzugänglicher Punkte X und Y zu bestimmen, die von einem Punkt P der Messung zugänglich sind. Es werden dabei die Strecken $\overline{PX} = b$ und $\overline{PY} = c$ und der Winkel $\angle YPX = \alpha$ gemessen.

Ermitteln Sie die Strecke $\overline{XY} = s$ für $\overline{XP} = b = 2,50 \text{ km}$, $\overline{YP} = c = 1,40 \text{ km}$ und $\angle YPX = \alpha = 115^\circ$!



Lösung

Nach dem Kosinussatz gilt:

$$s^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$s^2 = 2,5^2 \text{ km}^2 + 1,4^2 \text{ km}^2 - 2 \cdot 2,5 \text{ km} \cdot 1,4 \text{ km} \cdot \cos 115^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{s = 3,34 \text{ km}}}$$

Ergebnis:

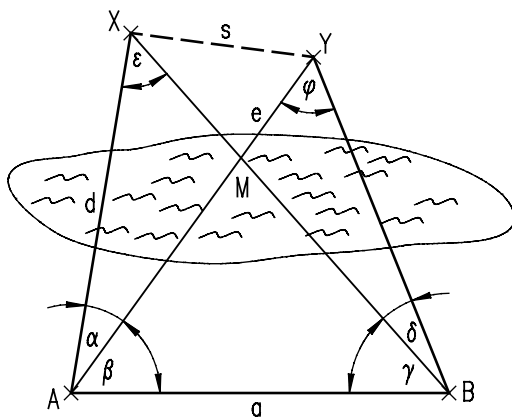
Die Strecke \overline{XY} beträgt 3,34 km.

Lehrbeispiel 9

Ermitteln Sie die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte X und Y (Skizze!)

Dazu muss eine Standlinie $\overline{AB} = a$ ausgemessen werden, von deren Endpunkten A und B die Punkte X und Y sichtbar sind. Ferner werden die vier Winkel α , β , γ , δ durch Messung bestimmt.

Geg.: $\overline{AB} = a = 750 \text{ m}$; $\alpha = 26^\circ 43'$; $\beta = 54^\circ 15'$; $\gamma = 48^\circ 5'$; $\delta = 19^\circ 58'$



Lösung

Um die Strecke $\overline{XY} = s$ berechnen zu können, muss sie die Seite eines Dreiecks sein, bei dem 3 Stücke gegeben sind. Es bieten sich drei solcher Dreiecke an, nämlich $\triangle AYX$, $\triangle BYX$ und $\triangle MYX$. In keinem sind jedoch schon drei Stücke bekannt.

Betrachtet man das $\triangle AYX$, so ist hier der Winkel α gegeben. Die Seite $\overline{AX} = d$ lässt sich aus dem Dreieck $\triangle ABX$ und die Seite $\overline{AY} = e$ aus dem $\triangle ABY$ berechnen.

1. Berechnung von $\overline{AX} = d$:

Im $\triangle ABX$ gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \varepsilon} \quad | \cdot a$$

$$(1) \quad d = \frac{\sin \gamma}{\sin \varepsilon} \cdot a$$

$$(2) \quad \varepsilon = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) \quad (\text{Winkelsumme im } \triangle ABX)$$

$$\varepsilon = 180^\circ - (26^\circ 43' + 54^\circ 15' + 48^\circ 5')$$

$$\varepsilon = 50^\circ 57'$$

$$\begin{aligned} \text{in (1): } d &= \frac{\sin 48^\circ 5'}{\sin 50^\circ 57'} \cdot 750 \text{ m} \\ d &= \underline{718,63 \text{ m}} \end{aligned}$$

2. Berechnung von $\overline{AY} = e$:

Im $\triangle ABY$ gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{e}{a} = \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin \varphi} \quad | \cdot a$$

$$(3) \quad e = \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin \varphi} \cdot a$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \varphi &= 180^\circ - (\beta + \gamma + \delta) \quad (\text{Winkelsumme im } \triangle ABY) \\ \varphi &= 180^\circ - (54^\circ 5' + 48^\circ 5' + 19^\circ 58') \\ \varphi &= \underline{57^\circ 42'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in (3): } e &= \frac{\sin(48^\circ 5' + 19^\circ 58')}{\sin 57^\circ 42'} \cdot 750 \text{ m} \\ e &= \underline{822,98 \text{ m}} \end{aligned}$$

3. Berechnung von $\overline{XY} = s$:

Im $\triangle AYX$ gilt nach dem Kosinussatz:

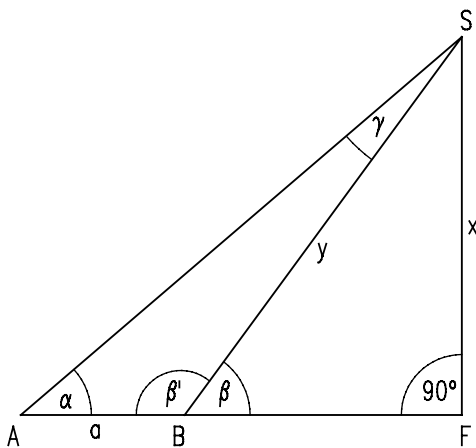
$$\begin{aligned} s^2 &= d^2 + e^2 - 2de \cdot \cos \alpha \\ s &= \sqrt{d^2 + e^2 - 2de \cdot \cos \alpha} \\ s &= \sqrt{718,63^2 + 822,98^2 - 2 \cdot 718,63 \cdot 822,98 \cdot \cos 26^\circ 43'} \\ s &= 370,36 \text{ m} \\ s &= \underline{\underline{370 \text{ m}}} \end{aligned}$$

Die gesuchte Strecke \overline{XY} beträgt 370 m.

Lehrbeispiel 10

Die Höhe $\overline{FS} = x$ eines Turmes soll bestimmt werden. Ein Beobachter sieht vom Punkt A aus, der sich auf derselben Höhe befindet wie der Fußpunkt F des Turmes, die Spitze unter dem Höhenwinkel $3^\circ 47'$. Nähert sich der Beobachter dem Turm auf einer horizontalen Strecke um 140 m, so beträgt der Höhenwinkel zur Spitze $5^\circ 15'$.

Berechnen Sie die Höhe des Turmes!

**Lösung**

Ist die Seite $\overline{BS} = y$ bekannt, so kann in dem rechtwinkligen Dreieck BFS die Seite x berechnet werden. Die Seite y lässt sich aus dem Dreieck ABS berechnen, da in diesem Dreieck die Seite a und die Winkel α und $\beta' = 180^\circ - \beta$ bekannt sind.

1. Berechnung von $\overline{BS} = y$:

Im $\triangle ABS$ gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{y}{a} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad | \cdot a$$

$$(1) \quad y = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot a$$

$$\beta' = 180^\circ - \beta$$

$$\beta' = 180^\circ - 5^\circ 15'$$

$$\underline{\beta' = 174^\circ 45'}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta')$$

$$\gamma = 180^\circ - (3^\circ 47' + 174^\circ 45')$$

$$\underline{\gamma = 1^\circ 28'}$$

$$\text{in (1): } y = \frac{\sin 3^\circ 47'}{\sin 1^\circ 28'} \cdot 140 \text{ m}$$

$$\underline{y = 360,91 \text{ m}}$$

2. Berechnung von $\overline{FS} = x$:

Im rechtwinkligen $\triangle BFS$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \frac{x}{y} \\ \Rightarrow x &= y \cdot \sin\beta \\ x &= 360,91 \text{ m} \cdot \sin 5^\circ 15' \\ x &= \underline{\underline{33 \text{ m}}}\end{aligned}$$

Antwort: Der Turm ist 33 m hoch.

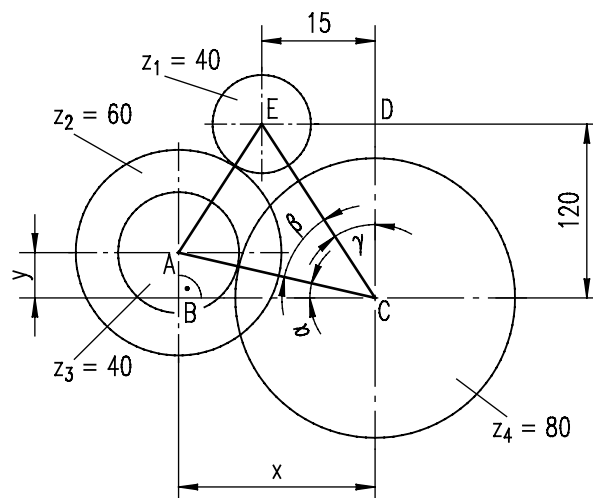
Beispiele aus der Technik

Lehrbeispiel 11

Für einen doppelten Zahnradtrieb sind im Gehäuse drei Bohrungen auf einem Lehnbohrwerk zu bohren (siehe Skizze!).

Geg.: $z_1 = 40$; $z_2 = 60$; $z_3 = 40$; $z_4 = 80$; $m = 2,5 \text{ mm}$

Ermitteln Sie die Koordinaten x und y !



Lösung

Aus den Zähnezahlen z und dem Modul m lassen sich die Teilkreisdurchmesser d_0 berechnen.

Es gilt: $d_0 = m \cdot z$

Somit: $d_{01} = 100 \text{ mm}$; $d_{02} = 150 \text{ mm}$; $d_{03} = 100 \text{ mm}$; $d_{04} = 200 \text{ mm}$

Da die Zahnräder sich berühren, errechnet sich der jeweilige Mittelpunktsabstand:

$$\overline{AE} = \frac{d_{01} + d_{02}}{2} = \frac{100 \text{ mm} + 150 \text{ mm}}{2} = 125 \text{ mm}$$

$$\overline{AC} = \frac{d_{03} + d_{04}}{2} = \frac{100 \text{ mm} + 200 \text{ mm}}{2} = 150 \text{ mm}$$

Damit sind vom Dreieck ACE zwei Seiten bekannt. Die dritte Seite \overline{CE} kann mithilfe des Satzes von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck CDE berechnet werden.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \overline{CE} &= \sqrt{\overline{ED}^2 + \overline{CD}^2} \\ \overline{CE} &= \sqrt{15^2 \text{ mm}^2 + 120^2 \text{ mm}^2} = 120,93 \text{ mm} \end{aligned}$$

Die beiden gesuchten Koordinaten x und y sind zwei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC, wobei \overline{AC} bekannt ist. Zur Berechnung von x und y fehlt noch der Winkel $\angle ACB = \alpha$.

Für α gilt:

$$(1) \quad \alpha = 90^\circ - \beta - \gamma$$

Der Winkel β kann aus dem Dreieck ACE mittels des Kosinussatzes errechnet werden:

$$\begin{aligned} \overline{AE}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CE} \cdot \cos \beta \\ \cos \beta &= \frac{\overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 - \overline{AE}^2}{2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CE}} \\ \cos \beta &= \frac{(150^2 + 120,93^2 - 125^2) \text{ mm}}{2 \cdot 150 \cdot 120,93 \text{ mm}} \\ \Rightarrow \quad \beta &= \underline{\underline{53,6580^\circ}} \end{aligned}$$

Der Winkel γ kann aus dem rechtwinkligen Dreieck CDE errechnet werden:

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} \\ \tan \gamma &= \frac{15 \text{ mm}}{120 \text{ mm}} \\ \gamma &= \underline{\underline{7,1250^\circ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in (1)} \quad \alpha &= 90^\circ - 53,6580^\circ - 7,1250^\circ \\ \alpha &= \underline{\underline{29,2170^\circ}} \end{aligned}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt nun:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{\overline{AC}} \\ \Rightarrow \quad y &= \overline{AC} \cdot \sin \alpha \\ y &= 150 \text{ mm} \cdot \sin 29,2170^\circ \\ y &= \underline{\underline{73 \text{ mm}}} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{AC}$$

$$\Rightarrow x = \overline{AC} \cdot \cos \alpha$$

$$x = 150 \text{ mm} \cdot \cos 29,2170^\circ$$

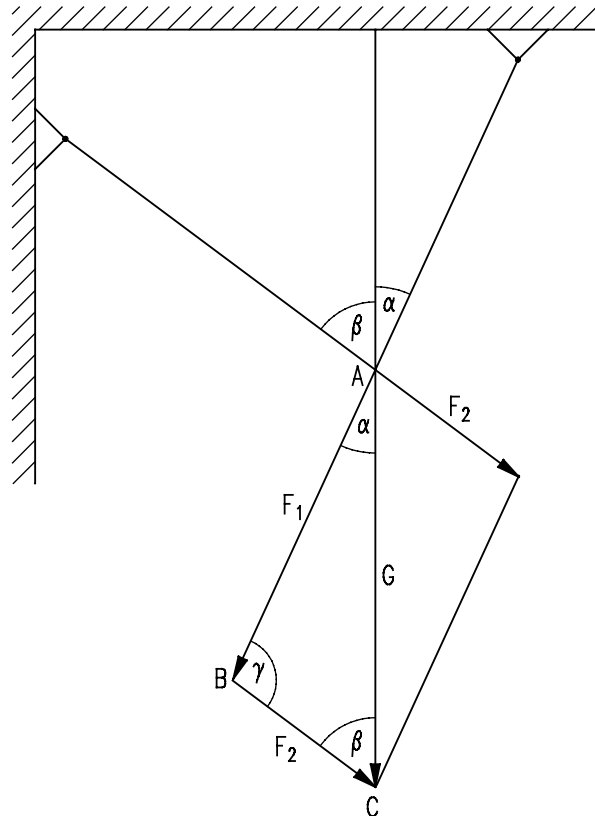
$$\underline{x = 131 \text{ mm}}$$

Es ist $x = 131 \text{ mm}$ und $y = 73 \text{ mm}$.

Lehrbeispiel 12

Ein Seil ist an zwei Punkten befestigt und wird durch eine Gewichtskraft $G = 1800 \text{ N}$ so belastet, dass die beiden Seilteile zur Senkrechten unter den Winkeln $\alpha = 24,7^\circ$ und $\beta = 53,3^\circ$ stehen.

Berechnen Sie die beiden Zugkräfte F_1 und F_2 in den beiden Seilteilen!



Lösung

Die Gewichtskraft ist die Resultierende der beiden Zugkräfte F_1 und F_2 . Im Kräfte-dreieck ABC sind damit die Seite $\overline{AC} = G$ und die beiden Winkel α und β bekannt. Da zwei Winkel und eine Seite gegeben sind, kann nur mithilfe des Sinussatzes weitergerechnet werden.

Dazu wird noch der Winkel $\gamma = \angle CBA$ gebraucht:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 24,7^\circ - 53,3^\circ$$

$$\gamma = 102^\circ$$

Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{F_1}{G} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$F_1 = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot G$$

$$F_1 = \frac{\sin 53,3^\circ}{\sin 102^\circ} \cdot 1800 \text{ N}$$

$$F_1 = 1475,4 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F_1 = 1,4 \text{ kN}}}$$

$$\frac{F_2}{G} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$F_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot G$$

$$F_2 = \frac{\sin 24,7^\circ}{\sin 102^\circ} \cdot 1800 \text{ N}$$

$$F_2 = 768,96 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F_2 = 769 \text{ kN}}}$$

Die beiden Zugkräfte betragen $F_1 = 1,48 \text{ kN}$ und $F_2 = 769 \text{ N}$.

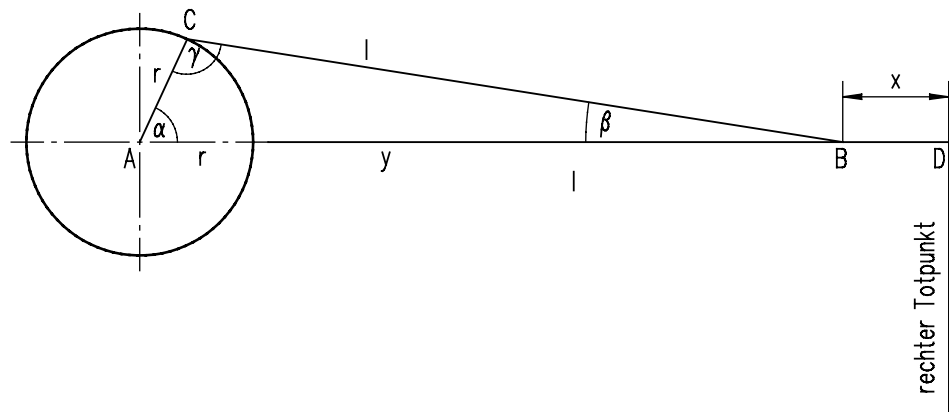
Lehrbeispiel 13

Bei einem Kurbeltrieb beträgt der Kurbelradius $r = 25 \text{ mm}$, die Schubstangenlänge $l = 8 r$ und der Winkel $\alpha = 65^\circ$.

Welchen Abstand x vom rechten Totpunkt hat der Kolben?

Lösung

Im Dreieck ABC sind die beiden Seiten r und l und der Winkel α , der der größeren Seite gegenüberliegt, bekannt. Zur Berechnung wird deshalb der Sinussatz verwendet, mit dessen Hilfe der Winkel β bestimmt werden kann. Mit dem Sinus- oder Kosinussatz kann anschließend die Seite $\overline{AB} = y$ berechnet werden.



$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{r}{l} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{r \cdot \sin \alpha}{l}$$

$$\sin \beta = \frac{r \cdot \sin \alpha}{8 \cdot r}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{8} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{1}{8} \cdot \sin 65^\circ$$

$$\beta = 6,5^\circ$$

Die 2. Lösung $\beta' = 180^\circ - 6,5^\circ = 173,5^\circ$ ist geometrisch unbrauchbar, da $\alpha + \beta' > 180^\circ$ ist.

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 65^\circ - 6,5^\circ$$

$$\gamma = 108,5^\circ$$

Ebenfalls nach dem Sinussatz folgt:

$$\frac{y}{l} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$y = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot l$$

$$y = \frac{\sin 108,5^\circ}{\sin 65^\circ} \cdot 8 \cdot 25 \text{ mm}$$

$$y = 209,3 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow x = l + r - y \quad (\text{im rechten Totpunkt})$$

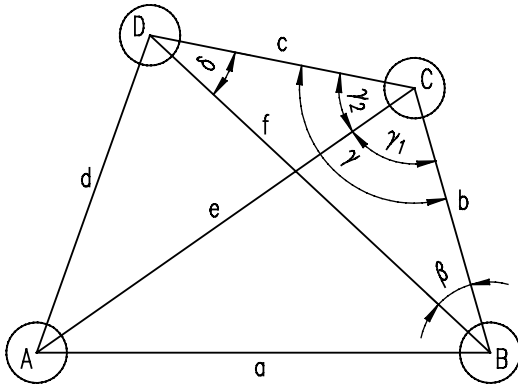
$$x = 200 \text{ mm} + 25 \text{ mm} - 209,3 \text{ mm}$$

$$x = 15,7 \text{ mm}$$

Lehrbeispiel 14

Ein Vorrichtungsteil hat 4 Bohrungen mit den Achsen A, B, C und D.

Berechnen Sie den Achsabstand \overline{CD} und \overline{AD} für $\overline{AB} = a = 124 \text{ mm}$,
 $\overline{BC} = b = 40 \text{ mm}$, $\overline{AC} = e = 140 \text{ mm}$, $\overline{BD} = f = 102 \text{ mm}$ $\angle DCB = \gamma = 112^\circ$!

**Lösung**

Berechnung von $\overline{CD} = c$ im Dreieck BCD. Für dieses Dreieck sind 2 Seiten und der Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt, gegeben.

Zuerst müssen die Winkel δ und β ermittelt werden:

$$\frac{\sin \delta}{\sin \gamma} = \frac{b}{f} \quad | \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \delta = \frac{b \cdot \sin \gamma}{f}$$

$$\sin \delta = \frac{40 \text{ mm} \cdot \sin 112^\circ}{102 \text{ mm}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\delta = 21,322^\circ}$$

Die 2. Lösung $\delta' = 180^\circ - 21,322^\circ = 158,678^\circ$ ist geometrisch unbrauchbar, da $\delta' + \gamma > 180^\circ$.

Dann ist:

$$\beta = 180^\circ - \gamma - \delta$$

$$\beta = 180^\circ - 112^\circ - 21,322^\circ = \underline{46,678^\circ}$$

Nun gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{c}{f} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot f$$

$$c = \frac{102 \text{ mm} \cdot \sin 46,678^\circ}{\sin 112^\circ}$$

$$\underline{\underline{c = 80 \text{ mm}}}$$

Um im Dreieck ACD die Seite $\overline{AD} = d$ berechnen zu können, ist ein weiterer Winkel notwendig. Im Dreieck ABC kann $\angle ACB = \gamma_1$ und daraus $\angle DCA = \gamma_2 = \gamma - \gamma_1$ bestimmt werden.

Im Dreieck ABC gilt nach dem Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + e^2 - 2 \cdot b \cdot e \cdot \cos \gamma_1$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{b^2 + e^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot e}$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{(40^2 + 140^2 - 124^2) \text{ mm}^2}{2 \cdot 40 \cdot 140 \text{ mm}^2}$$

$$\gamma_1 = 58,668^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma_2 = \gamma - \gamma_1$$

$$\gamma_2 = 112^\circ - 58,668^\circ$$

$$\gamma_2 = 53,332^\circ$$

Im Dreieck ACD gilt nun:

$$d^2 = e^2 + c^2 - 2ec \cdot \cos \gamma_2$$

$$d^2 = 140^2 \text{ mm}^2 + 80^2 \text{ mm}^2 - 2 \cdot 140 \text{ mm} \cdot 80 \text{ mm} \cdot \cos 53,332^\circ$$

$$d = 112,35 \text{ mm}$$

$$\underline{\underline{d = 112 \text{ mm}}}$$

2.4 Darstellung trigonometrischer Funktionen mithilfe des Bogenmaßes

Definition des Bogenmaßes

Es gibt verschiedene Maßsysteme für einen Winkel. Von den Ägyptern stammt die Winkereinheit Grad ($^\circ$). Ein Winkel hat den Wert 1° , wenn er den 360sten Teil eines Vollkreises beträgt.

Ein Winkel lässt sich auch in einem rechtwinkligen Dreieck als das Verhältnis zweier Seiten beschreiben.

In der Landvermessung und im Bergbau ist eine Einheit 1 gon. Diese Einheit ist dadurch festgelegt, dass ein rechter Winkel den Wert 100 gon hat.

In der Mathematik ist eine weitere Einheit nützlich, das **Bogenmaß**, oder **Radian** (rad). Diese Einheit bezieht sich auf den Umfang des Einheitskreises. Ein **Einheitskreis** ist ein Kreis mit dem Radius 1.

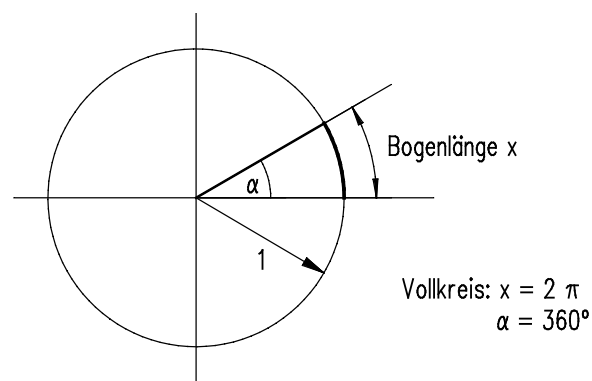


Abbildung 106 Einheitskreis mit Bogenlänge

Der Vollkreis hat damit das Maß 2π (rad), denn das ist der Umfang eines Kreises mit dem Radius 1. Der Winkel, der einem Vollkreis entspricht, hat im Bogenmaß den Wert 2π rad. Winkel, die im Bogenmaß gemessen werden, bezeichnet man mit x , y oder z . Die Einheit rad lässt man meisten weg. Winkel ohne Einheit sind vereinbarungsgemäß im Bogenmaß gemessen.

Winkel im Bogenmaß gibt man meist als Vielfache von π an. Sie entspricht der Länge des Bogens, der am Einheitskreis über diesem Winkel liegt.

So entspricht einem Winkel $x = \pi$ im Bogenmaß ein Winkel $\alpha = 180^\circ$ im Gradmaß.

Grad	Bogenmaß
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
1°	$\pi/180$
α	$\frac{\alpha}{180^\circ} \pi$

Lehrbeispiel 1

Gegeben sind die Winkel $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $\alpha_3 = 16^\circ$.

Bestimmen Sie die entsprechenden Winkel x_1 , x_2 , x_3 im Bogenmaß!

Lösung

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{1}{4} \pi$$

$$x_2 = \frac{\alpha_2}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{30^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{1}{6} \pi$$

$$x_3 = \frac{\alpha_3}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{16^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{4}{45} \pi$$

Umgekehrt lassen sich auch Winkel vom Bogenmaß ins Gradmaß umrechnen.

Bogenmaß	Grad
2π	360°
π	180°
$\pi/4$	45°
1	$180^\circ/\pi$
x	$\frac{x}{\pi} 180^\circ$

Lehrbeispiel 2

Gegeben sind die Winkel $x_1 = \frac{1}{3}\pi$, $x_2 = \frac{1}{10}\pi$, $x_3 = 0,2$.

Berechnen Sie die zugehörigen Winkel im Gradmaß!

Lösung

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{\pi} \cdot 180^\circ = \frac{\frac{1}{3}\pi}{\pi} \cdot 180^\circ = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$$

$$\alpha_2 = \frac{x_2}{\pi} \cdot 180^\circ = \frac{\frac{1}{10}\pi}{\pi} \cdot 180^\circ = \frac{1}{10} \cdot 180^\circ = 18^\circ$$

$$\alpha_3 = \frac{x_3}{\pi} \cdot 180^\circ = \frac{0,2}{\pi} \cdot 180^\circ \approx 11,46^\circ$$

Trigonometrische Funktionen mit Winkeln im Bogenmaß

Die trigonometrischen Funktionen für Winkel im Bogenmaß verlaufen natürlich genauso, wie im Gradmaß, lediglich die Einteilung der Winkel auf der x-Achse hat sich geändert. Da die Winkel auf der x-Achse nun auch durch ein Längenmaß – nämlich das Bogenmaß – dargestellt werden, ergibt sich eine unverzerrte Darstellung der Winkelfunktionskurven, denn auf beiden Achsen werden Längen abgetragen. Auf der x-Achse werden die Einteilungen in Vielfachen von $\pi \approx 3,1416$ aufgetragen.

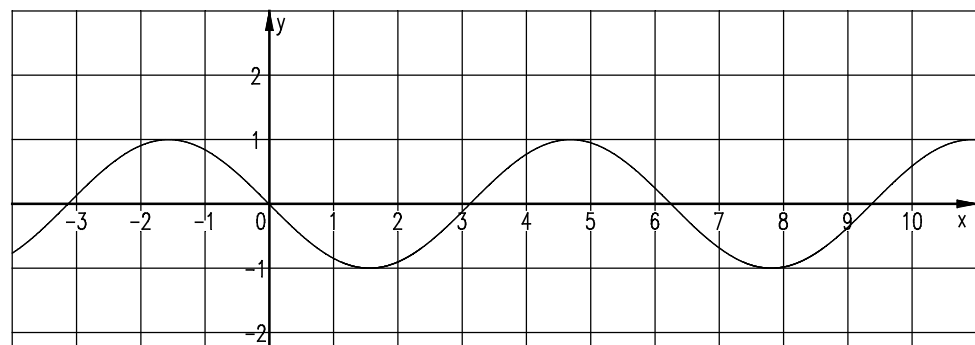


Abbildung 107 Graf der Sinusfunktion

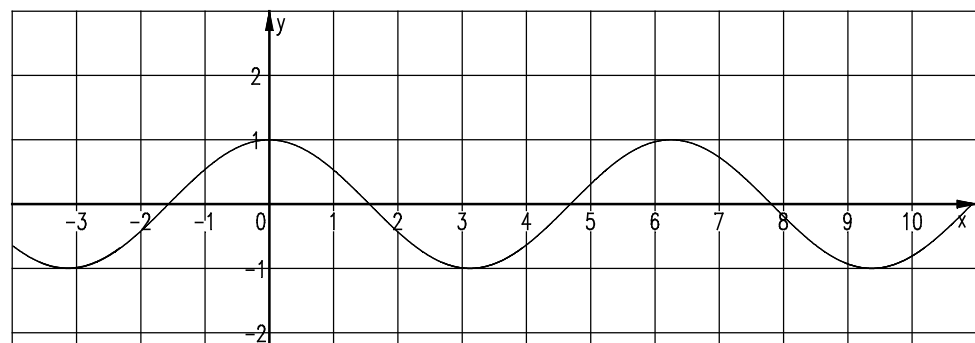


Abbildung 108 Graf der Kosinusfunktion

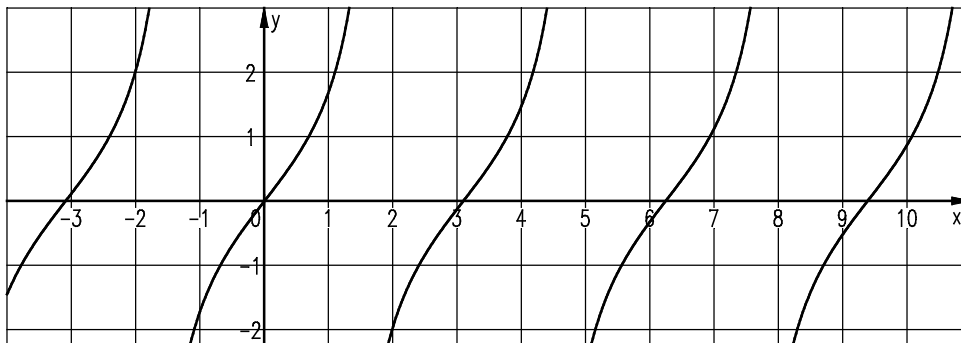


Abbildung 109 Graf der Tangensfunktion

Berechnungen mit dem Taschenrechner

Wird mit Winkeln im Bogenmaß gerechnet, so muss der Taschenrechner zunächst auf diese Maßeinheit umgestellt werden. Das ist bei jedem Taschenrechner anders. Einheitlich ist aber, dass bei richtiger Einstellung in der Statusleiste RAD steht.

Weiterhin ist zu beachten, dass der Taschenrechner nur mit Dezimalzahlen rechnet, also nicht mit Vielfachen von π . Die Winkel müssen also ggf. in Dezimalzahlen umgerechnet werden.

Lehrbeispiel 3

Gegeben sind die Winkel $x_1 = \frac{1}{3}\pi$, $x_2 = \frac{1}{10}\pi$, $x_3 = 0,2$.

Berechnen Sie $\cos x_1$, $\sin x_2$ und $\tan x_3$!

Lösung

$$\cos x_1 = \cos \frac{1}{3}\pi \approx \cos 1,047197551 = 0,5$$

$$\sin x_2 = \sin \frac{1}{10}\pi \approx \sin 0,31415927 \approx 0,309017 \approx 0,309$$

$$\tan x_3 = \tan 0,2 \approx 0,202710 \approx 0,203$$

Lehrbeispiel 4

Gegeben sind $\sin x_1 = 0,345$, $\cos x_2 = 0,987$, $\tan x_3 = 15$.

Berechnen Sie die zugehörigen Winkel im Intervall $[0; \pi/2]$ im Bogenmaß!

Lösung

$$\sin x_1 = 0,345 \Rightarrow x_1 = 0,35224 = 0,11212 \cdot \pi \approx 0,112\pi$$

$$\cos x_2 = 0,987 \Rightarrow x_2 = 0,16142 = 0,05138 \cdot \pi \approx 0,0514\pi$$

$$\tan x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 1,50423 = 0,4788 \cdot \pi \approx 0,479\pi$$

2.5 Additionstheoreme

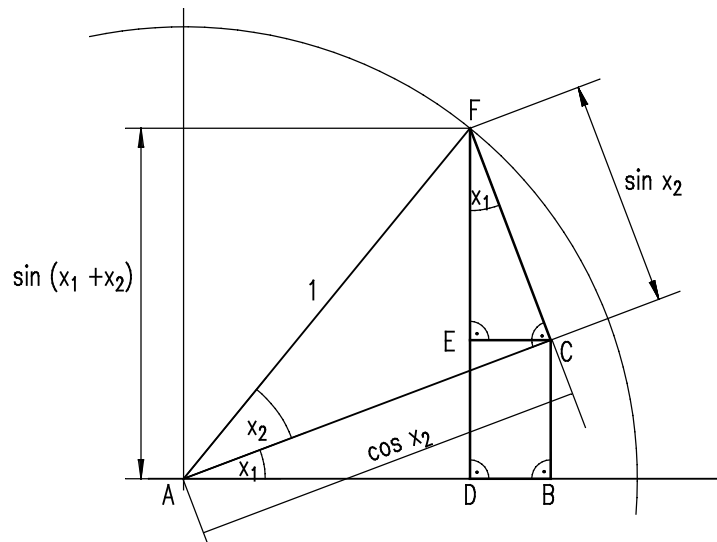
Bei manchen Anwendungen ist es von Vorteil, wenn die Winkelfunktionswerte der Summe zweier Winkel durch Winkelfunktionswerte der Summanden ausgedrückt werden können. Hier werden deshalb die Formeln dazu hergeleitet. Diese Formeln werden **Additionstheoreme** genannt.

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

Das Additionstheorem für die Sinusfunktion wird hier für den Fall, dass $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ und $x_1 + x_2 < \pi/2$ begründet.



Aus dem rechtwinkligen Dreieck FAD folgt mit der Definition des Sinus:

$$\begin{aligned} \sin(x_1 + x_2) &= \overline{DF} & | \quad \overline{DF} &= \overline{DE} + \overline{EF} \\ &= \overline{DE} + \overline{EF} & | \quad \overline{DE} &= \overline{BC} \\ &= \overline{BC} + \overline{EF} & | \quad \text{aus } \triangle ABC \text{ folgt } \sin x_1 &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{BC} = \sin x_1 \cdot \overline{AC} \\ &= \sin x_1 \cdot \overline{AC} + \overline{EF} & | \quad \text{aus } \triangle ACF \text{ folgt } \cos x_2 &= \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC} \\ &= \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \overline{EF} & | \quad \text{da die Schenkel von } \angle BAC \text{ und } \angle EFC \end{aligned}$$

da die Schenkel von $\angle BAC$ und $\angle EFC$ paarweise aufeinander senkrecht stehen, ist $\triangle ABC \cong \triangle FEC$. Damit ist insbesondere $\angle CFE = x_1$. Und damit gilt in $\triangle FEC$:

$$\cos x_1 = \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} \Rightarrow \overline{EF} = \cos x_1 \cdot \overline{FC}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \overline{FC} \quad | \text{ aus } \triangle ACF \text{ folgt } \sin x_2 = \frac{\overline{FC}}{1} = \overline{FC} \\
 &= \underline{\underline{\sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \sin x_2}}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 1

Das Drehmoment M zum gleichförmigen Heben und Senken einer Last bei einer Schraube mit Dreiecksgewinde berechnet sich nach:

$$M = F \cdot r_m \cdot \tan(\alpha + \rho').$$

Für die Reibzahl μ' gilt: $\mu' = \tan \rho'$.

Drücken Sie M durch μ' aus!

Lösung

$$\begin{aligned}
 M &= F \cdot r_m \cdot \tan(\alpha + \rho') \quad | \quad \tan(\alpha + \rho') = \frac{\tan \alpha + \tan \rho'}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \rho'} \\
 &= F \cdot r_m \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \rho'}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \rho'} \quad | \quad \mu' = \tan \rho' \\
 &= F \cdot r_m \cdot \frac{\tan \alpha + \mu'}{1 - \tan \alpha \cdot \mu'}
 \end{aligned}$$

2.6 Trigonometrische Funktionen im Raum

In der Praxis benötigt man öfters den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene oder den Winkel zwischen zwei Ebenen, z.B. den Winkel zwischen einem Spannseil und einer Wand oder den Neigungswinkel eines Daches. In den meisten Fällen wird man gefühlsmäßig den richtigen Winkel wählen. In der Mathematik werden auch diese Winkel definiert.

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Ein Winkel kann nur zwischen zwei Geraden gemessen werden. In einer Ebene E gibt es unendlich viele Geraden, die durch den Schnittpunkt S von g mit E gehen. Welche Gerade wird nun zur Definition des Winkels zwischen g und E gewählt?

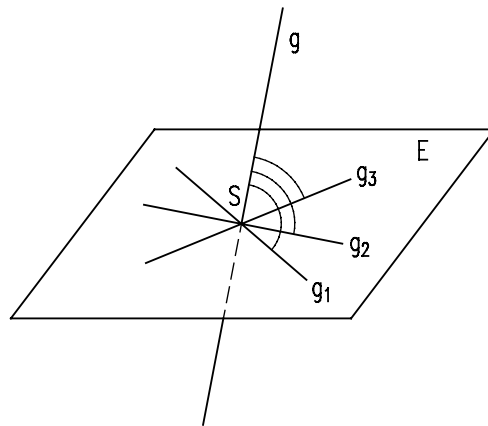


Abbildung 110 Schnitt zwischen Gerade und Ebene

Aus allen diesen Geraden g_1, g_2, g_3, \dots wird die **senkrechte Projektion** g' der Geraden g auf der Ebene E ausgewählt. Diese senkrechte Projektion erhält man, wenn man von irgendeinem Punkt P der Geraden g die Senkrechte auf die Ebene E zeichnet. Diese Senkrechte schneidet die Ebene im Punkt P' . Die Gerade SP' ist die **senkrechte Projektion** g' von g auf E . (Bei senkrechtem Lichteinfall ist g' das **Schattenbild** von g !)

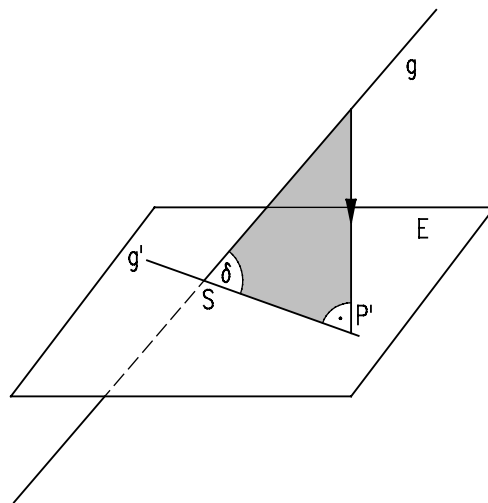


Abbildung 111 Senkrechte Projektion einer Geraden auf eine Ebene

Der Neigungswinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene ist der nicht-stumpfe Winkel zwischen der Geraden und ihrer senkrechten Projektion auf die Ebene.

Die Gerade g steht senkrecht auf E , wenn **alle** Geraden der Ebene durch den Schnittpunkt S senkrecht auf g stehen.

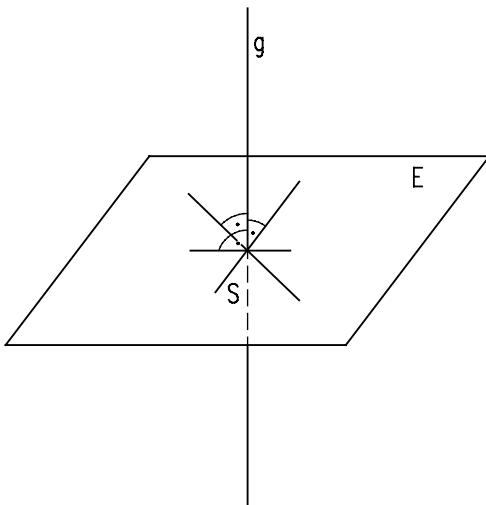


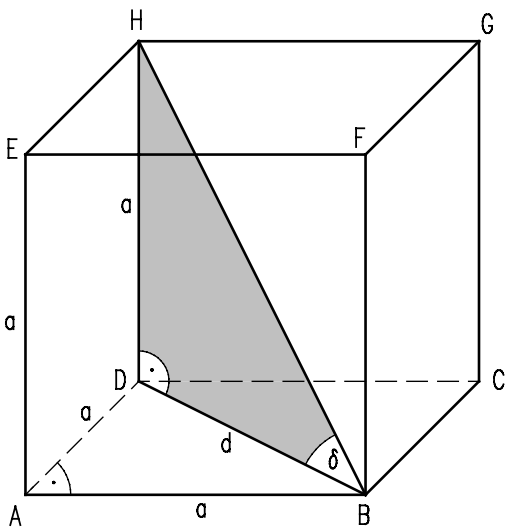
Abbildung 112 Gerade steht senkrecht auf Ebene

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie den Neigungswinkel der Raumdiagonalen eines Quaders gegen die Grundfläche!

Lösung

Planfigur:



Die senkrechte Projektion der Raumdiagonalen BH ist die Flächendiagonale BD.

Im rechtwinkligen $\triangle BHD$ gilt:

$$\tan \delta = \frac{a}{d} \quad \text{Gleichung (1)}$$

Im rechtwinkligen $\triangle DAB$ gilt:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d^2 = 2a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

Gleichung (2)

$$(2) \text{ in } (1): \quad \tan \delta = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2}}$$

$$\tan \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{\underline{\delta = 35,3^\circ}}$$

Lehrbeispiel 2

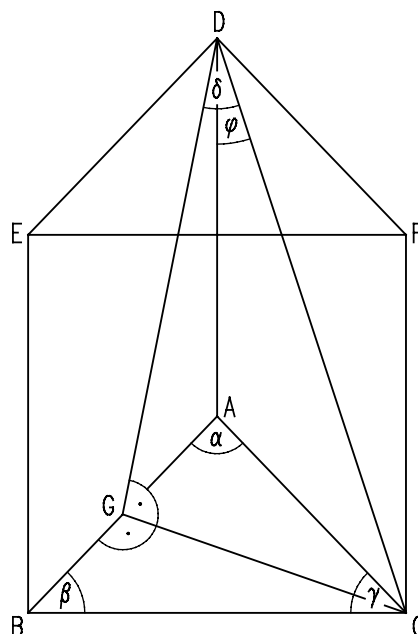
In einem dreiseitigen Prisma ist die Grundfläche ABC ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel \overline{AB} und \overline{AC} jeweils 4,3 cm lang sind und dessen Basiswinkel jeweils 69° betragen. Die Höhe \overline{AD} des Prismas beträgt 4,3 cm.

Berechnen Sie den Winkel zwischen den Flächendiagonalen CD und der Seitenkante AD und den Neigungswinkel zwischen der Flächendiagonale CD und der Seitenfläche ADEB!

Lösung

Zunächst werden in einer Planfigur die gegebenen Größen markiert und die gesuchten Winkel eingezeichnet.

Planfigur:



Geg.: $\overline{AB} = \overline{AC} = 4,3 \text{ cm}$; $\beta = \gamma = 69^\circ$; $\overline{AD} = 4,3 \text{ cm}$

Ges.: φ ; δ

Die Seitenkanten [AD], [BE] und [CF] stehen auf der Ebene ABC senkrecht. Das Dreieck ACD hat somit bei A einen rechten Winkel.

Im rechtwinkligen $\triangle ACD$ gilt:

$$(1) \tan \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

$$\tan \varphi = \frac{4,3 \text{ cm}}{4,3 \text{ cm}}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

$$(2) \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

$$\overline{DC} = \sqrt{4,3^2 + 4,3^2} \text{ cm}$$

$$\overline{DC} = 6,0811 \text{ cm}$$

Zur Berechnung des Winkels δ wird die **senkrechte Projektion** von DC in die Ebene ADEB benötigt. Diese Projektion erhält man, wenn von C das Lot auf die Ebene ADEB gefällt wird. Dieses Lot ist aber eine Höhe des Dreiecks ABC.

Im rechtwinkligen $\triangle AGC$ gilt:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{GC}}{\overline{AC}}$$

$$(3) \overline{GC} = \overline{AC} \cdot \sin \alpha$$

Den Winkel α erhält man aus dem gleichschenkligen $\triangle ABC$:

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$

$$\alpha = 180^\circ - 69^\circ - 69^\circ = \underline{42^\circ}$$

$$\text{in (3): } \overline{GC} = 4,3 \text{ cm} \cdot \sin 42^\circ = \underline{2,8773 \text{ cm}}$$

Da [CG] das Lot von C auf die Ebene ADEB ist, stehen [CG] und [DG] aufeinander senkrecht.

Für das rechtwinklige $\triangle DGC$ gilt:

$$\sin \delta = \frac{\overline{GC}}{\overline{DC}}$$

$$\sin \delta = \frac{2,8773 \text{ cm}}{6,0811 \text{ cm}}$$

$$\underline{\underline{\delta = 28,24^\circ}}$$

Bei der Landvermessung spielen der Höhenwinkel (Elevationswinkel, Erhebungswinkel) und der Tiefenwinkel (Depressionswinkel) eine bedeutende Rolle. Wird im Gelände ein Punkt P (z.B. das Gipfelkreuz eines Berges) anvisiert, der höher liegt als der eigene Standpunkt S, so bezeichnet man den Winkel zwischen dem Peilstrahl und der horizontalen Ebene als Höhenwinkel. Analoges gilt für den Tiefenwinkel.

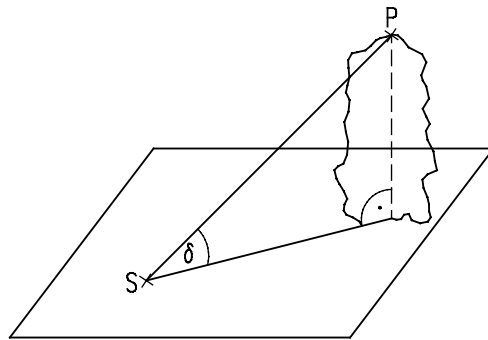


Abbildung 113 δ = Höhenwinkel

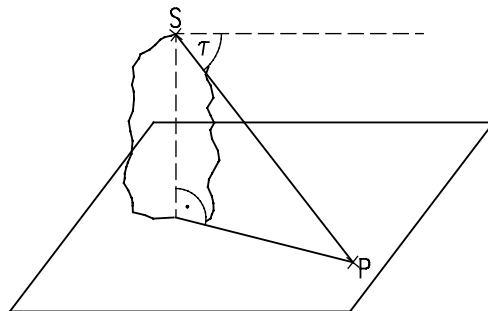


Abbildung 114 τ = Tiefenwinkel

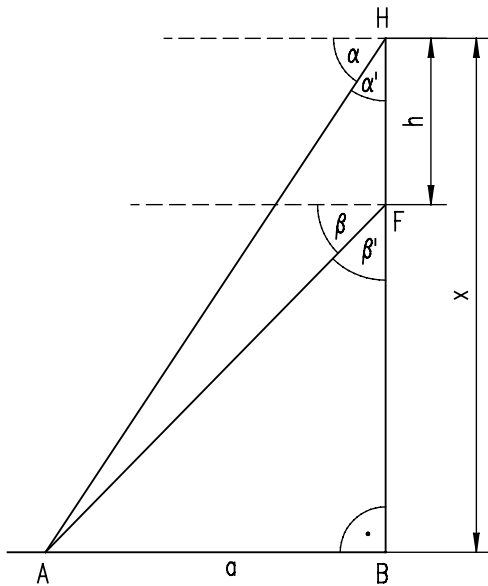
Lehrbeispiel 3

Von der Spitze eines Aussichtsturmes mit der Höhe h auf einem Berg erblickt man einen punktförmigen Gegenstand auf dem Talboden unter dem Tiefenwinkel α . Vom Fuß des Turmes wird derselbe Gegenstand unter dem Tiefenwinkel β gesehen.

Berechnen Sie die absolute Höhendifferenz Turmspitze-Talboden zunächst allgemein, dann für die Werte $h = 60 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ 17'$ und $\beta = 28^\circ 44'$!

Lösung

Planfigur:

Geg.: $h = 60 \text{ m}$; $\alpha = 32^\circ 17'$; $\beta = 28^\circ 44'$ Ges.: x Im rechtwinkligen $\triangle ABH$ gilt:

$$\tan \alpha' = \frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow (1) \quad \underline{a = x \cdot \tan \alpha'}$$

Im rechtwinkligen $\triangle ABF$ gilt:

$$\tan \beta' = \frac{a}{x - h}$$

$$\Rightarrow (2) \quad \underline{a = (x - h) \cdot \tan \beta'}$$

$$\begin{aligned} (1) = (2): \quad & x \cdot \tan \alpha' = (x - h) \cdot \tan \beta' \\ & x \cdot \tan \alpha' = x \cdot \tan \beta' - h \cdot \tan \beta' \\ & h \cdot \tan \beta' = x \cdot \tan \beta' - x \cdot \tan \alpha' \\ & x \cdot (\tan \beta' - \tan \alpha') = h \cdot \tan \beta' \end{aligned}$$

$$(3) \quad \underline{x = \frac{h \cdot \tan \beta'}{\tan \beta' - \tan \alpha'}}$$

Für die Winkel α' und β' gilt:

$$\begin{aligned} (4) \quad & \alpha' = 90^\circ - \alpha \\ & \beta' = 90^\circ - \beta \end{aligned}$$

$$(4) \text{ in } (3): \quad \underline{\underline{x = \frac{h \cdot \tan(90^\circ - \beta)}{\tan(90^\circ - \beta) - \tan(90^\circ - \alpha)}}}$$

Mit den gegebenen Werten folgt:

$$x = \frac{60 \text{ m} \cdot \tan(90^\circ - 28^\circ 44')}{\tan(90^\circ - 28^\circ 44') - \tan(90^\circ - 30^\circ 17')}$$

$$\underline{\underline{x = 981 \text{ m}}}$$

Winkel zwischen zwei Ebenen

Um die Größe des Winkels zwischen zwei Ebenen zu bestimmen, sind wieder zwei Geraden notwendig, die den Winkel einschließen. Man wählt diejenigen Geraden g_1 und g_2 aus E_1 bzw. E_2 , die auf der Schnittgeraden s der beiden Ebenen senkrecht stehen.

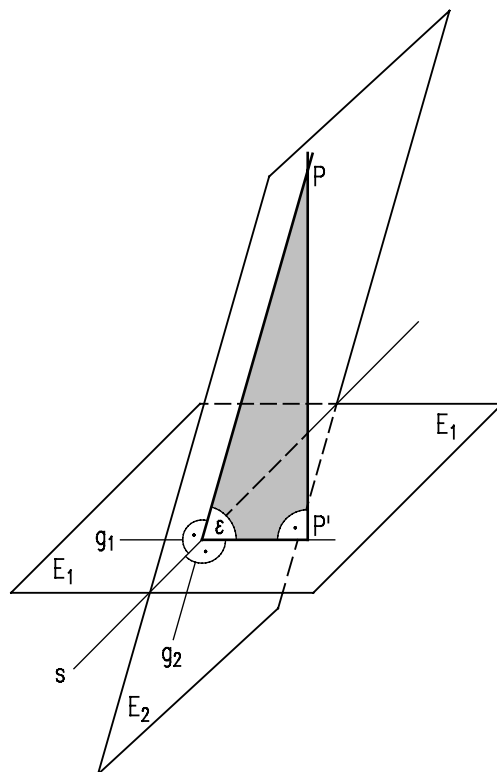


Abbildung 115 Schnitt zweier Ebenen

Der Neigungswinkel zwischen zwei Ebenen ist der nicht-stumpfe Winkel zwischen den Geraden g_1 und g_2 , die in E_1 bzw. E_2 liegen und auf der Schnittgeraden senkrecht stehen.

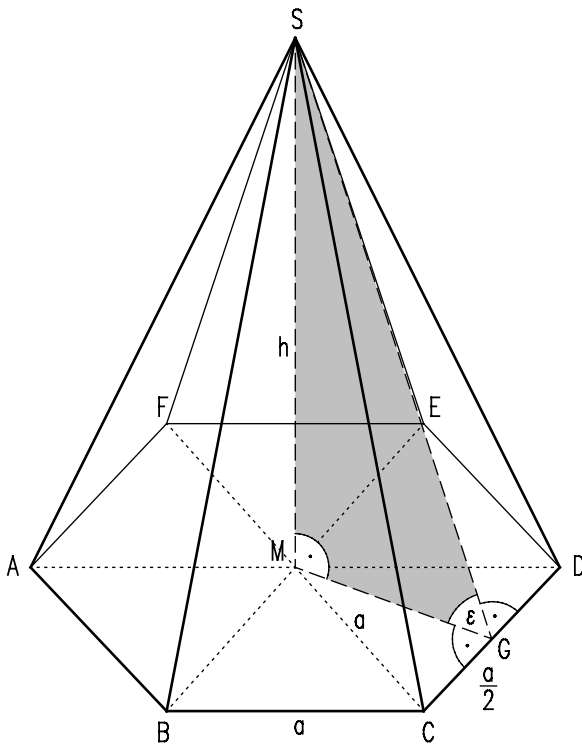
Lehrbeispiel 4

Die Grundfläche einer geraden sechsseitigen Pyramide ist ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seitenlänge 3,5 cm beträgt. Die Höhe der Pyramide misst 7,5 cm.

Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Grundfläche!

Lösung

Planfigur:



Geg.: $a = 3,5 \text{ cm}$; $h = 7,5 \text{ cm}$

Ges.: ε

CD ist eine Schnittgerade zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche. Da $SG \perp CD$ und $MG \perp CD$, ist ε der gesuchte Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche.

Im rechtwinkligen $\triangle GSM$ gilt:

$$(1) \tan \varepsilon = \frac{h}{GM}$$

Die Strecke \overline{GM} ist eine Höhe in dem gleichseitigen $\triangle CDM$. Im rechtwinkligen $\triangle MCG$ gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{GM} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$(\overline{CG} = \frac{a}{2}, \text{ da } \triangle CDS \text{ gleichschenkelig})$$

$$\overline{GM} = \sqrt{\frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}$$

$$\overline{GM} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$(2) \quad \overline{GM} = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$(2) \text{ in } (1): \quad \tan \varepsilon = \frac{h}{\frac{a}{2} \sqrt{3}}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{7,5 \text{ cm}}{\frac{3,5 \text{ cm}}{2} \sqrt{3}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon = 68^\circ}}$$

Aufgabe 1

Zeichnen Sie ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 34^\circ$! Messen Sie die Seiten a , b und c und berechnen Sie auf zwei Stellen genau $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \beta$!

Aufgabe 2

Bestimmen Sie!

2.1 $\cos 28^\circ 54'$

2.2 $\sin 45,73^\circ$

2.3 $\tan 738^\circ$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie α !

3.1 $\cos \alpha = 0,9370$

3.2 $\sin \alpha = 0,4$

3.3 $\tan \alpha = 13,6$

Aufgabe 4

Berechnen Sie α !

4.1 $\cos (3/2 \alpha - 17^\circ) = 0,5$

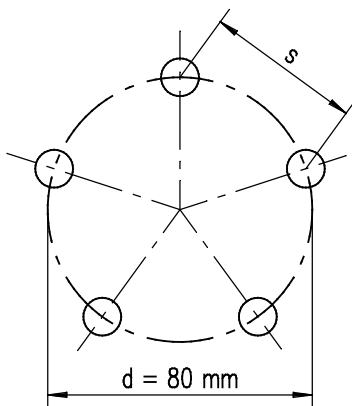
4.2 $\tan \alpha = 12 - 3 \tan \alpha$

4.3 $\sin (\alpha - 30^\circ) = 0,94$

Aufgabe 5

Auf einem Kreis mit dem Durchmesser $d = 80$ mm sollen 5 Bohrungen in gleichmäßigem Abstand angebracht werden.

Berechnen Sie den Lochabstand s !

**Aufgaben**

Aufgabe 6

Von einem schiefwinkligen Dreieck sind bekannt:

$$h_a = \overline{AD} = 2,53 \text{ m}, \quad b = \overline{AC} = 3,4 \text{ m} \text{ und der Winkel } \beta = 59,35^\circ.$$

Errechnen Sie a , c , α , γ und A !

Aufgabe 7

Von einem gleichschenkligen Dreieck sind

die Basis mit 4,25 m und der Winkel an der Spitze mit $47,45^\circ$ bekannt.

Errechnen Sie die Länge der Schenkel und den Flächeninhalt!

Aufgabe 8

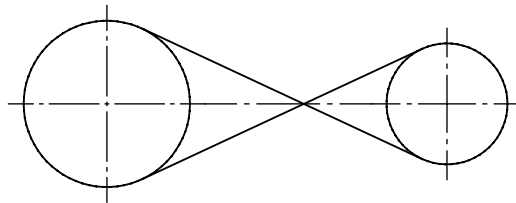
In einem Kreis mit 60 mm Durchmesser ist eine Sehne von 48 mm Länge eingezeichnet.

Errechnen Sie die zur Sehne gehörenden Bogenlängen!

Aufgabe 9

Von einem gekreuzten Riementrieb sind die Durchmesser der beiden Riemenscheiben mit $d_1 = 1200 \text{ mm}$ und $d_2 = 750 \text{ mm}$ sowie der Achsabstand mit $a = 1800 \text{ mm}$ bekannt.

Errechnen Sie die Größe der Umschlingungswinkel und die Riemenlänge!



Aufgabe 10

Berechnen Sie Umfang U , Umkreisradius r , Inkreisradius ρ und den Flächeninhalt A eines regelmäßigen Fünfecks mit $a = 56,0 \text{ mm}$ Kantenlänge!

Aufgabe 11

Ermitteln Sie α :

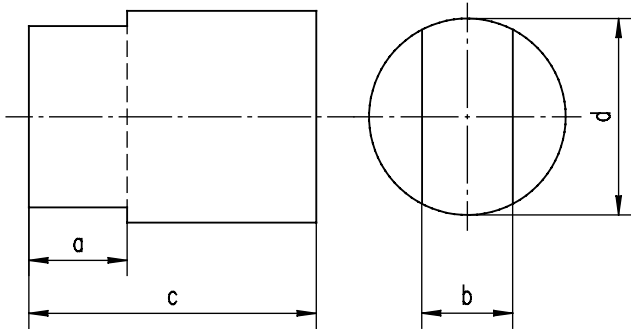
$$11.1 \quad \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = 0,848$$

$$11.2 \quad \sin \alpha = 2 \cos \alpha$$

Aufgabe 12

In einen Zylinder von $d = 60$ mm Durchmesser wird mittig eine Nut von der Breite $b = 36$ mm eingefräst ($a = 30$ mm, $c = 100$ mm).

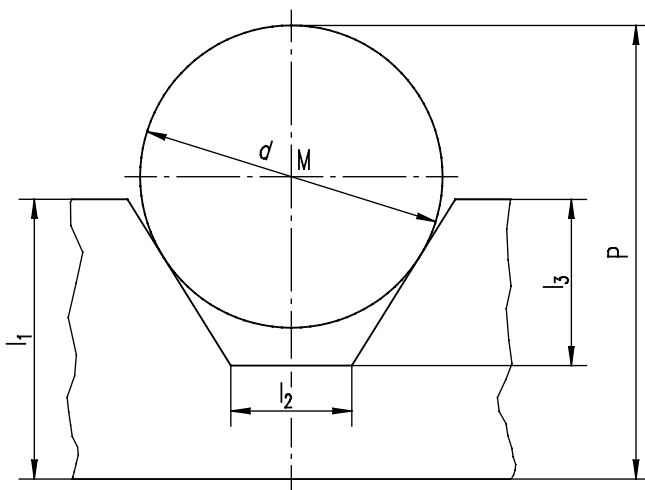
Wie viel % beträgt der Abfall?



Aufgabe 13

Zum Prüfen des 60° -Winkels einer Führung wird ein Messzylinder eingelegt und das Maß P gemessen.

Ermitteln Sie P zuerst allgemein, dann für $l_1 = 50$ mm, $l_2 = 30$ mm, $l_3 = 30$ mm und $d = 70$ mm.



Aufgabe 14

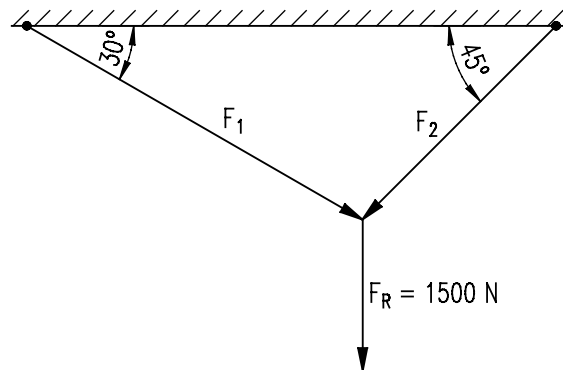
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\gamma = 112,5^\circ$, $a = 6,4$ cm und $c = 9,8$ cm!

Aufgabe 15

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 104^\circ$ und $c = 4,5$ cm!

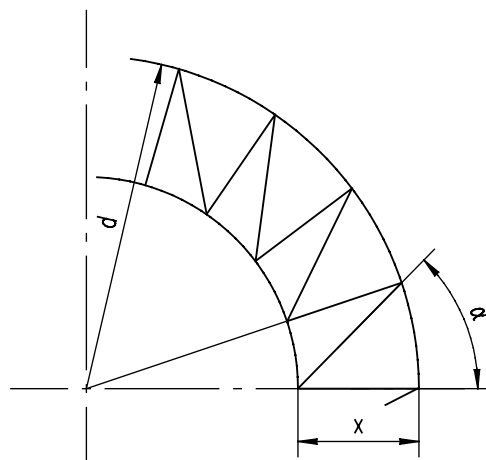
Aufgabe 16

Ermitteln Sie in der Stahlkonstruktion (siehe Skizze) durch Rechnung die beiden Stabkräfte F_1 und F_2 !



Aufgabe 17

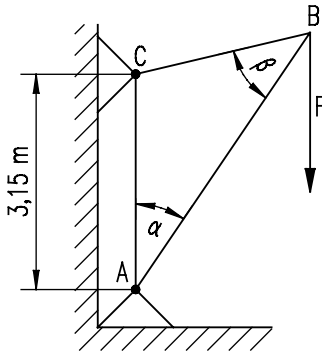
Berechnen Sie bei einem Schaltrad mit der Zähnezahl $z = 80$, $d = 90$ mm und $\alpha = 45^\circ$ die Frästiefe x !



Aufgabe 18

Bei einem Kran mit den Maßen $\overline{AC} = 3,15 \text{ m}$, $\alpha = 34^\circ 20'$, $\beta = 42^\circ 50'$ hängt eine Last $F = 7280 \text{ N}$.

Berechnen Sie die Zug- und Druckkräfte in den beiden Stäben [BC] und [AB]!



Aufgabe 19

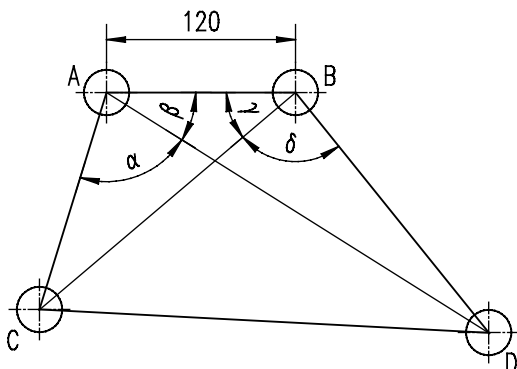
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 28,17^\circ$, $b = 6,5 \text{ cm}$ und $c = 3,2 \text{ cm}$!

Aufgabe 20

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $a = 4,2 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ und $c = 7,8 \text{ cm}$!

Aufgabe 21

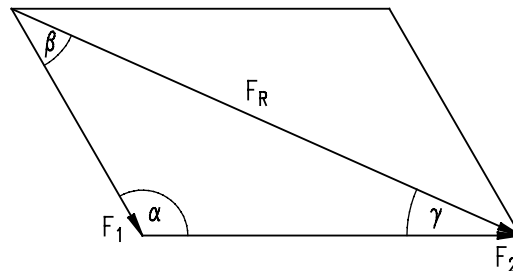
Ermitteln Sie die Lochmittenabstände der 4 Bohrungen eines Vorrichtungsteils \overline{AC} , \overline{BC} , \overline{AD} , \overline{DB} , \overline{CD} für $\overline{AB} = 120 \text{ mm}$, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 32,17^\circ$, $\gamma = 40,33^\circ$, $\delta = 88,5^\circ$!



Aufgabe 22

Zwei Kräfte $F_1 = 65 \text{ N}$ und $F_2 = 80 \text{ N}$ stehen unter dem Winkel $\alpha = 120^\circ$ zueinander.

Berechnen Sie die Resultierende F_R und die Winkel β und γ zwischen F_1 bzw. F_2 und der Resultierenden!



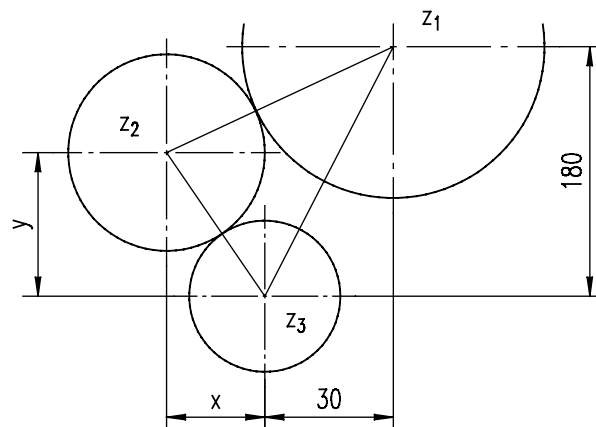
Aufgabe 23

In einem Gehäuse sind 3 Bohrungen für Zahnräder z_1, z_2, z_3 nach Bild zu bohren.

Ermitteln Sie die Koordinaten x und y , wenn die Zähnezahlen $z_1 = 60, z_2 = 45$ und $z_3 = 35$ und der Modul $m = 3 \text{ mm}$ betragen!

Hinweis:

Die Achsabstände berechnen sich aus $a_1 = \frac{(z_1 + z_2)}{2} \cdot m$ und $a_2 = \frac{(z_2 + z_3)}{2} \cdot m$



Aufgabe 24

Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $2a$. Die Höhe hat die Länge $3a$.

24.1 Berechnen Sie den Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Grundfläche!

24.2 Berechnen Sie den Neigungswinkel jeder Seitenfläche gegen die Grundfläche (Saubere Skizze!)

Aufgabe 25

Über einer Obergeschossdecke mit den Maßen $l = 21 \text{ m}$ und $b = 12 \text{ m}$ wird ein Walmdach errichtet, dessen Trapezflächen (mit der Grundlinie l !) mit der Geschossdecke einen Winkel von 38° einschließen und dessen First die Länge $f = 15 \text{ m}$ besitzt.

25.1 Berechnen Sie die Höhe des Dachstuhls!

25.2 Berechnen Sie den Neigungswinkel der dreieckigen Dachflächen!

25.3 Berechnen Sie die gesamte Dachfläche!

Lernbereich

3 Stereometrie

3.1 Volumen und Oberfläche von Prismen

Als prismatische Körper bezeichnet man Körper, deren Querschnitt gleich bleibt. Sie werden unterteilt in gerade und schiefe Prismen.

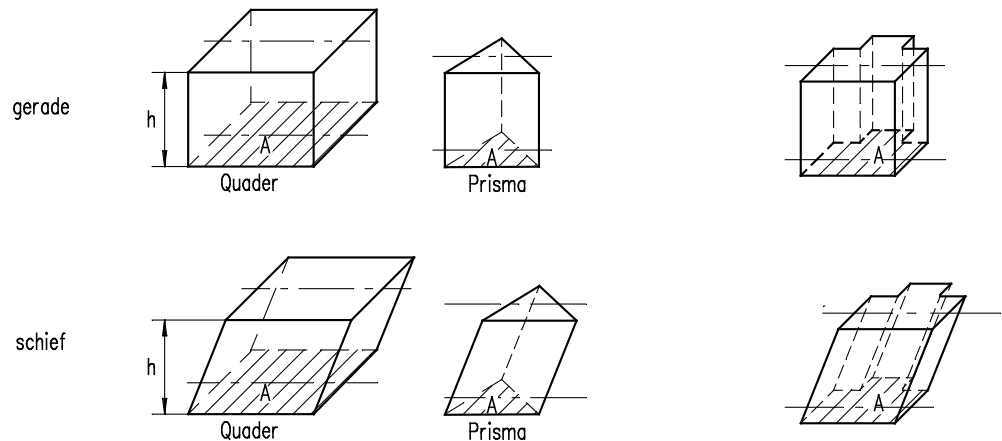


Abbildung 116 Gerade und schiefe prismatische Körper

Für alle prismatischen Körper gilt:

Volumen = Grundflächen · Höhe

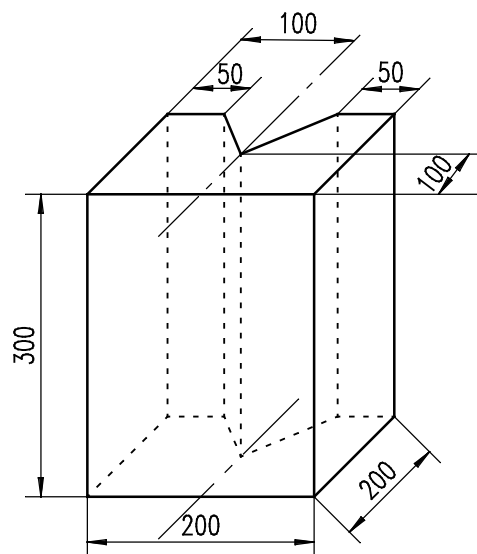
$$V = A \cdot h$$

Oberfläche = 2 · Grundfläche + Mantelfläche

$$A_O = 2 \cdot A + A_M$$

Anmerkung: Dass die Volumenformel auch für schiefe Prismen gilt, folgt aus dem Satz von Cavalieri: Körper, die in gleicher Höhe flächengleiche Querschnitte haben, sind volumengleich.

Lehrbeispiel 1



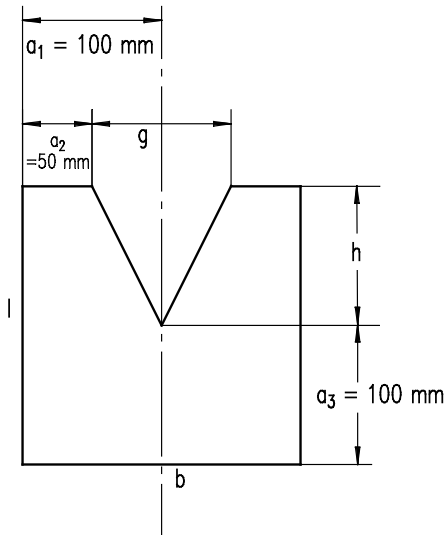
Berechnen Sie vom abgebildeten Formteil

1.1 das Volumen!

1.2 die Oberfläche!

Lösung

geg.: $H = 300 \text{ mm}$ $l = 200 \text{ mm} = b$
 $a_1 = 100 \text{ mm}$ $a_2 = 50 \text{ mm}$ $a_3 = 100 \text{ mm}$

**Lehrbeispiel 1.1**

$$\begin{aligned}
 V &= A \cdot H \quad | \quad A = A_{\square} - A_{\Delta} \\
 &= l^2 - \frac{g \cdot h}{2} \\
 &= \left(l^2 - \frac{g \cdot h}{2} \right) \cdot H \quad \left| \begin{array}{l} g = l - 2a_2 = 100 \text{ mm} \\ h = l - a_3 = 100 \text{ mm} \end{array} \right. \\
 &= \left(200^2 \text{ mm}^2 - \frac{100 \text{ mm} \cdot 100 \text{ mm}}{2} \right) \cdot 300 \text{ mm} \\
 &= \underbrace{35000 \text{ mm}^2}_A \cdot 300 \text{ mm} = 10500000 \text{ mm}^3 = 10,5 \text{ dm}^3
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 1.2

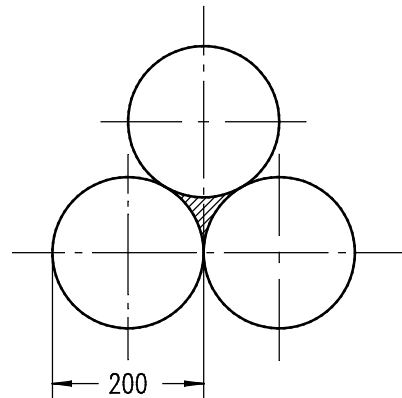
$$\begin{aligned}
 A_o &= 2 \cdot A + A_M \quad | \quad A_M = \text{Umfang} \cdot H \\
 &= \left(3 \cdot l + 2 \cdot a_2 + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{2} \right)^2 + h^2} \right) \cdot H \\
 &= \left(3 \cdot 200 \text{ mm} + 2 \cdot 50 \text{ mm} + 2 \cdot \sqrt{(50 \text{ mm})^2 + (100 \text{ mm})^2} \right) \cdot 300 \text{ mm} \\
 &= 2,7708 \cdot 10^5 \text{ mm}^2 \\
 &= 2 \cdot 35000 \text{ mm}^2 + 2,7708 \cdot 10^5 \text{ mm}^2 \\
 &= 3,4708 \cdot 10^5 \text{ mm}^2 \\
 &\approx 34,7 \text{ dm}^2
 \end{aligned}$$

Antwort: Das Volumen des Formteils beträgt $10,5 \text{ dm}^3$, die Oberfläche $34,7 \text{ dm}^2$.

Lehrbeispiel 2

Drei Metallzylinder von gleicher Querschnittsfläche ($D = 200 \text{ mm}$) werden gemäß der Abbildung gelagert.

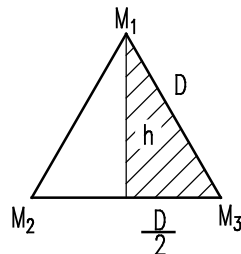
Berechnen Sie das Volumen des Luftspaltes zwischen den Metallzylindern, wenn diese eine Länge von $1,5 \text{ m}$ haben!



Lösung

geg.: $D = 200 \text{ mm}$ $H = 1500 \text{ mm}$

ges.: V_L (Volumen des Luftspaltes)



$V_L = A_L \cdot H$ Fläche des Luftspaltes

$$A_L = A_{\Delta} - 3 \cdot A_{\text{Kreisausschnitt}}$$

$$A_{\Delta} = \frac{D \cdot h}{2} \quad \left| \quad h = \sqrt{D^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}D^2} \right.$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{D}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{200 \text{ mm}}{2}$$

$$= 173,2051 \text{ mm}$$

$$A_{\Delta} = \frac{200 \text{ mm} \cdot 173,2051 \text{ mm}}{2} = 1,732051 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$3 \cdot A_{\text{Kreisausschnitt}} = A_{\text{Halbkreis}} = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2,$$

$$A_{\text{Kreisausschnitt}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \pi \left(\frac{200 \text{ mm}}{2} \right)^2 \\
 &= 1,570796 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \\
 A_L &= 1,732051 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 - 1,570796 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \\
 &= 1612,5 \text{ mm}^2 \\
 &= 1612,5 \text{ mm}^2 \cdot 1500 \text{ mm} \\
 &= 2,419 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \\
 &\approx 2,42 \text{ dm}^3
 \end{aligned}$$

Antwort: Das Luftspaltvolumen beträgt $2,42 \text{ dm}^3$.

Anmerkung: Bei der Berechnung der Grundfläche wurden bei den Zwischenschritten viele Stellen aufgeschrieben, weil eine Differenzbildung erfolgen musste. Wäre hier nur mit Standardgenauigkeit gerechnet worden, so wäre $1,73 \cdot 10^4 - 1,57 \cdot 10^4 = 0,16 \cdot 10^4$ das Ergebnis: dies ist zu ungenau.

3.2 Volumen und Oberfläche von Zylinder, Pyramide und Kegel

Volumen und Oberfläche eines Zylinders

Volumen und Oberfläche eines Zylinders berechnet man wie bei geraden Prismen.

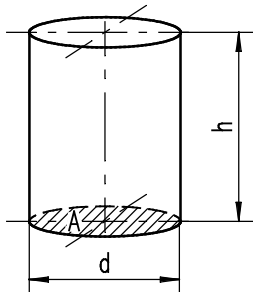


Abbildung 117 Zylinder

$$\begin{aligned}
 V &= A \cdot h \\
 \left| A &= \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2 \right. \\
 &= \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h
 \end{aligned}$$

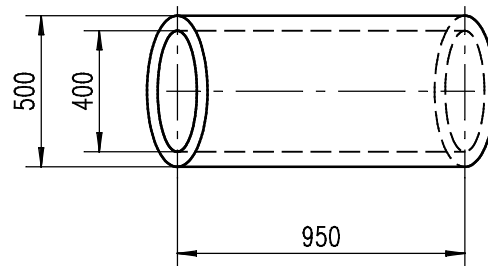
$$\begin{aligned}
 A_o &= 2 \cdot A + A_M \quad \left| A = \frac{\pi}{4} d^2 \quad A_M = U \cdot h = \pi d \cdot h \right. \\
 &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 + \pi d \cdot h \\
 &= \frac{\pi}{2} d^2 + \pi d \cdot h = \pi d \left(\frac{d}{2} + h \right)
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie

1.1 *das Volumen!*

1.2 *die Oberfläche des abgebildeten Hohlkörpers!*



Gegeben: $D = 500 \text{ mm}$
 $d = 400 \text{ mm}$
 $h = 950 \text{ mm}$

Lösung

Lehrbeispiel 1.1

$$\begin{aligned}
 V &= A \cdot h & \left| \quad A &= \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{Kreisring}) \right. \\
 &= \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right) \cdot h \\
 &= \left(\frac{\pi}{4} \cdot 500^2 \text{ mm}^2 - \frac{\pi}{4} \cdot 400^2 \text{ mm}^2 \right) \cdot 950 \text{ mm} = 6,715 \cdot 10^7 \text{ mm}^3 \approx \underline{\underline{67,2 \text{ dm}^3}}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 1.2

$A_0 = 2 \cdot \text{Kreisringfläche} + \text{äußere Mantelfläche} + \text{innere Mantelfläche}$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right) + \pi \cdot D \cdot h + \pi \cdot d \cdot h \\
 &= \frac{\pi}{2} (D^2 - d^2) + \pi h (D + d) \\
 &= \frac{\pi}{2} (500^2 \text{ mm}^2 - 400^2 \text{ mm}^2) + \pi \cdot 950 \text{ mm} \cdot (500 \text{ mm} + 400 \text{ mm}) \\
 &= 2,827 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 \approx \underline{\underline{2,83 \text{ m}^2}}
 \end{aligned}$$

Antwort: Das Volumen beträgt $67,2 \text{ dm}^3$, die Oberfläche $2,83 \text{ m}^2$.

Volumen und Oberfläche von Pyramide und Kegel

Volumen und Oberfläche von Pyramide und Kegel gehören zu den spitzen Körpern. Sie werden unterteilt in gerade und schiefe spitze Körper.

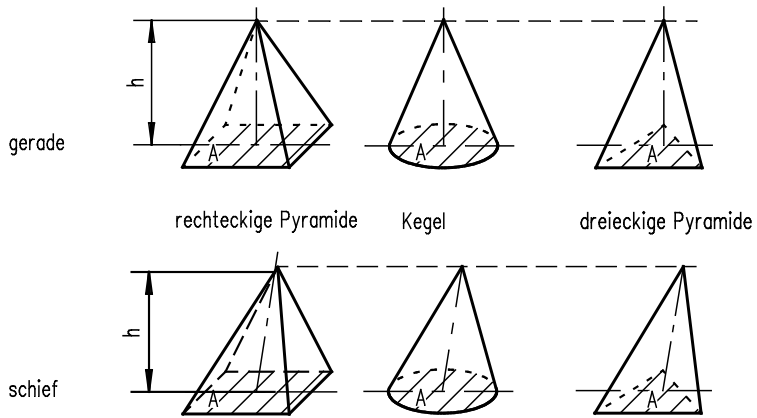


Abbildung 118 Gerade und schiefe spitze Körper

Für alle spitzen Körper gilt:

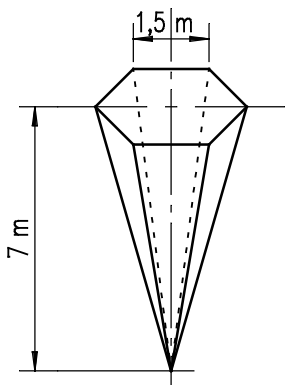
$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \quad V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$$

$$\text{Oberfläche} = \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche} \quad A_o = A + A_M$$

Lehrbeispiel 2

Der abgebildete oben offene Schütttrichter soll gefertigt werden. Die Querschnittsfläche ist ein regelmäßiges Sechseck.

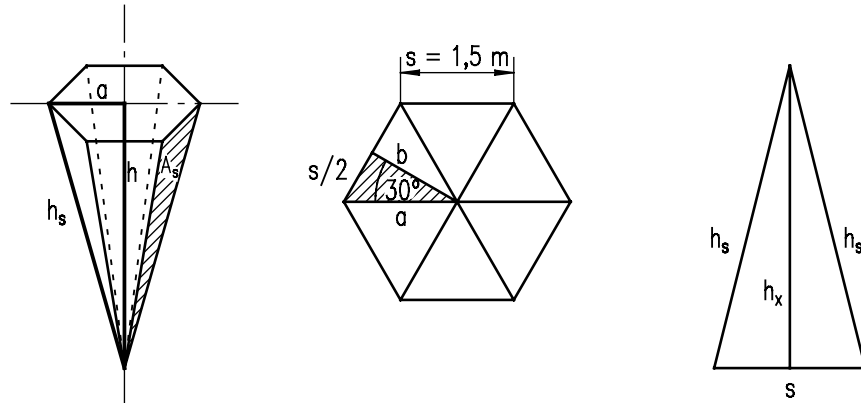
- 2.1 Berechnen Sie den Bedarf an Kupferblech, wenn für Falze und Verschnitt ein Zuschlag von 15 % erforderlich ist!
- 2.2 Berechnen Sie den Wasserbedarf für eine Dichtigkeitsprüfung, wenn der Behälter gefüllt werden soll!



Lösung

Gegeben: $s = 1,5 \text{ m}$
 $h = 7 \text{ m}$

Gesucht: 2.1 Blechbedarf B
 2.2 Volumen V



Lehrbeispiel 2.1

$$\begin{aligned}
 B &= 1,15 \cdot A_M & | A_M &= 6 \cdot A_s \\
 &= 1,15 \cdot 6 \cdot A_s & | A_s &= \frac{1}{2} \cdot s \cdot h_s \\
 &= 1,15 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot h_x & | h_s &= \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{(1,5 \text{ m})^2 + (7 \text{ m})^2} = 7,16 \text{ m} \\
 & & | h_x &= \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{(7,16 \text{ m})^2 - (0,75 \text{ m})^2} = 7,12 \text{ m} \\
 &= 3,45 \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 7,12 \text{ m} = 36,85 \text{ m}^2 & | \frac{s}{2} &= \sin 30^\circ \Rightarrow a = \frac{\frac{s}{2}}{\sin 30^\circ} = 1,5 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Antwort: Der Blechbedarf beträgt $36,85 \text{ m}^2$.

Lehrbeispiel 2.2

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} \cdot A \cdot h & | A &= 12 \cdot \left(\frac{s}{2} \cdot b\right) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= s \cdot b \cdot h & | \frac{s/2}{b} &= \tan 30^\circ \Rightarrow b = \frac{s}{2 \cdot \tan 30^\circ} \\
 &= \frac{s^2 \cdot h}{2 \cdot \tan 30^\circ} = \frac{(1,5 \text{ m})^2 \cdot 7 \text{ m}}{2 \cdot \tan 30^\circ} = 13,64 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Antwort: Man benötigt zum Füllen $13,64 \text{ m}^3$ Wasser.

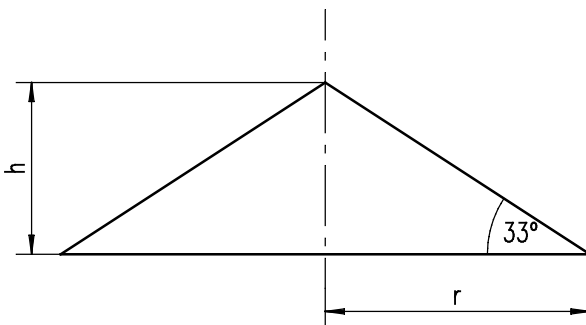
Lehrbeispiel 3

Ein Schüttgut bildet einen Schüttwinkel von 33° .

3.1 Berechnen Sie das Volumen des Schüttkegels in Abhängigkeit von der Kegelhöhe allgemein!

3.2 Für $h = 3,5 \text{ m}$!

Gegeben: $\alpha = 33^\circ$, h

Lösung**Lehrbeispiel 3.1**

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} A \cdot h & | A &= \pi r^2 \\
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h & | \frac{h}{r} &= \tan 33^\circ \Rightarrow r = \frac{h}{\tan 33^\circ} \\
 &= \frac{\pi \cdot h^3}{3 (\tan 33^\circ)^2}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 3.2

Mit $h = 3,5 \text{ m}$ ergibt sich:

$$V = \frac{\pi \cdot 3,5^3 \text{ m}^3}{3 (\tan 33^\circ)^2} = 106,46 \text{ m}^3 \approx \underline{\underline{106 \text{ m}^3}}$$

Antwort: Das Volumen des Kegels beträgt 106 m^3 .

Quadratische Pyramide

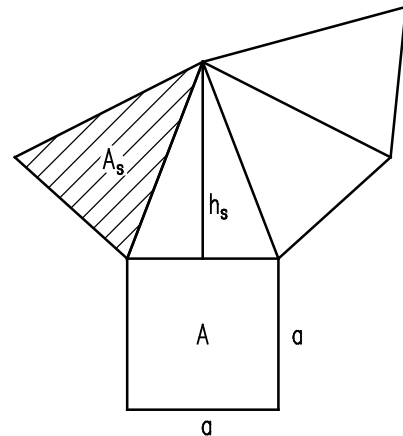
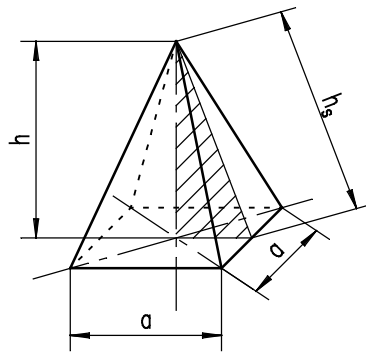


Abbildung 119 Quadratische Pyramide

Volumen:

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h \quad | A = a^2$$

$$V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$$

Mantelfläche:

$$A_M = 4 \cdot A_s \quad | A_s = \frac{h_s \cdot a}{2} \quad (\text{Dreiecksfläche})$$

$$= 2 \cdot h_s \cdot a \quad | h_s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$A_M = 2 a \cdot \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Oberfläche:

$$A_0 = A_M + A \quad | A = a^2$$

$$A_0 = 2 a \cdot \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} + a^2$$

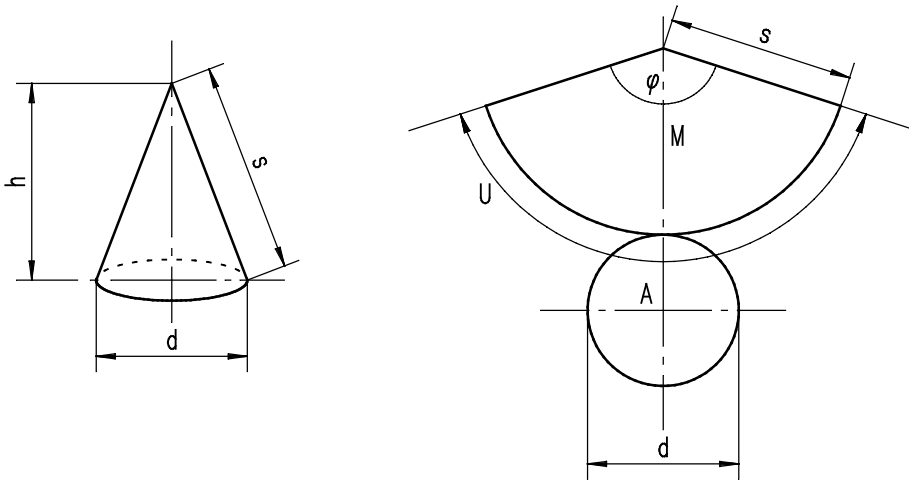
Kegel

Abbildung 120 Kegel

Volumen:

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h \quad \left| A = \frac{\pi}{4} d^2 \right.$$

$$V = \frac{\pi}{12} d^2 \cdot h$$

Mantelfläche:

$$A_M = \pi s^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} \quad \left| \frac{\varphi}{360^\circ} = \frac{U}{2 \pi s} = \frac{\pi d}{2 \pi s} = \frac{d}{2 s} \right.$$

$$= \pi \frac{s^2 \cdot d}{2 s} \quad \left| s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right.$$

$$A_M = \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Oberfläche:

$$A_0 = A_M + A$$

$$= \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{\pi}{4} d^2$$

$$A_0 = \pi \cdot \frac{d}{2} \left(\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{d}{2} \right)$$

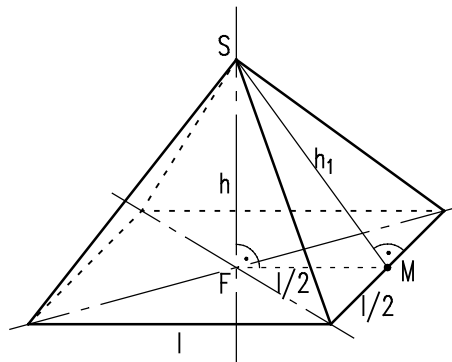
Lehrbeispiel 4

Gegeben ist eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche $l = 60 \text{ cm}$; $h = 40 \text{ cm}$.

Berechnen Sie

- 4.1 das Volumen!
- 4.2 die Oberfläche!

Lösung



Lehrbeispiel 4.1

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} A \cdot h & | A &= l^2 \\
 &= \frac{1}{3} l^2 \cdot h \\
 &= \frac{1}{3} 60^2 \text{ cm}^2 \cdot 40 \text{ cm} = 48000 \text{ cm}^3 = \underline{\underline{48 \text{ dm}^3}}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 4.2

$$\begin{aligned}
 A_0 &= A + 4 \cdot A_{\Delta} & | A_{\Delta} &= \frac{l \cdot h_1}{2}, A = l^2 \\
 &= l^2 + 4 \cdot \frac{l \cdot h_1}{2} & \left| \begin{array}{l} \text{aus Dreieck FMS folgt } h_1^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \\ \Rightarrow h_1 = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} \end{array} \right. \\
 &= l^2 + 2 \cdot l \cdot \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} \\
 &= 60^2 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 60 \text{ cm} \cdot \sqrt{\left(\frac{60 \text{ cm}}{2}\right)^2 + 40^2 \text{ cm}^2} = 9600 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{96 \text{ dm}^2}}
 \end{aligned}$$

Antwort: Das Volumen beträgt 48 dm^3 und die Oberfläche 96 dm^2 .

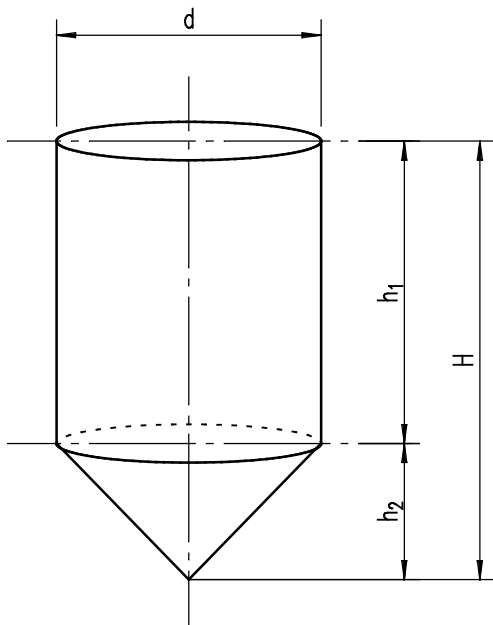
Lehrbeispiel 5

Ein Silo hat die Form eines Hohlzylinders mit aufgesetztem Kegel, seine Gesamthöhe beträgt $H = 8 \text{ m}$, die Höhe des Zylinders $h_1 = 0,6 \cdot H$, sein innerer Durchmesser $d = 4,8 \text{ m}$.

Berechnen Sie

5.1 das Fassungsvermögen des Silos!

5.2 den Blechbedarf, der zur Herstellung benötigt wird!

Lösung**Lehrbeispiel 5.1**

$$\begin{aligned}
 V &= V_{\text{Zyl}} + V_{\text{Kegel}} & \left| \begin{array}{l} V_{\text{Zyl}} = A \cdot h_1 \\ V_{\text{Kegel}} = \frac{\pi}{12} d^2 \cdot h_2 \end{array} \right. \\
 &= A \cdot h_1 + \frac{\pi}{12} d^2 \cdot h_2 & \left| \begin{array}{l} A = \frac{\pi}{4} d^2 \\ h_2 = H - 0,6 H = 0,4 H \quad h_1 = 0,6 \cdot H \end{array} \right. \\
 &= \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 0,6 H + \frac{\pi}{12} d^2 \cdot 0,4 H \\
 &= \frac{\pi}{12} d^2 \cdot H (3 \cdot 0,6 + 0,4) = \frac{2,2 \pi}{12} d^2 \cdot H \\
 &= \frac{2,2 \pi}{12} 4,8^2 \text{ m}^2 \cdot 8 \text{ m}^2 = 106,16 \text{ m}^3 \approx \underline{\underline{106 \text{ m}^3}}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 5.2

$$A_0 = A + A_{\text{MZyl}} + A_{\text{MKegel}} \quad \left| \begin{array}{l} A = \frac{\pi}{4} d^2 \\ A_{\text{MZyl}} = \pi \cdot d \cdot h_1 = \pi \cdot d \cdot 0,6 H \end{array} \right.$$

$$= \frac{\pi}{4} d^2 + \pi \cdot d \cdot 0,6 H + A_{\text{MKegel}} \quad \left| \quad \begin{aligned} A_{\text{MKegel}} &= \pi \frac{d}{2} \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \\ &= \pi \frac{d}{2} \sqrt{(0,4 H)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{\pi}{4} d^2 + \pi \cdot d \cdot 0,6 H + \pi \frac{d}{2} \sqrt{(0,4 H)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$= \pi d \left(\frac{1}{4} d + 0,6 H + \frac{1}{2} \sqrt{(0,4 H)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right)$$

$$= \pi \cdot 4,8 \text{ m} \left(\frac{1}{4} \cdot 4,8 \text{ m} + 0,6 \cdot 8 \text{ m} + \frac{1}{2} \sqrt{(0,4 \cdot 8 \text{ m})^2 + \left(\frac{4,8 \text{ m}}{2}\right)^2} \right) = 120,64 \text{ m}^2 \approx \underline{\underline{121 \text{ m}^2}}$$

Antwort: Das Fassungsvermögen beträgt 106 m^3 , der Blechbedarf 121 m^2 .

3.3 Volumen und Oberfläche der Kugel

Um die Formel für das Volumen der Kugel herzuleiten, betrachten wir im Folgenden den auf Cavalieri und Archimedes zurückgehenden Gedankengang.

Archimedes beobachtete, dass eine Halbkugel vom Radius r dasselbe Volumen hat wie ein Zylinder vom Radius r , der kegelförmig ausgebohrt wurde.

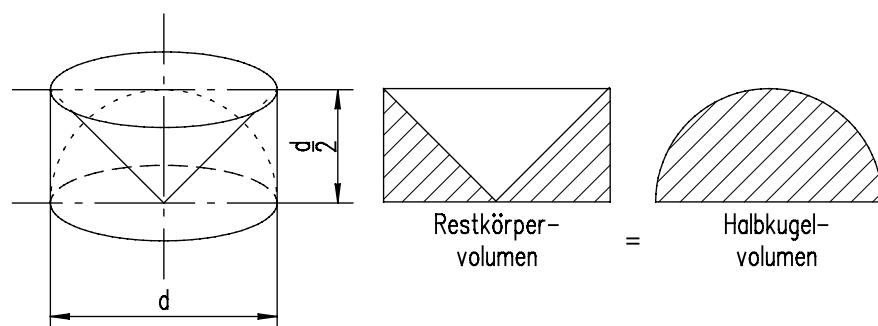


Abbildung 121 Volumen von Halbkugel und kegelförmig ausgebohrtem Zylinder

Der Nachweis, dass das wirklich exakt stimmt, gelingt mit dem Satz von Cavalieri, der schon bei den schiefen Körpern seinen Einsatz fand und der besagt, dass zwei Körper das gleiche Volumen haben, wenn sie gleichen Grundflächeninhalt, gleiche Höhe und in jeder Höhe die gleiche Querschnittsfläche haben.

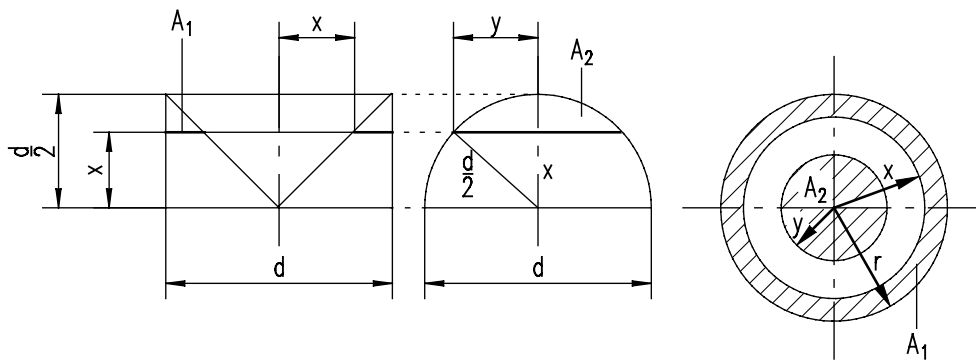


Abbildung 122 Querschnittsflächen mit Abstand x

$$A_1 = \pi (r^2 - x^2) \quad A_2 = \pi \cdot y^2 \quad | \quad y^2 = r^2 - x^2 \\ = \pi (r^2 - x^2)$$

Also ist $A_1 = A_2$.

Da diese Überlegung für jedes x gilt, ist die Bedingung von Cavalieri erfüllt, dass beide Körper auf gleicher Höhe dieselbe Querschnittsfläche haben. Also haben beide Körper dasselbe Volumen.

Nun bleibt nur noch, das Volumen des ausgebohrten Zylinders zu berechnen.

$$V_{\text{Restkörper}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} \\ = \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 \\ = \frac{2}{3} \pi r^3 = V_{\text{Halbkugel}}$$

damit gilt:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3$$

Eine Formel für die Oberfläche der Kugel lässt sich mit folgender Idee gewinnen.

Wird eine Kugel in n kleine Pyramiden zerlegt, deren Spitzen sich im Mittelpunkt treffen, so gilt für das Volumen der Pyramiden:

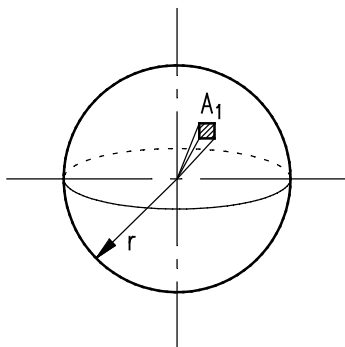


Abbildung 123 Zerlegung der Kugel in Pyramiden

$$V_n = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot \frac{d}{2} + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot \frac{d}{2} + \dots + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot \frac{d}{2}$$

$$V_n = \frac{d}{6} \underbrace{(A_1 + A_2 + \dots + A_n)}_{\text{Oberfläche } A_0}$$

$$V_n = \frac{d}{6} \cdot A_0$$

Diese Pyramiden füllen nun einerseits die Kugelfläche aus, andererseits ist auch ihr Volumen gleich dem Kugelvolumen, also gilt

$$V_n = \frac{d}{6} \cdot A_0$$

$$\begin{aligned} \text{oder } A_0 &= \frac{6 \cdot V}{d} \quad | \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3 \\ &= \frac{6 \cdot \pi \cdot d^3}{6 \cdot d} = \pi \cdot d^2 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$A_0 = \pi \cdot d^2$$

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie die Anzahl der Bleikugeln vom Durchmesser 1 mm, die benötigt werden, um eine Kugel vom Durchmesser 10 mm gießen zu können!

Gegeben: $d_1 = 1 \text{ mm}$, $d_2 = 10 \text{ mm}$

Gesucht: Anzahl n

Lösung

$$V_1 = V_2 \quad | \quad V_1 = n \cdot \frac{\pi}{6} d_1^3$$

$$n \cdot \frac{\pi}{6} d_1^3 = V_2 \quad | \quad V_2 = \frac{\pi}{6} d_2^3$$

$$n \cdot \frac{\pi}{6} d_1^3 = \frac{\pi}{6} d_2^3$$

$$n = \frac{d_2^3}{d_1^3} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^3 = \left(\frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}} \right)^3 = 1000$$

Antwort: Man benötigt 1000 Kugeln.

Zum Schluss dieses Abschnitts soll noch ein interessanter Zusammenhang nicht unerwähnt bleiben.

Für die Volumina von Zylinder, Kugel und Kegel, jeweils mit gleichem Radius und gleicher Höhe, gilt:

$$V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 2 : 1$$

Dieses sieht man direkt, wenn die Volumenformeln untereinander geschrieben werden:

$$V_{\text{Zylinder}} = \frac{\pi}{4} d^3 = 3 \cdot \frac{\pi}{12} d^3$$

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{\pi}{6} d^3 = 2 \cdot \frac{\pi}{12} d^3$$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{\pi}{12} d^3 = 1 \cdot \frac{\pi}{12} d^3$$

3.4 Volumen und Oberfläche von Pyramiden- und Kegelstumpf

Wird bei einer Pyramide oder einem Kegel durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche die Spitze abgeschnitten, so entsteht ein **Pyramiden-** bzw. **Kegelstumpf**.

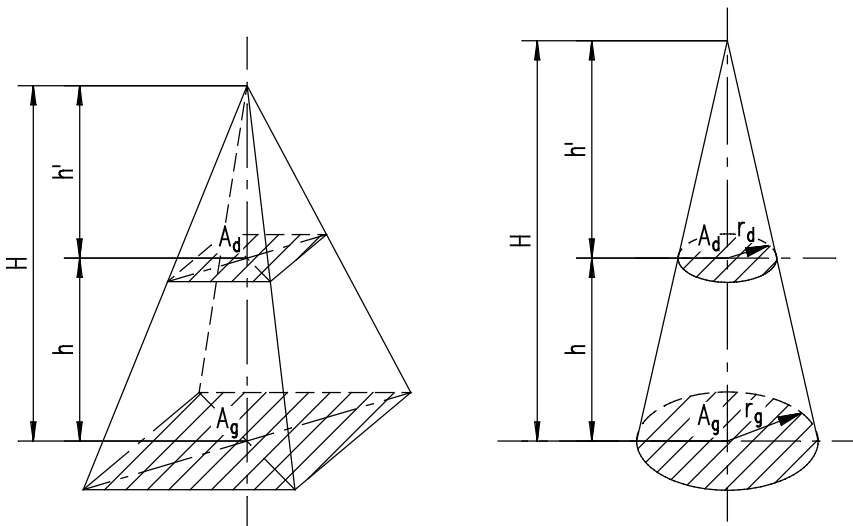


Abbildung 124 Pyramiden- und Kegelstumpf

Das Volumen berechnet sich aus der Differenz:

$$V = \frac{1}{3} A_g \cdot H - \frac{1}{3} A_d \cdot h' \quad | \quad H = h + h'$$

$$V = \frac{1}{3} A_g \cdot (h + h') - \frac{1}{3} A_d \cdot h' = \frac{1}{3} (A_g \cdot h + (A_g - A_d) \cdot h')$$

Aus den Ähnlichkeitsverhältnissen erhält man:

$$\frac{(h + h')^2}{h'^2} = \frac{A_g}{A_d} \quad | \quad \sqrt{}$$

$$\frac{h + h'}{h'} = \frac{\sqrt{A_g}}{\sqrt{A_d}} \quad | \quad \text{umstellen nach } h'$$

$$h' = \frac{h \cdot \sqrt{A_d}}{\sqrt{A_g} - \sqrt{A_d}} \quad | \quad \text{rational machen des Nenners}$$

$$= \frac{h \cdot \sqrt{A_d} (\sqrt{A_g} - \sqrt{A_d})}{A_g - A_d}$$

damit erhält man:

$$V = \frac{1}{3} \left(A_g \cdot h - \frac{(A_g - A_d) \sqrt{A_d} (\sqrt{A_g} + \sqrt{A_d})}{A_g - A_d} \cdot h \right)$$

$$V = \frac{1}{3} h (A_g + \sqrt{A_g \cdot A_d} + A_d)$$

Quadratischer Pyramidenstumpf

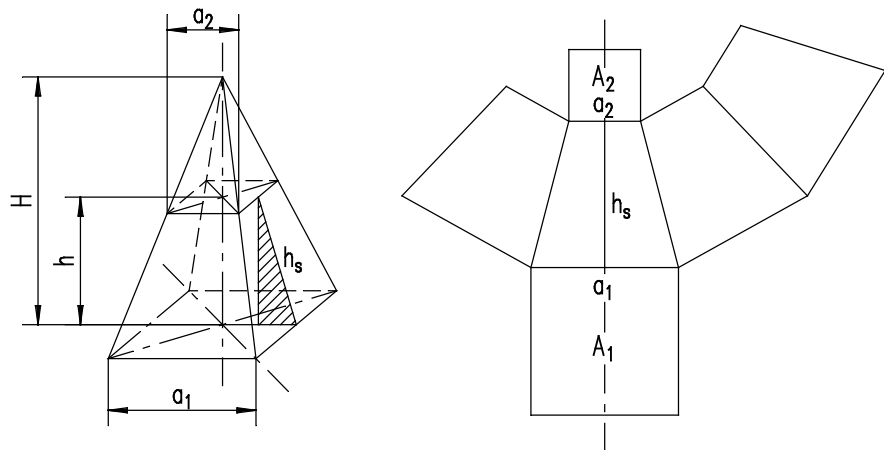


Abbildung 125 Quadratischer Pyramidenstumpf

Volumen:

$$V = \frac{1}{3} h (a_1^2 + \sqrt{a_1^2 \cdot a_2^2} + a_2^2)$$

$$V = \frac{1}{3} h (a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2)$$

Mantelfläche:

Die Mantelfläche besteht aus vier Trapezen.

$$A_M = 4 \cdot A_T \quad | \quad A_T = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_s$$

$$A_M = 4 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_s \quad | \quad h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2}$$

$$A_M = 2 (a_1 + a_2) \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2}$$

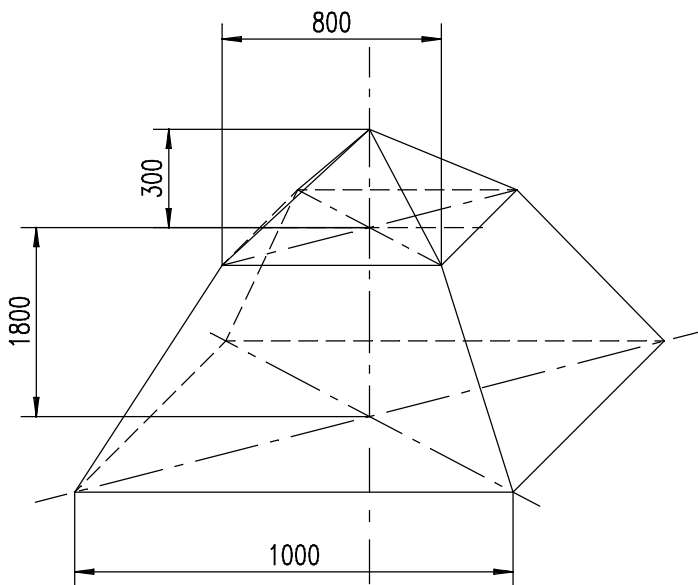
Oberfläche:

$$A_0 = A_M + A_g + A_d$$

$$A_0 = 2(a_1 + a_2) \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2} + a_1^2 + a_2^2$$

Lehrbeispiel 1

Ein Denkmalsockel hat die Gestalt eines quadratischen Pyramidenstumpfes dem eine kleine Pyramide aufgesetzt ist. Es gelten die eingetragenen Maße (in mm).



Berechnen Sie

- 1.1 *das Volumen der Pyramide!*
- 1.2 *die Masse, wenn $\rho_{\text{Material}} = 2,8 \text{ kg/dm}^3$ beträgt!*
- 1.3 *für den Anstrich die sichtbare Oberfläche!*

Gegeben: $a_1 = 10 \text{ dm}$
 $a_2 = 8 \text{ dm}$
 $h_1 = 18 \text{ dm}$
 $h_2 = 3 \text{ dm}$

Lösung

Lehrbeispiel 1.1

$$\begin{aligned}
 V &= V_{\text{Stumpf}} + V_{\text{Pyramide}} & | V_{\text{Stumpf}} &= \frac{1}{3} h_1 (a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2) \\
 &= \frac{1}{3} h_1 (a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2) + V_{\text{Pyramide}} & | V_{\text{Pyramide}} &= \frac{1}{3} a_2^2 \cdot h_2 \\
 &= \frac{1}{3} h_1 (a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2) + \frac{1}{3} a_2^2 \cdot h_2 \\
 &= \frac{1}{3} 18 \text{ dm} (10^2 \text{ dm}^2 + 10 \text{ dm} \cdot 8 \text{ dm} + 8^2 \text{ dm}^2) + \frac{1}{3} 8^2 \text{ dm}^2 \cdot 3 \text{ dm} = \underline{\underline{1528 \text{ dm}^3}}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 1.2

$$\begin{aligned}
 m &= \rho_{\text{Material}} \cdot V \\
 &= 2,8 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 1528 \text{ dm}^3 = 4278,4 \text{ kg} = 4,28 \text{ Mg} = \underline{\underline{4,28 \text{ t}}}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 1.3

$$\begin{aligned}
 A_0 &= A_{M_{\text{Stumpf}}} + A_{M_{\text{Pyramide}}} & | A_{M_{\text{Stumpf}}} &= 2 (a_1 + a_2) \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2} \\
 &= 2 (a_1 + a_2) \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2} + A_{M_{\text{Pyramide}}} & | A_{M_{\text{Pyramide}}} &= 2 a_2 \sqrt{h_2^2 + \frac{a_2^2}{4}} \\
 &= 2 (a_1 + a_2) \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2} + 2 a_2 \sqrt{h_2^2 + \frac{a_2^2}{4}} \\
 &= 2 \cdot (10 \text{ dm} + 8 \text{ dm}) \cdot \sqrt{18^2 \text{ dm}^2 + \left(\frac{10 \text{ dm} - 8 \text{ dm}}{2}\right)^2} + 2 \cdot 8 \text{ dm} \cdot \sqrt{3^2 \text{ dm}^2 + \frac{8^2 \text{ dm}^2}{4}} \\
 &= 729 \text{ dm}^2 = \underline{\underline{7,29 \text{ m}^2}}
 \end{aligned}$$

Antwort: Die Pyramide hat ein Volumen von 1528 dm^3 und damit eine Masse von $4,28 \text{ t}$. Für den Anstrich benötigt man Farbe für $7,29 \text{ m}^2$.

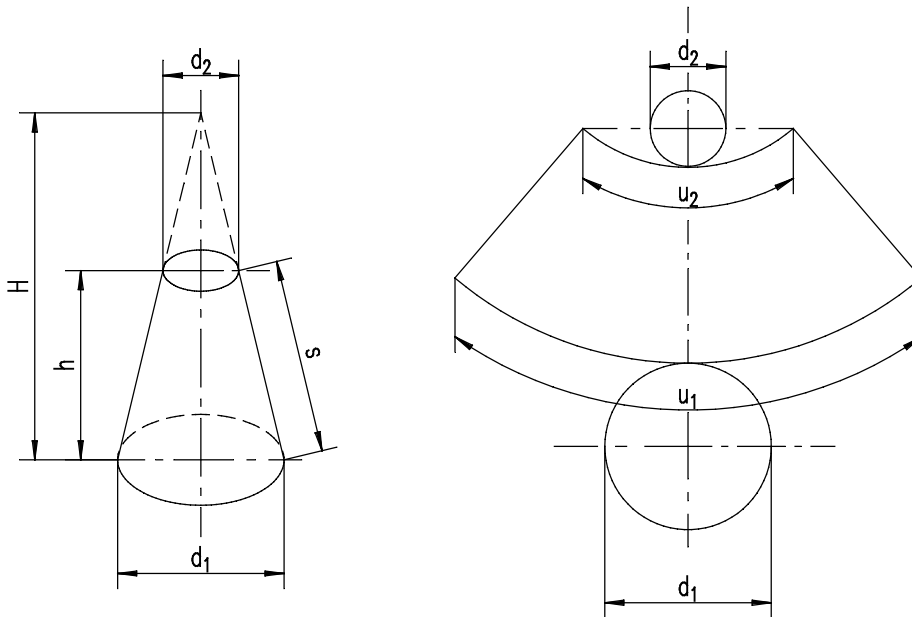
Kegelstumpf

Abbildung 126 Kegelstumpf

Volumen:

$$V = \frac{1}{3} h (A_g + \sqrt{A_g \cdot A_d} + A_d) \quad \left| \begin{array}{l} A_g = \frac{\pi}{4} d_1^2 \\ A_d = \frac{\pi}{4} d_2^2 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{3} h \left(\frac{\pi}{4} d_1^2 + \sqrt{\frac{\pi}{4} d_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} d_2^2} + \frac{\pi}{4} d_2^2 \right)$$

$$= \frac{1}{3} h \left(\frac{\pi}{4} d_1^2 + \frac{\pi}{4} d_1 \cdot d_2 + \frac{\pi}{4} d_2^2 \right)$$

$$V = \frac{\pi}{12} h (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2)$$

Mantelfläche:

Ohne Herleitung sei hier die Formel für die Mantelfläche angegeben.

$$A_M = \frac{\pi}{2} \cdot s (d_1 + d_2) \quad \text{dabei ist } s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} \right)^2}$$

Oberfläche:

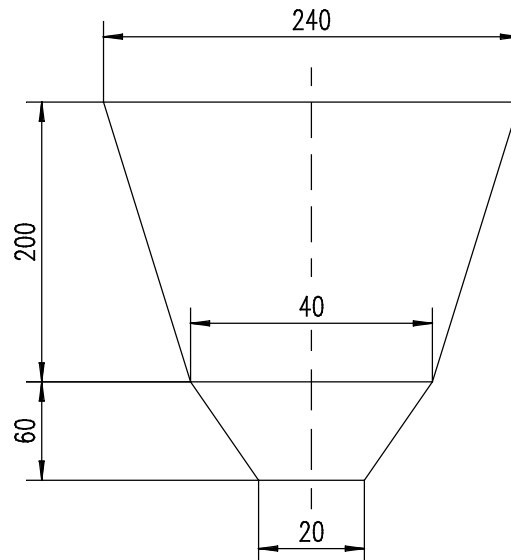
$$A_0 = \frac{\pi}{4} d_1^2 + \frac{\pi}{4} d_2^2 + \frac{\pi}{2} \cdot s (d_1 + d_2)$$

$$A_0 = \frac{\pi}{4} (d_1^2 + d_2^2 + 2s(d_1 + d_2))$$

Lehrbeispiel 2

Ein Einfülltrichter besteht aus zwei aufeinander gesetzten Kegelstümpfen.

Berechnen Sie Volumen und Blechbedarf!



Gegeben: $d_1 = 24 \text{ cm}$
 $d_2 = 4 \text{ cm}$
 $d_3 = 2 \text{ cm}$
 $h_1 = 20 \text{ cm}$
 $h_2 = 6 \text{ cm}$

Lösung

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 & \left| \quad V_1 &= \frac{\pi \cdot h_1}{12} (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2) \quad V_2 = \frac{\pi \cdot h_2}{12} (d_2^2 + d_2 \cdot d_3 + d_3^2) \right. \\
 &= \frac{\pi \cdot h_1}{12} (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2) + \frac{\pi \cdot h_2}{12} (d_2^2 + d_2 \cdot d_3 + d_3^2) \\
 &= \\
 &= \frac{\pi \cdot 20 \text{ cm}}{12} (24^2 \text{ cm}^2 + (24 \cdot 4) \text{ cm}^2 + 4^2 \text{ cm}^2) + \frac{\pi \cdot 6 \text{ cm}}{12} (4^2 \text{ cm}^2 + (4 \cdot 2) \text{ cm}^2 + 2^2 \text{ cm}^2) \\
 &= 3646,3 \text{ cm}^3 = \underline{\underline{3,65 \text{ dm}^3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= A_{M_1} + A_{M_2} & \left| \quad A_{M_1} &= \frac{\pi}{2} \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} \right)^2} \cdot (d_1 + d_2) \right. \\
 & & \left| \quad A_{M_2} &= \frac{\pi}{2} \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_3}{2} \right)^2} \cdot (d_2 + d_3) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{\pi}{2} \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2} \cdot (d_1 + d_2) + \frac{\pi}{2} \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_3}{2}\right)^2} \cdot (d_2 + d_3) \\
 &= \frac{\pi}{2} \sqrt{20^2 \text{ cm}^2 + \left(\frac{24 \text{ cm}}{2} - \frac{4 \text{ cm}}{2}\right)^2} \cdot (24 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) \\
 &\quad + \frac{\pi}{2} \sqrt{6^2 \text{ cm}^2 + \left(\frac{4 \text{ cm}}{2} - \frac{2 \text{ cm}}{2}\right)^2} \cdot (4 \text{ cm} + 2 \text{ cm}) \\
 &= 1040,8 \text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{10,4 \text{ dm}^2}}
 \end{aligned}$$

Antwort: Der Einfülltrichter hat ein Volumen von $3,65 \text{ dm}^3$ und einen Blechbedarf von $10,4 \text{ dm}^2$.

3.5 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern

Rotationskörper sind Körper, die durch die Drehung einer Fläche um eine Drehachse entstehen. Hierzu gehören z.B. Reifen, Rettungsring (Torus), Riemenscheibe, aber auch Kreisringkörper.

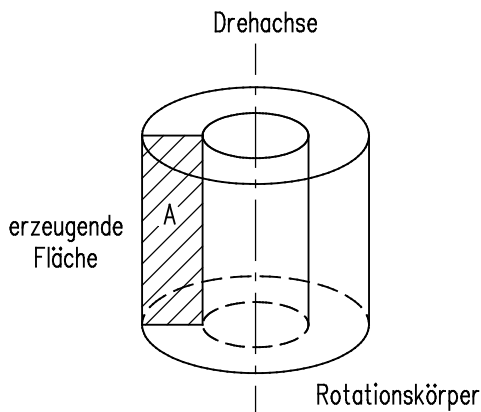


Abbildung 127 Durch ein Rechteck erzeugter Rotationskörper

Zur Berechnung der Mantelfläche und des Volumens werden hier die beiden Guldin'schen Regeln herangezogen, die hier nicht bewiesen werden, jedoch durch einige praktische Zahlenbeispiele bestätigt werden sollen.

Mantelfläche

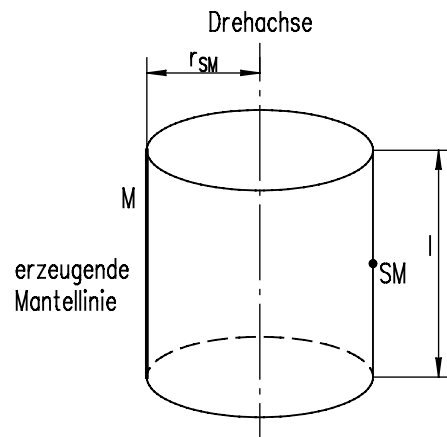


Abbildung 128 Mantelfläche

- Erste Guldinsche Regel

Die Mantelfläche A_M eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge l der erzeugenden Mantellinie und der Länge $2 \cdot \pi \cdot r_{SM}$ des Schwerpunktes SM der rotierenden Linie bei einer Umdrehung um die Drehachse.

$$A_M = l \cdot \underbrace{2 \cdot \pi \cdot r_{SM}}_{L \text{ Bahnlänge des Schwerpunktes}}$$

mit l : Länge der erzeugenden Mantellinie

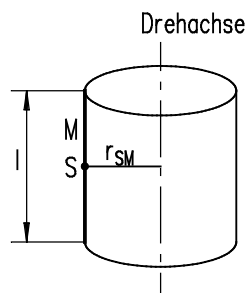
r_{SM} : Abstand des Schwerpunktes der erzeugenden Mantellinie M von der Drehachse

Lehrbeispiel 1

Bestätigen Sie die Formeln für Mantelfläche von Zylinder und Kegel durch die erste Guldinsche Regel!

Lösung

Zylinder:



Nach der Guldinschen Regel gilt:

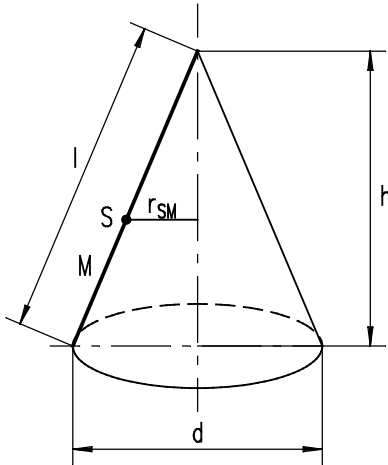
$$A_M = l \cdot 2\pi \cdot r_{SM}$$

Nach der Formel für die Mantelfläche eines Zylinders gilt:

$$A_M = 2\pi \cdot r \cdot h$$

↓ ↓

$$A_M = 2\pi \cdot r_{SM} \cdot l$$



Nach der Guldinschen Regel gilt:

$$\begin{aligned} A_M &= l \cdot 2\pi \cdot r_{SM} & \left| \begin{array}{l} l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \\ r_{SM} = \frac{1}{4} \cdot d \text{ (aus Symmetriegründen)} \end{array} \right. \\ &= \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot 2\pi \cdot r_{SM} \\ &= \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot \frac{\pi d}{2} \end{aligned}$$

Das ist die Formel für die Mantelfläche eines Kegels.

Volumen

- Zweite Guldinsche Regel

Das Volumen V eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt A der erzeugenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes SM der rotierenden Fläche bei einer Umdrehung um die Drehachse.

$$V = A \cdot \underbrace{2\pi r_{SA}}_{L \text{ Bahnlänge des Schwerpunktes}}$$

mit A: Flächeninhalt der erzeugenden Fläche

r_{SA} : Abstand des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche A von der Drehachse

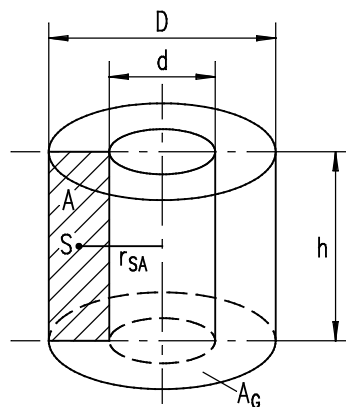
Lehrbeispiel 2

Ein Kreisringkörper hat folgende Maße: $D = 200 \text{ mm}$; $d = 140 \text{ mm}$; $h = 25 \text{ mm}$.

Berechnen Sie das Volumen auf zwei Arten:

- 2.1 Als prismatischen Körper mit kreisringförmiger Grundfläche (Hohlzylinder)
- 2.2 Mit der zweiten Guldinschen Regel

Lösung



Lehrbeispiel 2.1

Als prismatischer Körper

$$\begin{aligned}
 V &= A_G \cdot h & | \quad A_G &= \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \text{ (Kreisring)} \\
 &= \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot h \\
 &= \frac{\pi}{4} (200^2 \text{ mm}^2 - 140^2 \text{ mm}^2) \cdot 25 \text{ mm} \\
 &= 400553 \text{ mm}^3 \approx 401 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 2.2

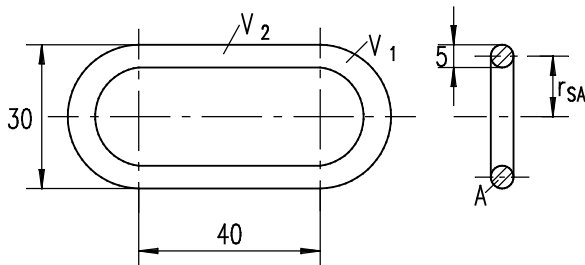
Nach der Guldinschen Regel

$$\begin{aligned}
 V &= A \cdot 2\pi r_{SA} & | \quad A &= \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \cdot h \\
 &= \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \cdot h \cdot 2\pi \cdot r_{SA} & | \quad r_{SA} &= \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \cdot h \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{d}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \right] \\
 &= \left(\frac{200 \text{ mm}}{2} - \frac{140 \text{ mm}}{2} \right) \cdot 25 \text{ mm} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{140 \text{ mm}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{200 \text{ mm}}{2} - \frac{140 \text{ mm}}{2} \right) \right] \\
 &= 4,00553 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 \approx 401 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 3

Das Glied einer Kette hat die Abmessungen gemäß der folgenden Skizze.

Berechnen Sie sein Volumen!

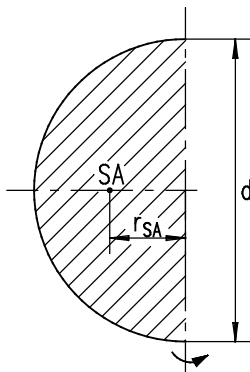
**Lösung**

Geg.: $D = 30 \text{ mm}$; $d = 5 \text{ mm}$; $l = 40 \text{ mm}$

Das Volumen setzt sich aus 2 halben Kreisingkörpern und 2 Zylindern zusammen.

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \cdot V_1 + 2 \cdot V_2 & | \quad 2V_1 &= A \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{SA} \\
 &= A \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{SA} + 2V_2 & | \quad A &= \frac{\pi}{4} d^2 \quad r_{SA} = \frac{D}{2} - \frac{d}{2} \quad V_2 = A \cdot l = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot l \\
 &= \frac{\pi}{4} d^2 2 \pi \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) + 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 l \\
 &= \frac{\pi^2 \cdot 5^2}{2} \text{ mm}^2 \left(\frac{30 \text{ mm}}{2} - \frac{5 \text{ mm}}{2} \right) + \frac{\pi}{2} 5^2 \text{ mm}^2 40 \text{ mm} \\
 &= 3112,92 \text{ mm}^3 \approx 3,11 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Antwort: Das Volumen des Kettengliedes beträgt $3,11 \text{ cm}^3$.

Lehrbeispiel 4

Ermitteln Sie mithilfe der zweiten Guldin'schen Regel den Abstand des Schwerpunktes eines Halbkreises mit Durchmesser d vom Kreismittelpunkt!

Lösung

Das Kugelvolumen kann auf zwei Arten berechnet werden:

Volumenformel

$$V = \frac{\pi}{6} d^3$$

Guldinsche Regel

$$V = A \cdot 2\pi r_{SA} \quad \left| A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \right.$$

$$= \frac{\pi}{8} d^2 2\pi \cdot r_{SA} = \frac{\pi^2}{4} d^2 \cdot r_{SA}$$

Durch Gleichsetzen und Umstellen nach r_{SA} erhält man:

$$\frac{\pi}{6} d^3 = \frac{\pi^2}{4} d^2 \cdot r_{SA} \quad \left| : \left(\frac{\pi^2}{4} d^2 \right) \right.$$

$$r_{SA} = \frac{2}{3\pi} d$$

Antwort: Der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse beträgt $\frac{2}{3\pi} d$.

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Rauminhalt, die Mantelfläche und die Oberfläche eines senkrechten Kegelstumpfes mit der Höhe 60 cm, dem Grundkreisradius 45 cm und dem Deckkreisradius 20 cm!

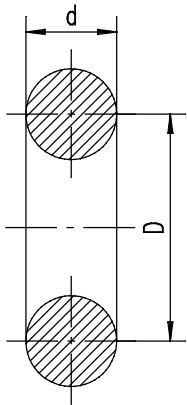
Aufgabe 2

Wieviel Kugeln mit $d = 1 \text{ mm}$ können aus 1 kg Stahl ($\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$) hergestellt werden?

Aufgabe 3

Eine Kugel hat (gemessen durch Wasserverdrängung) ein Volumen von 8380 cm^3 .

Berechnen Sie die Oberfläche!

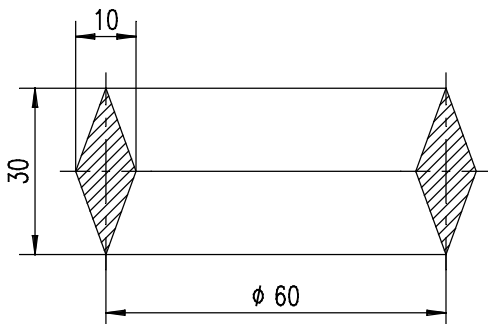
Aufgabe 4

Ein Ring hat die Maße $D = 80 \text{ mm}$, $d = 15 \text{ mm}$.

Berechnen Sie nach Guldin das Volumen!

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Volumen der Dichtung!

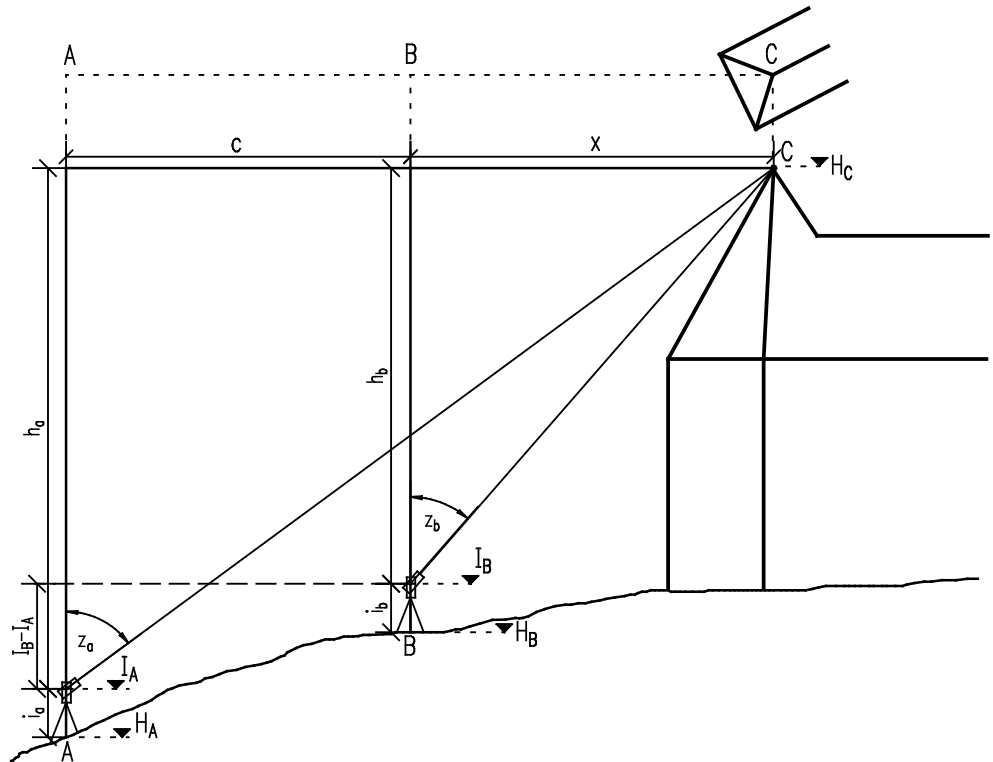
**Aufgaben**

**Realisierung
Komplexaufgabe
„Trigonometrische
Höhenbestimmung“**

Trigonometrische Höhenbestimmung

Eine Gemeinde möchte in einem Werbeprospekt für Besucher die genaue Höhe ihres historischen Kirchturms angeben. Da die Dachspitze nicht direkt zugänglich ist und der zu bestimmende Höhenpunkt nur von einer Richtung aus sichtbar ist, kann nur eine trigonometrische Höhenbestimmung mithilfe von Winkelmessungen durchgeführt werden.

Entwickeln Sie ein Verfahren zur Berechnung der Höhe über NN des Kirchturms!

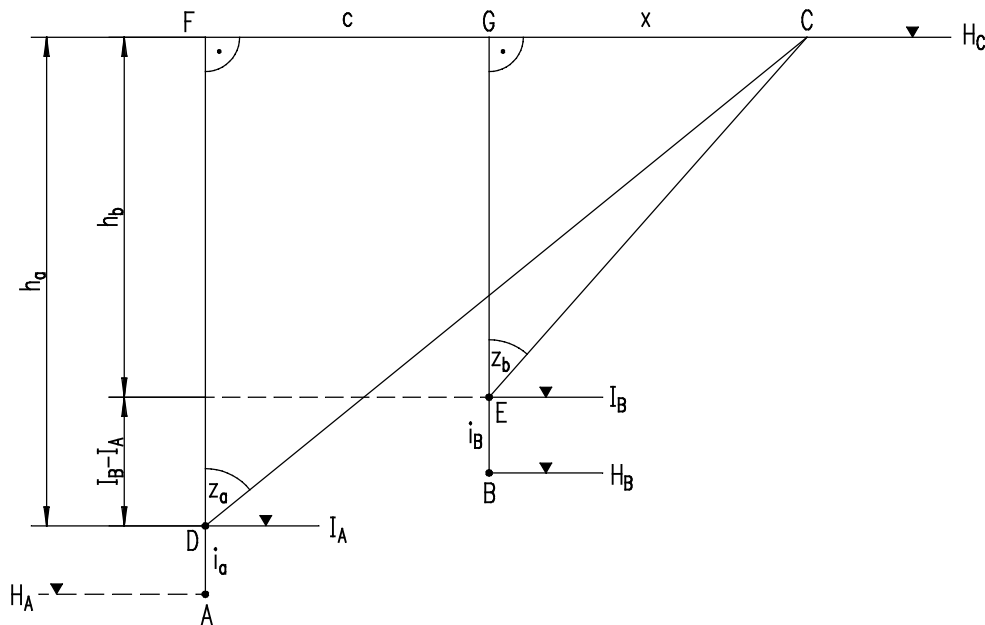


Bezeichnungen

- H_A , H_B und H_C sind die NN-Höhen der Punkte A, B und C.
- i_a und i_b sind die Abstände des Fernrohres der Theodoliten von A bzw. B, also die Höhen der Instrumente
- I_A bzw. I_B sind die NN-Höhen der Fernrohre der Theodoliten
- c ist der horizontale Abstand der beiden Theodoliten
- x ist der horizontale Abstand von B und C

Einschränkungen

- Unter der Höhe des Kirchturmes ist die NN-Höhe gemeint, nicht die Bauhöhe. Gesucht wird also H_C .
- Auf Grund der Geländelage können gemessen werden:
 - die NN-Höhen H_A und H_B
 - die Instrumentenhöhen i_a und i_b
 - der horizontale Abstand c der beiden Theodoliten
 - die Winkel z_a und z_b

Skizze

Entwickeln Sie ein Verfahren zur Berechnung der Höhe über NN des Kirchturms!

Lösungen
Lösungsanhang
1 Planimetrie
Aufgabe 1.1

$$\alpha = \gamma; \beta = \delta; \alpha' = \gamma'; \beta' = \delta'$$

Aufgabe 1.2

$$\alpha \text{ und } \beta \text{ oder } \alpha \text{ und } \delta$$

Aufgabe 1.3

$$\begin{aligned}\alpha' &= \underline{35^\circ} \text{ (Stufenwinkel zu } \alpha) \\ \gamma' &= \underline{35^\circ} \text{ (Scheitelwinkel zu } \alpha) \\ \beta' &= 180^\circ - 35^\circ = \underline{145^\circ} \text{ (Nebenwinkel zu } \alpha') \\ \delta' &= \underline{145^\circ} \text{ (Scheitelwinkel zu } \beta')\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{36^\circ 52'}{2} = \frac{36^\circ}{2} + \frac{52'}{2} = \underline{18^\circ 26'}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \underline{18^\circ 26'} \text{ (Wechselwinkel an parallelen Geraden)}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= 90^\circ - \beta \text{ (Komplementwinkel)} \\ &= 90^\circ - 18^\circ 26' = \underline{71^\circ 34'}\end{aligned}$$

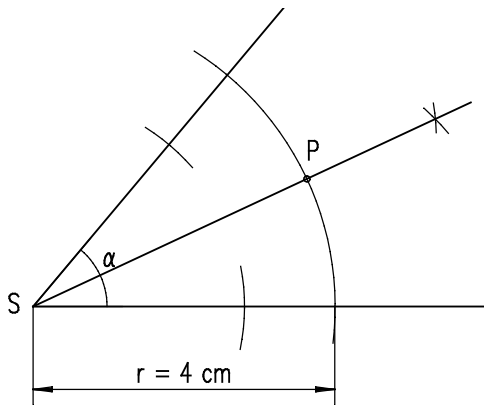
Aufgabe 3

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ - 115^\circ = \underline{65^\circ} \text{ (Nachbarwinkel)} \\ \gamma' &= \gamma - 30^\circ = 65^\circ - 30^\circ = 35^\circ \\ \alpha &= \gamma' = \underline{35^\circ} \text{ (Wechselwinkel)} \\ \delta &= 180^\circ - 120^\circ = \underline{60^\circ} \text{ (Nachbarwinkel)} \\ \delta' &= \delta - 25^\circ = 60^\circ - 25^\circ = 35^\circ \\ \beta' &= \delta' = 35^\circ \text{ (Wechselwinkel)} \\ \beta &= 115^\circ - \beta' = 115^\circ - 35^\circ = \underline{80^\circ}\end{aligned}$$

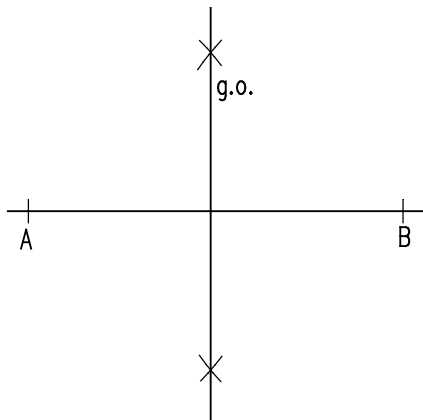
Aufgabe 4

Gezeichnet wird zuerst der Winkel α , danach um den Scheitel S ein Kreis mit $r = 4$ cm. Dann wird die Winkelhalbierende konstruiert.

1. Geometrischer Ort für P ist der Kreis um S mit dem Radius $r = 4$ cm.
2. Geometrischer Ort für den Punkt P ist die Winkelhalbierende des Winkels α .

**Aufgabe 5**

1. A und B werden verbunden und auf der Strecke \overline{AB} wird die Mittelsenkrechte errichtet.
2. Geometrischer Ort für alle Punkte ist die Mittelsenkrechte auf \overline{AB} .

**Aufgabe 6**

Zu beiden Bordsteinkanten wird je eine Parallele nach innen im Abstand von 4,5 m (bei 1 : 200 \Rightarrow 4,5 m $\hat{=}$ 22,5 mm) gezogen; Schnittpunkt der Parallelen ist der Mittelpunkt M. Die Punkte A und B erhält man durch Fällen der Lote vom Mittelpunkt M auf die Bordsteinkanten.

Aufgabe 7

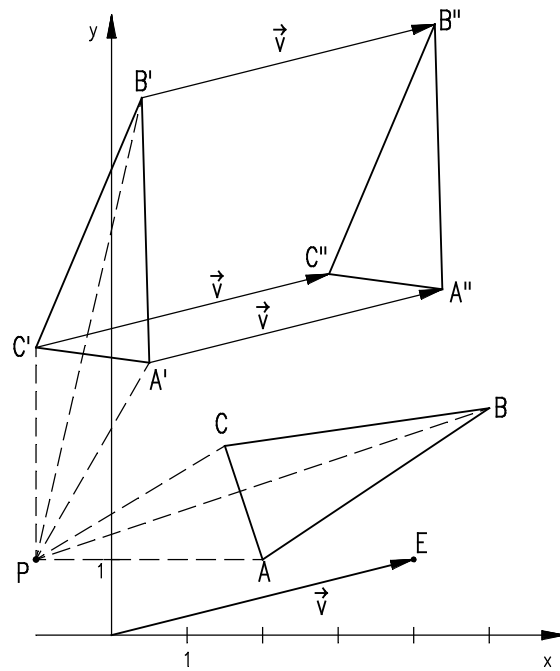
Die Strecke wird halbiert und die Hälften nochmals. (Grundkonstruktion!)

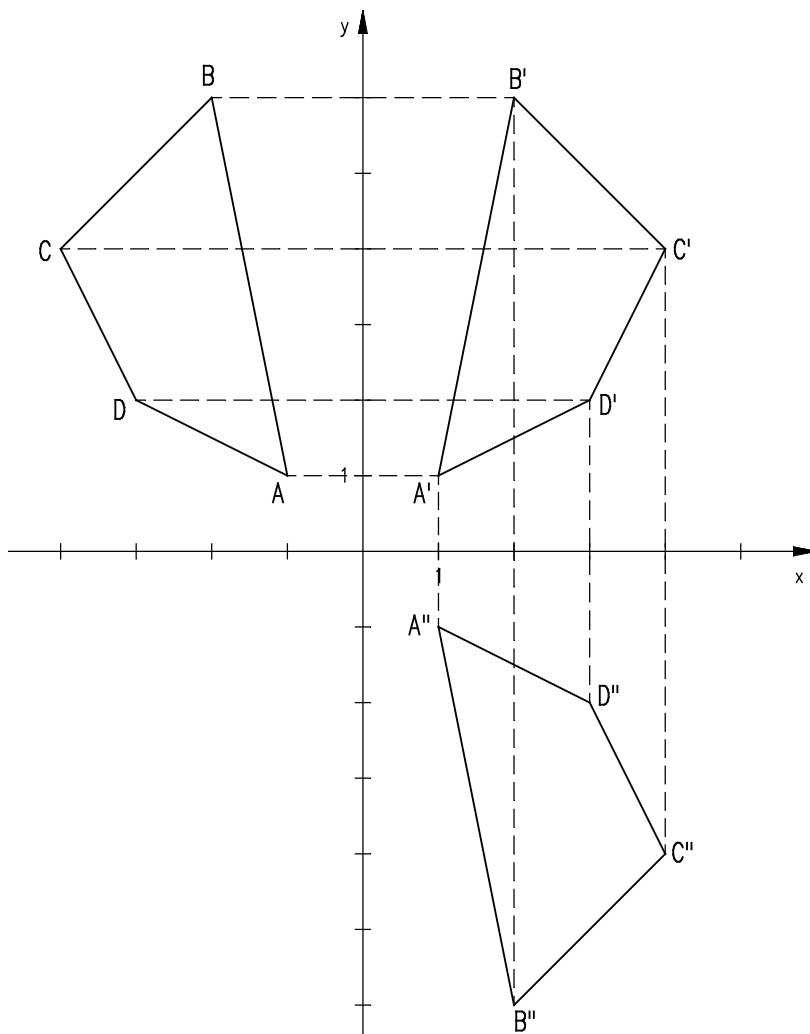
Aufgabe 8

Die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Geraden ist das Lot vom Punkt auf die Gerade (Grundkonstruktion!)

$$a = \underline{\underline{33,5 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 9



Aufgabe 10

$A'(1;1)$, $B'(2;6)$, $C'(4;4)$ und $D'(3;2)$

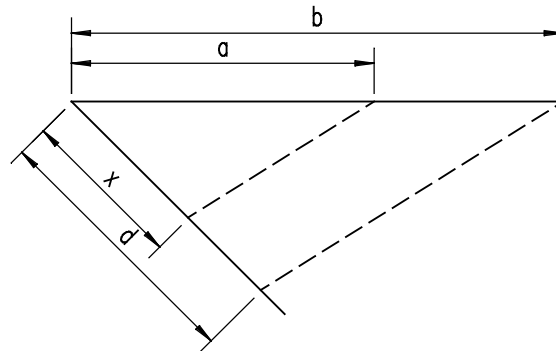
Die Vorzeichen der x-Koordinaten ändern sich.

$A''(1;-1)$, $B''(2;-6)$, $C''(4;-4)$ und $D''(-3;2)$

Die Vorzeichen der y-Koordinaten ändern sich.

Die gesamte Abbildung kann auch durch eine Drehung um 180° ersetzt werden (Punktspiegelung).

Aufgabe 11



Berechnung:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{d} \quad | \cdot d$$

$$\frac{a \cdot d}{b} = x$$

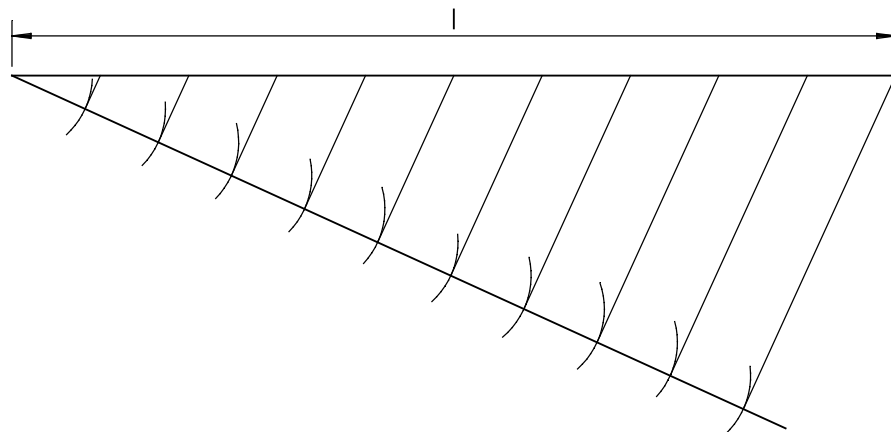
$$x = \frac{4 \text{ cm} \cdot 3,5 \text{ cm}}{6,5 \text{ cm}} = \underline{\underline{2,15 \text{ cm}}}$$

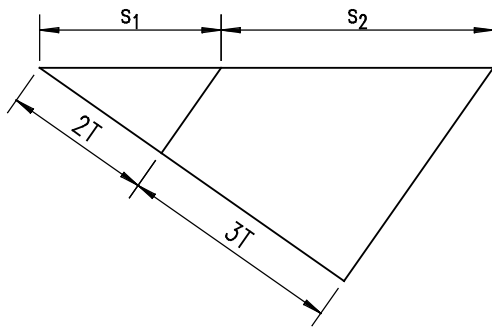
(Errechneter und konstruierter x-Wert stimmen überein!)

Aufgabe 12

Die Strecke wird in 10 gleiche Teile geteilt (maßgebend sind immer die Anzahl der Abstände). Lösung mit Strahlensatz (Teilen einer Strecke in gleiche Teile).

$$s = \underline{\underline{11,7 \text{ mm}}}$$



Aufgabe 13

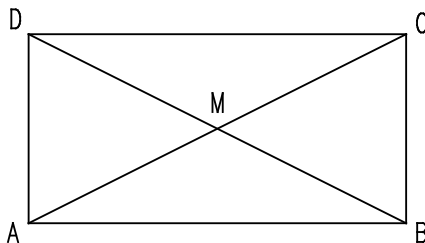
(Maßstab 1 : 2)

(T ist beliebig!) $s_1 = \underline{4,8 \text{ cm}}$; $s_2 = \underline{7,2 \text{ cm}}$ **Aufgabe 14**

Gezeichnet wird ein Kegelstumpf mit $D = 220$, $d = 100$ und $h = 260$. Die Höhe ($h = 260$) wird in 3 gleiche Teile geteilt (Teilen einer Strecke in 3 gleiche Teile!). Zum Schluss wird die 220er Scheibe unten angelegt!

 $d_2 = \underline{140 \text{ mm}}$; $d_3 = \underline{180 \text{ mm}}$ **Aufgabe 15**

1. Zeichnen des Rechtecks ABCD!



$\triangle ABC \cong \triangle ACD$ SSS oder SWS
 $\triangle ABM \cong \triangle CDM$ SSS
 $\triangle BCM \cong \triangle DAM$

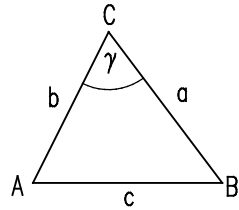
Aufgabe 16

$\alpha = \beta = \gamma$ heißt: gleichseitiges Dreieck, $60^\circ = \alpha = \beta = \gamma$.

Gezeichnet wird die Strecke $h_c = 3 \text{ cm}$ mit den Endpunkten C und D. An [CD] wird in C der Winkel $\gamma' = 30^\circ$ abgetragen ($\gamma/2$). Senkrecht zu h_c durch D wird der Schnittpunkt mit dem Schenkel von γ' gebildet. Gleichmaßen zur anderen Seite ergibt $\triangle ABC$.

Aufgabe 17

Planfigur:

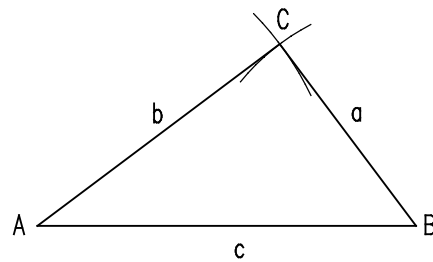


Plantext:

Gezeichnet wird $[AB] = c$

C liegt 1. auf $k(A, b)$
2. auf $k(B, a)$

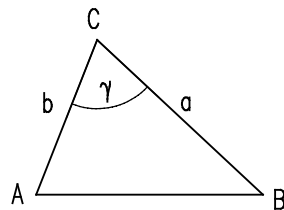
Konstruktionsfigur:



Kontrolle: $\gamma = 90^\circ$

Aufgabe 18

Planfigur:

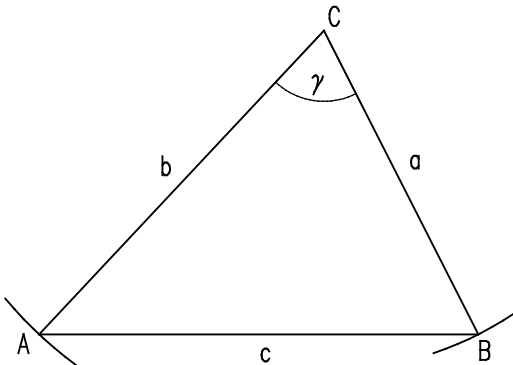


Plantext:

Gezeichnet wird $[AC] = b$

B liegt 1. auf $k(C, a)$
2. auf dem freien Schenkel des Winkels γ .

Konstruktionsfigur:



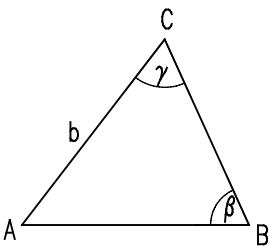
Kontrolle: $c = 5,8 \text{ cm}$

Konstruktionstext:

Gezeichnet wird die Strecke $b = 5,5 \text{ cm}$ mit den Endpunkten C und A. An [AC] in C wird der Winkel $\gamma = 70^\circ$ angetragen. Um C wird ein Kreis mit dem Radius $a = 4,5 \text{ cm}$ geschlagen. Er schneidet den freien Schenkel des Winkels γ in B.

Aufgabe 19

Planfigur:

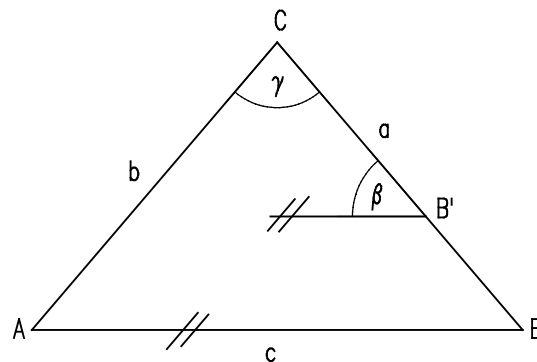


Plantext:

Gezeichnet wird $[AC] = b$

- B liegt
1. auf dem freien Schenkel des Winkels γ .
 2. auf einer Parallelen durch A zum freien Schenkel des Winkels β . (β wird in B' an den freien Schenkel von γ angetragen!)

Konstruktionsfigur:

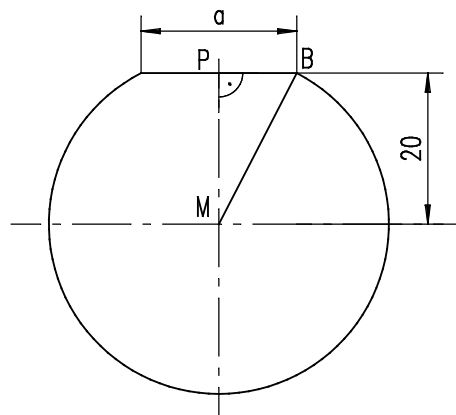


Kontrolle: $a = 5 \text{ cm}$

Aufgabe 20

1. Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck MBP mit der Hypotenuse

$\overline{MB} = \frac{45}{2} \text{ mm} = 22,5 \text{ mm}$ und den Katheten $\overline{MP} = 20 \text{ mm}$ und $\overline{PB} = \frac{a}{2}$, so gilt

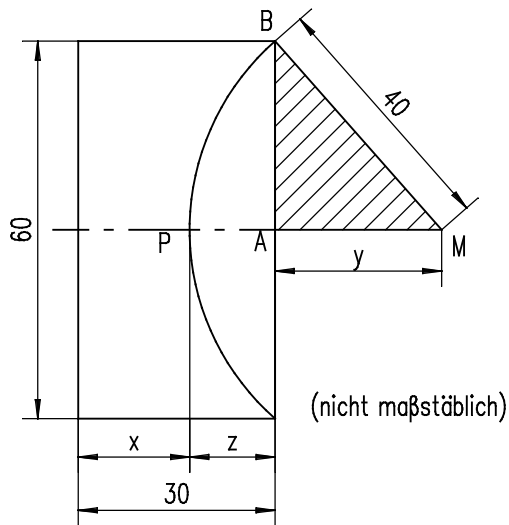


nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = (22,5 \text{ mm})^2 - (20 \text{ mm})^2$$

$$\frac{a}{2} = \sqrt{506,25 \text{ mm}^2 - 400 \text{ mm}^2}$$

$$a = 2 \cdot \sqrt{106,25 \text{ mm}} = 2 \cdot 10,3 \text{ mm} = \underline{\underline{20,6 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 21

Im rechtwinkligen Dreieck AMB gilt nach dem Satz von Pythagoras:

$$(40 \text{ mm})^2 = (30 \text{ mm})^2 + y^2$$

$$y = \sqrt{1600 \text{ mm}^2 - 900 \text{ mm}^2} = \sqrt{700 \text{ mm}^2} = \underline{\underline{26,46 \text{ mm}}}$$

$$z = \overline{PM} - \overline{AM} = 40 \text{ mm} - 26,46 \text{ mm} = \underline{\underline{13,54 \text{ mm}}}$$

$$x = 30 \text{ mm} - 13,54 \text{ mm} = \underline{\underline{16,46 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 22

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $\overline{M_1P} = 15 \text{ mm}$ und $\overline{PM_2} = 9 \text{ mm}$ und mit der Hypotenuse $\overline{M_1M_2} = \overline{M_1A} + \overline{AB} + \overline{BM_2} = \frac{10}{2} \text{ mm} + s + \frac{18}{2} \text{ mm}$ gilt nach dem Satz des Pythagoras:

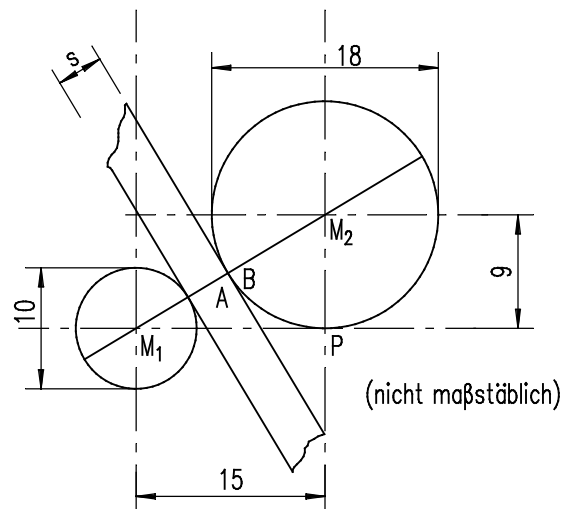
$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1P}^2 + \overline{PM_2}^2$$

$$(5 \text{ mm} + s + 9 \text{ mm})^2 = (15 \text{ mm})^2 + (9 \text{ mm})^2$$

$$(14 \text{ mm} + s)^2 = 225 \text{ mm}^2 + 81 \text{ mm}^2$$

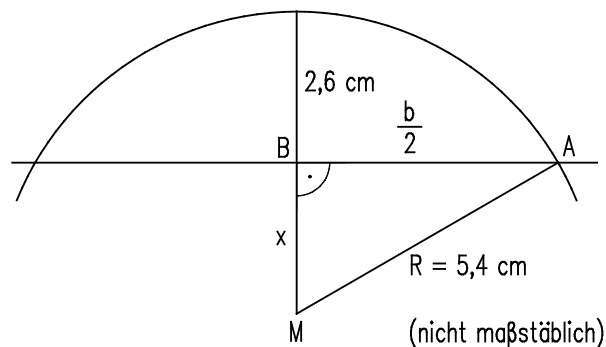
$$14 \text{ mm} + s = \sqrt{306 \text{ mm}^2}$$

$$s = 17,5 \text{ mm} - 14 \text{ mm} = \underline{\underline{3,5 \text{ mm}}}$$



Aufgabe 23

Gezeichnet wird ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $R = 5,4 \text{ cm}$ und den Katheten $b/2$ und $x = 5,4 \text{ cm} - 2,6 \text{ cm} = 2,8 \text{ cm}$.



Im rechtwinkligen Dreieck MAB gilt:

$$R^2 = x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\frac{b}{2} = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$b = 2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} = 2 \cdot \sqrt{(54 \text{ mm})^2 - (28 \text{ mm})^2} = \underline{92,3 \text{ mm}}$$

Aufgabe 24

Verbindet man die Mittelpunkte M_1 und M_2 , so erhält man das rechtwinklige Dreieck M_1AM_2 .

$$\text{Hypotenuse: } \overline{M_1M_2} = \frac{26}{2} \text{ mm} + 2 \text{ mm} + \frac{d}{2} = 15 \text{ mm} + \frac{d}{2}$$

$$\text{Kathete: } \overline{M_1A} = 52 \text{ mm} - 2 \text{ mm} - \frac{26}{2} \text{ mm} - \frac{d}{2} - 2 \text{ mm} = 35 \text{ mm} - \frac{d}{2}$$

$$\text{Kathete: } \overline{AM_2} = 20 \text{ mm}$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1A}^2 + \overline{AM_2}^2$$

$$\left(15 \text{ mm} + \frac{d}{2}\right)^2 = \left(35 \text{ mm} - \frac{d}{2}\right)^2 + (20 \text{ mm})^2$$

$$225 \text{ mm}^2 + 15 d \text{ mm} + \frac{d^2}{4} = 400 \text{ mm}^2 + 1225 \text{ mm}^2 - 35 d \text{ mm} + \frac{d^2}{4}$$

$$50 d \text{ mm} = 1400 \text{ mm}^2$$

$$d = \frac{1400 \text{ mm}^2}{50 \text{ mm}} = \underline{\underline{28 \text{ mm}}}$$

$$h = 2 \text{ mm} + 13 \text{ mm} + 20 \text{ mm} + 14 \text{ mm} + 2 \text{ mm} = \underline{\underline{51 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 25

$$\varphi = \frac{114^\circ}{2} = 57^\circ$$

Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über demselben Bogen.

$$\tau = \varphi = 57^\circ$$

Der Sehnenwinkel ist genauso groß wie der Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Kreisabschnitt.

Aufgabe 26

Begonnen wird mit den Mittellinien, dann werden die Radien gezeichnet.

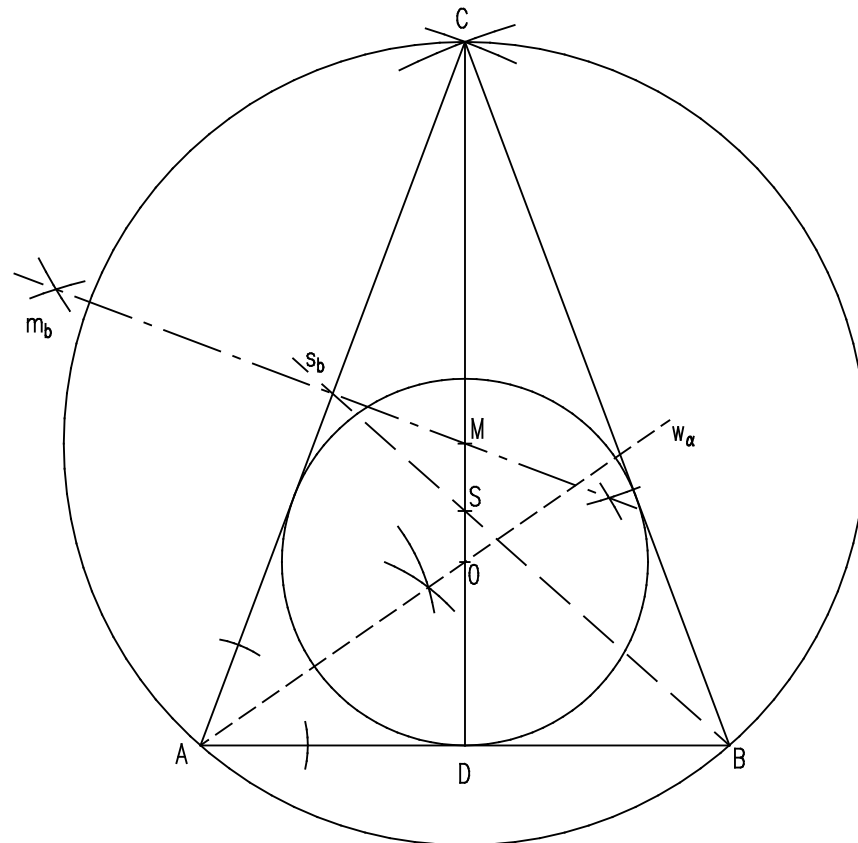
$$a = \underline{\underline{27 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 27

$$t_1 = \underline{\underline{492 \text{ mm}}}, t_2 = \underline{\underline{454 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 28

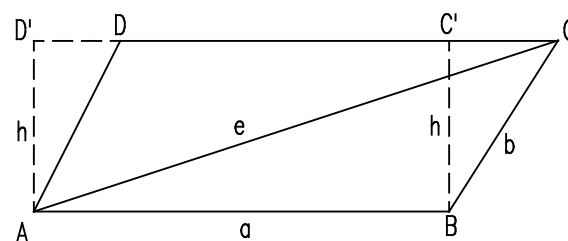
CD ist Mittelsenkrechte (m_c), Winkelhalbierende (w_γ) und Seitenhalbierende (s_c) (und Höhe h_c)!



Aufgabe 29

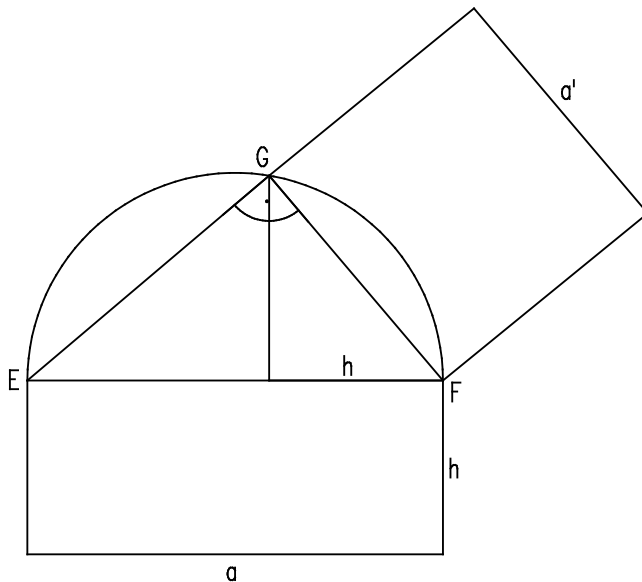
- Raute und Rechteck gehören zu den Parallelogrammen
- Gegenüberliegende Seiten sind gleich groß
- Gegenüberliegende Seiten sind parallel
- Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß
- Die Diagonalen halbieren sich
- Die Winkelsumme beträgt 360°

Aufgabe 30



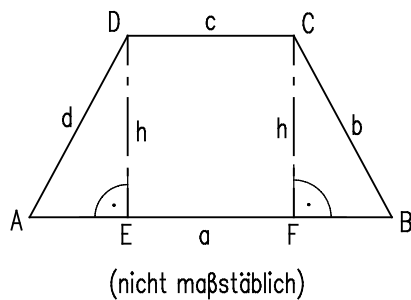
Das Rechteck $ABC'D'$ erhält man durch Scherung.

Konstruiert wird nun ein rechtwinkliges Dreieck EFG, dessen Hypotenuse die Länge $a = 5,5 \text{ cm}$ hat und dessen einer Hypotenusenabschnitt so groß ist wie die zweite Rechteckseite $\overline{AD'} = h$. Nach dem Kathetensatz ist die Kathete \overline{FG} gleich der gesuchten Quadratseite a' .



$$a' \approx \underline{3,5 \text{ cm}^2}; A = \underline{12,25 \text{ cm}^2}$$

Aufgabe 31



Geg.: $a = 13 \text{ cm}$; $b = d = 5 \text{ cm}$; $c = 7 \text{ cm}$
 Ges.: A

Lösung

Da das Trapez gleichschenkelig ist, gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= \overline{FB} \\ \Rightarrow AE &= \frac{1}{2} \cdot (a - c) = \frac{1}{2} (13 \text{ cm} - 7 \text{ cm}) = 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

Im rechtwinkligen Dreieck AED gilt:

$$h^2 = d^2 - \overline{AE}^2$$

$$h = \sqrt{(5 \text{ cm})^2 - (3 \text{ cm})^2} = \underline{\underline{4 \text{ cm}}}$$

Für die Mittelparallele m gilt:

$$m = \frac{a + c}{2} = \frac{13 \text{ cm} + 7 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$A = m \cdot h = 10 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = \underline{\underline{40 \text{ cm}^2}}$$

Aufgabe 32.1

ja, $\alpha + \gamma = 180^\circ$; $\beta + \delta = 180^\circ$

Aufgabe 32.2

nein, $\alpha + \gamma = 160^\circ$; $\beta + \delta = 200^\circ$

Aufgabe 32.3

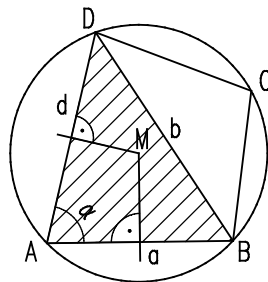
ja, $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$

Aufgabe 32.4

ja, $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$

Aufgabe 33

Planfigur:



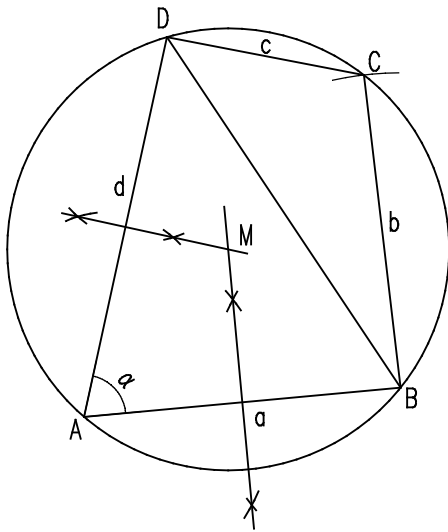
Plantext:

Teildreieck ABD ist konstruierbar aus a, α , d.

- M liegt
1. auf der Mittelsenkrechten von [AB]
 2. auf der Mittelsenkrechten von [AD].

- C liegt
1. auf k (M, $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD}$)
 2. auf k (B, b).

Konstruktionsfigur:



(Zeichnung nicht maßstäblich!)

Aufgabe 34.1

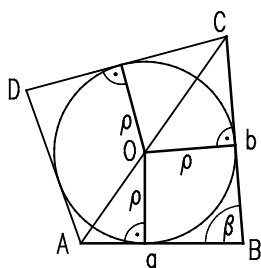
ja $a + c = b + d = 10 \text{ cm}$

Aufgabe 34.2

nein $a + c = 10 \text{ cm}$; $b + d = 12 \text{ cm}$

Aufgabe 35

Planfigur:



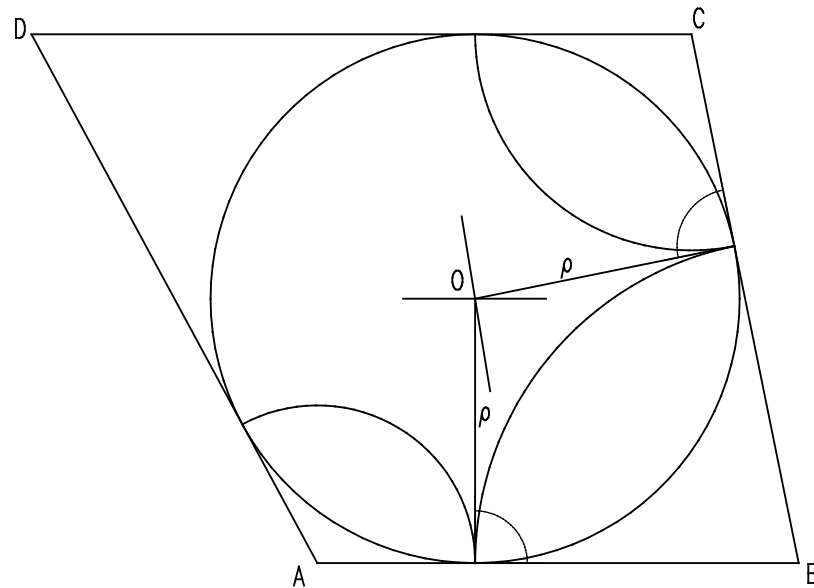
Plantext:

Teildreieck ABC ist konstruierbar aus a, β, b .

- O liegt
1. auf der Parallelen zu AB im Abstand ρ
 2. auf der Parallelen zu BC im Abstand ρ .

- D liegt
1. auf der Tangente von A an den $k(O, \rho)$
 2. auf der Tangente von C an den $k(O, \rho)$.

Konstruktionsfigur:



Aufgabe 36

$$A = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Dreieck}} - A_{\text{Trapez}}$$

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b = 180 \text{ mm} \cdot 80 \text{ mm} \\ = 14400 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{180 \text{ mm} \cdot (130 \text{ mm} - 80 \text{ mm})}{2} \\ = 4500 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{70 \text{ mm} + 110 \text{ mm}}{2} \cdot 50 \text{ mm} \\ = 4500 \text{ mm}^2$$

$$A = 14400 \text{ mm}^2 + 4500 \text{ mm}^2 - 4500 \text{ mm}^2 = 14400 \text{ mm}^2 = 1,44 \text{ dm}^2$$

Antwort: Der Flächeninhalt beträgt 1,44 dm².

Aufgabe 37

$$A = A_1 - A_2 + A_3$$

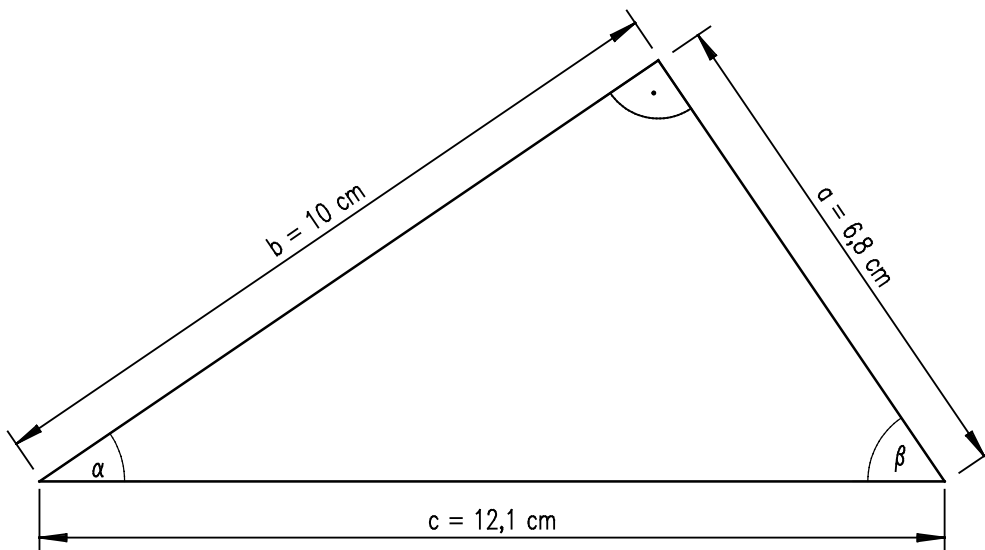
$$A_1 = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{252^2 \text{ mm}^2 \cdot \pi}{8} = 24938 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{132^2 \text{ mm}^2 \cdot \pi}{8} = 6842 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = \frac{a+e}{2} \cdot h = \frac{133 \text{ mm} + 252 \text{ mm}}{2} \cdot 86 \text{ mm} = 16555 \text{ mm}^2$$

$$A = 24938 \text{ mm}^2 - 6842 \text{ mm}^2 + 16555 \text{ mm}^2 = 34651 \text{ mm}^2 \approx 3,47 \text{ dm}^2$$

Antwort: Der Flächeninhalt beträgt $3,47 \text{ dm}^2$.

2 Trigonometrie**Aufgabe 1**

$$\sin \alpha = \frac{6,8 \text{ cm}}{12,1 \text{ cm}} = 0,56$$

$$\cos \alpha = \frac{10 \text{ cm}}{12,1 \text{ cm}} = 0,83$$

$$\tan \beta = \frac{10 \text{ cm}}{6,8 \text{ cm}} = 1,47$$

Aufgabe 2.1

$$\cos 28^\circ 54' = 0,8754645270 \approx 0,875$$

Aufgabe 2.2

$$\sin 45,73^\circ = 0,7160583249 \approx 0,716$$

Aufgabe 2.3

$$\tan 738^\circ = 0,3249196962 \approx 0,325$$

Aufgabe 3.1

$$\cos \alpha = 0,9370 \Rightarrow \alpha = 20,44630111 \approx 20,4^\circ$$

Aufgabe 3.2

$$\sin \alpha = 0,4 \Rightarrow \alpha = 23,57817847 \approx 23,6^\circ$$

Aufgabe 3.3

$$\tan \alpha = 13,6 \Rightarrow \alpha = 85,79464299 \approx 85,8^\circ$$

Aufgabe 4.1

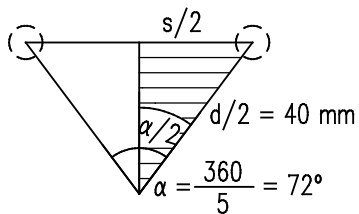
$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{3}{2} \alpha - 17^\circ \right) &= 0,5 & | \text{ INV cos} \\ \frac{3}{2} \alpha - 17^\circ &= 60^\circ & | + 17^\circ \\ \frac{3}{2} \alpha &= 77^\circ & | \cdot \frac{2}{3} \\ \alpha &= 51,33^\circ \approx 51,3^\circ \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= 12 - 3 \tan \alpha & | + 3 \tan \alpha \\ 4 \tan \alpha &= 12 & | : 4 \\ \tan \alpha &= 3 & | \text{ INV tan} \\ \alpha &= 71,565^\circ \approx 71,6^\circ \end{aligned}$$

Aufgabe 4.3

$$\begin{aligned} \sin (\alpha - 30^\circ) &= 0,94 & | \text{ INV sin} \\ \alpha - 30^\circ &= 70,052^\circ & | + 30^\circ \\ \alpha &= 100,052^\circ \approx 100^\circ \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Im gekennzeichneten Dreieck gilt:

$$\frac{s/2}{d/2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{s}{d} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$s = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot d$$

$$= \sin(36^\circ) \cdot 80 \text{ mm}$$

$$= 47,02 \text{ mm}$$

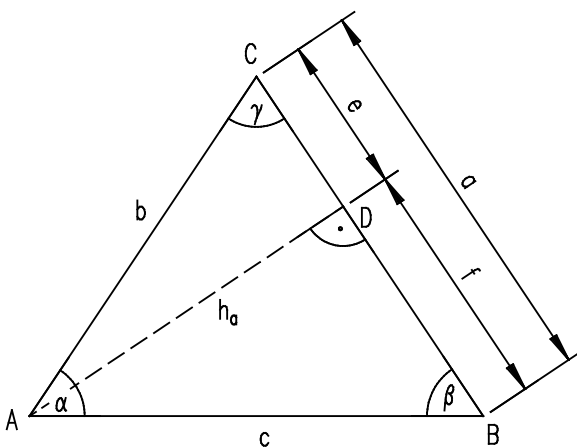
Antwort: Der Lochabstand beträgt 47 mm.

Aufgabe 6

Geg.: $h_a = 2,53 \text{ m}$; $b = 3,4 \text{ m}$; $\beta = 59,35^\circ$

Ges.: a ; c ; α ; γ ; A

Planfigur:



Im rechtwinkligen $\triangle CAD$ gilt:

$$\sin \gamma = \frac{h_a}{b}$$

$$\sin \gamma = \frac{2,53 \text{ m}}{3,4 \text{ m}}$$

$$\gamma = 48,0834^\circ = \underline{\underline{48,08^\circ}}$$

$$e = \sqrt{b^2 - h_a^2} \quad (\text{Satz des Pythagoras!})$$

$$e = \sqrt{3,4^2 - 2,53^2} \text{ m} = \underline{\underline{2,2714 \text{ m}}}$$

Im rechtwinkligen $\triangle ABD$ gilt:

$$\sin \beta = \frac{h_a}{c} \quad | \cdot \frac{c}{\sin \beta}$$

$$c = \frac{h_a}{\sin \beta}$$

$$c = \frac{2,53 \text{ m}}{\sin 59,35^\circ} = 2,9408 \text{ m} = \underline{\underline{2,94 \text{ m}}}$$

$$\tan \beta = \frac{h_a}{f} \quad | \cdot \frac{f}{\tan \beta}$$

$$f = \frac{h_a}{\tan \beta}$$

$$f = \frac{2,53 \text{ m}}{\tan 59,35^\circ} = \underline{\underline{1,4992 \text{ m}}}$$

$$a = e + f = 2,2714 \text{ m} + 1,4992 \text{ m} = 3,7706 \text{ m}$$

$$a = \underline{\underline{3,77 \text{ m}}}$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \quad (\text{Winkelsumme im Dreieck!})$$

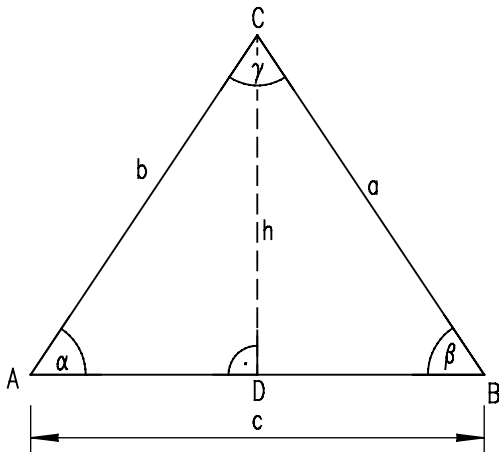
$$\alpha = 180^\circ - 59,35^\circ - 48,08^\circ = \underline{\underline{72,57^\circ}}$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3,7706 \text{ m} \cdot 2,53 \text{ m} = \underline{\underline{4,77 \text{ m}^2}}$$

Aufgabe 7Geg.: $c = 4,25 \text{ m}$; $\gamma = 47,45^\circ$; $a = b$ Ges.: a ; b ; A

Planfigur:



Im rechtwinkligen Teildreieck ADC gilt:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{b} \quad | \cdot b$$

$$b \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} \quad | \cdot \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$b = \frac{c}{2 \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$\underline{\underline{a = b = \frac{4,25 \text{ m}}{2 \cdot \sin 23,725^\circ} = 5,28 \text{ m}}}$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{h} \quad | \cdot \frac{h}{\tan \frac{\gamma}{2}}$$

$$h = \frac{c}{2 \cdot \tan \frac{\gamma}{2}}$$

$$h = \frac{4,25 \text{ m}}{2 \cdot \tan 23,725^\circ} = \underline{\underline{4,8352 \text{ m}}}$$

$$A = \frac{1}{2} c \cdot h$$

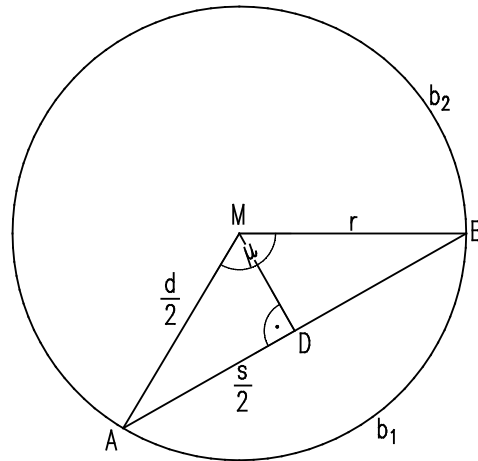
$$A = \frac{1}{2} \cdot 4,25 \text{ m} \cdot 4,8352 \text{ m} = \underline{\underline{10,27 \text{ m}^2}}$$

Aufgabe 8

Geg.: $d = 60 \text{ mm}$; $s = 48 \text{ mm}$

Ges.: b_1 ; b_2

Planfigur:



Im rechtwinkligen $\triangle MAD$ gilt:

$$\sin \frac{\mu}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \sin \frac{\mu}{2} = \frac{s}{d}$$

$$\sin \frac{\mu}{2} = \frac{48 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \Rightarrow \frac{\mu}{2} = 53,13^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\mu = 106,26^\circ}}$$

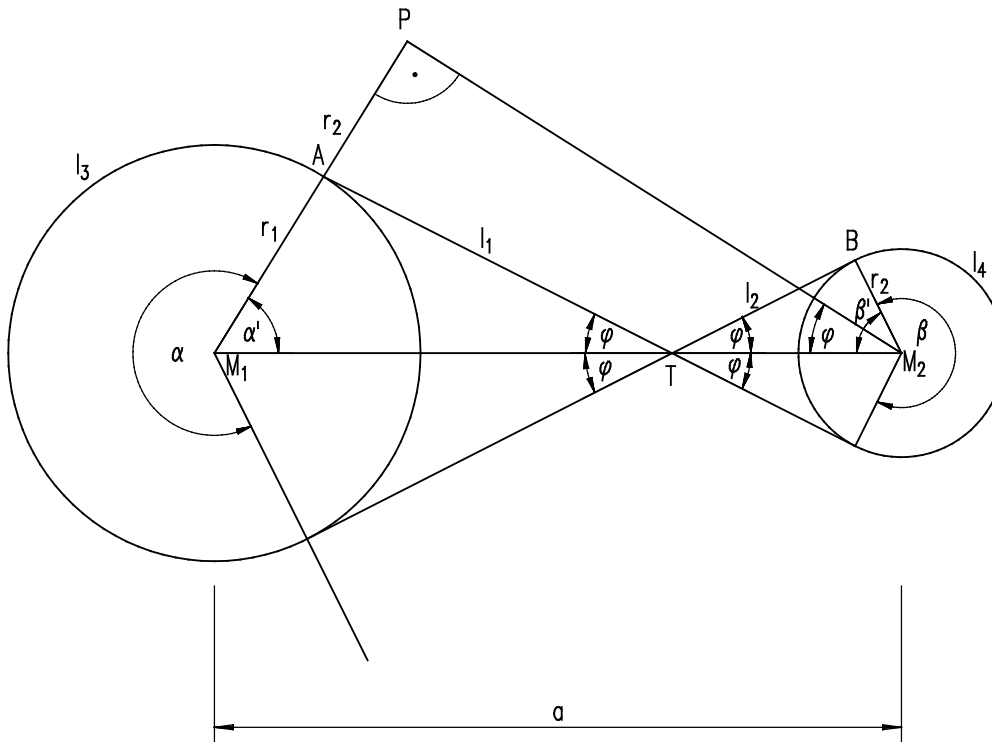
$$b_1 = \frac{\pi \cdot d}{360^\circ} \cdot \mu$$

$$b_1 = \frac{\pi \cdot 60 \text{ mm}}{360^\circ} \cdot 106,26^\circ = \underline{\underline{55,6 \text{ mm}}}$$

$$b_2 = \pi \cdot d - b_1 = \pi \cdot 60 \text{ mm} - 55,6 \text{ mm} = \underline{\underline{133 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 9Geg.: $d_1 = 1200 \text{ mm}$; $d_2 = 750 \text{ mm}$; $a = 1800 \text{ mm}$ Ges.: α ; β ; l

Planfigur:

Im rechtwinkligen $\triangle M_1M_2P$ gilt:

$$\sin \varphi = \frac{r_1 + r_2}{a}$$

$$\sin \varphi = \frac{600 \text{ mm} + 375 \text{ mm}}{1800 \text{ mm}}$$

$$\varphi = \underline{\underline{32,7972^\circ}}$$

$$\alpha' = \beta' = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 32,7972^\circ = 57,2028^\circ$$

$$\alpha = \beta = 360^\circ - 2 \cdot \alpha'$$

$$\alpha = \beta = 360^\circ - 2 \cdot 57,2028^\circ = 245,5944^\circ$$

$$\alpha = \beta = \underline{\underline{245,6^\circ}}$$

Im rechtwinkligen $\triangle M_1TA$ gilt:

$$\tan \varphi = \frac{r_1}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{r_1}{\tan \varphi}$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{600 \text{ mm}}{\tan 32,7972^\circ} = \underline{931,118 \text{ mm}}$$

Im rechtwinkligen $\triangle TM_2B$ gilt:

$$\tan \varphi = \frac{r_2}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{r_2}{\tan \varphi}$$

$$\Rightarrow l_2 = \frac{375 \text{ mm}}{\tan 32,7972^\circ} = \underline{581,949 \text{ mm}}$$

Für die Bogenlänge l_3 bzw. l_4 über den Winkel α bzw. β gilt:

$$l_3 = \frac{\pi \cdot d_1}{360^\circ} \cdot \alpha$$

$$l_3 = \frac{\pi \cdot 1200 \text{ mm}}{360^\circ} \cdot 245,5944^\circ = \underline{2571,859 \text{ mm}}$$

$$l_4 = \frac{\pi \cdot d_2}{360^\circ} \cdot \beta$$

$$l_4 = \frac{\pi \cdot 750 \text{ mm}}{360^\circ} \cdot 245,5944^\circ = \underline{1607,412 \text{ mm}}$$

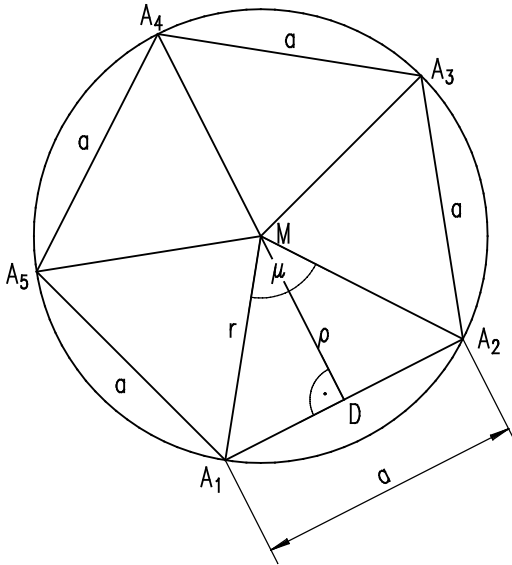
$$l = 2 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2 + l_3 + l_4$$

$$l = (2 \cdot 931,118 + 2 \cdot 581,949 + 2571,859 + 1607,412) \text{ mm}$$

$$\underline{\underline{l = 7205 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 10Geg.: $a = 56,0 \text{ mm}$ Ges.: U ; r ; ρ ; A

Planfigur:



$$U = 5 \cdot a = 5 \cdot 56 \text{ mm} = \underline{\underline{280 \text{ mm}}}$$

Für den Mittelpunktswinkel μ des Bestimmungsdreiecks des regelmäßigen Fünfecks gilt:

$$\mu = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Im rechtwinkligen $\triangle A_1DM$ gilt:

$$\sin \frac{\mu}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{\mu}{2}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{56 \text{ mm}}{2 \cdot \sin 36^\circ} = 47,636 \text{ mm} \approx \underline{\underline{47,6 \text{ mm}}}$$

$$\tan \frac{\mu}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{a}{2 \cdot \tan \frac{\mu}{2}}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{56 \text{ mm}}{2 \cdot \tan 36^\circ} = 38,539 \text{ mm} \approx \underline{\underline{38,5 \text{ mm}}}$$

Die Fläche eines Bestimmungsdreiecks berechnet sich aus der Seite a und der zugehörigen Höhe ρ .

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot p$$

$$A = 5 \cdot A_{\Delta} \Rightarrow A = \frac{5}{2} a \cdot p$$

$$\Rightarrow A = \frac{5}{2} \cdot 56 \text{ mm} \cdot 38,539 \text{ mm} = 5395 \text{ mm}^2$$

Aufgabe 11.1

$$\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = 0,848$$

$$\frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = 0,848$$

$$\sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 0,848$$

$$\cos \alpha = 0,848$$

$$\underline{\underline{\alpha = 32^\circ}}$$

Aufgabe 11.2

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \quad | \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$$

$$\tan \alpha = 2$$

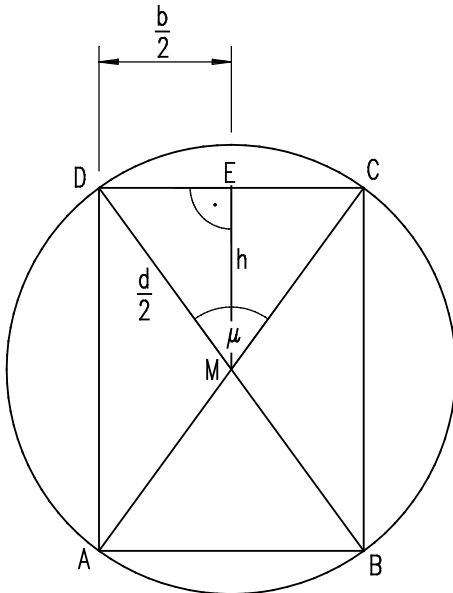
$$\underline{\underline{\alpha = 63,43^\circ}}$$

Aufgabe 12

Geg.: $d = 60 \text{ mm}$; $b = 36 \text{ mm}$; $a = 30 \text{ mm}$; $c = 100 \text{ mm}$

Ges.: V

Planfigur:



Die Fläche der Nut setzt sich aus der Rechteckfläche A_{ABCD} und den beiden Segmentflächen A_S zusammen.

$$(1) \quad A = A_{ABCD} + 2 \cdot A_S$$

Im rechtwinkligen $\triangle DME$ gilt:

$$h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{30^2 - 18^2} \text{ mm} = \underline{\underline{24 \text{ mm}}}$$

$$\sin \frac{\mu}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \sin \frac{\mu}{2} = \frac{b}{d}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\mu}{2} = \frac{36}{60} \Rightarrow \frac{\mu}{2} = 36,87^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu = 73,74^\circ}}$$

$$A_{ABCD} = b \cdot 2h$$

$$\Rightarrow (3) \quad A_{ABCD} = 36 \text{ mm} \cdot 2 \cdot 24 \text{ mm} = \underline{\underline{1728 \text{ mm}^2}}$$

$$A_S = \frac{\pi \cdot r^2}{360^\circ} \cdot \mu - \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

$$A_S = \frac{\pi \cdot 30^2 \text{ mm}^2}{360^\circ} \cdot 73,74^\circ - \frac{1}{2} \cdot 36 \text{ mm} \cdot 24 \text{ mm}$$

$$(4) \quad A_S = 147,15 \text{ mm}^2$$

(3) und (4) in (1):

$$A = 1728 \text{ mm}^2 + 2 \cdot 147,153 \text{ mm}^2 = \underline{2022,306 \text{ mm}^2}$$

Aus der Fläche A und der Höhe a der Nut erhält man für das Volumen V des Abfalls:

$$V = A \cdot a$$

$$V = 2022,306 \text{ mm}^2 \cdot 30 \text{ mm} = 60669,18 \text{ mm}^3$$

Das Volumen des Zylinders beträgt:

$$V_Z = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot c$$

$$V_Z = \pi \cdot \frac{60^2}{4} \cdot 100 \text{ mm}^3 = 282743,34 \text{ mm}^3$$

Prozentualer Anteil:

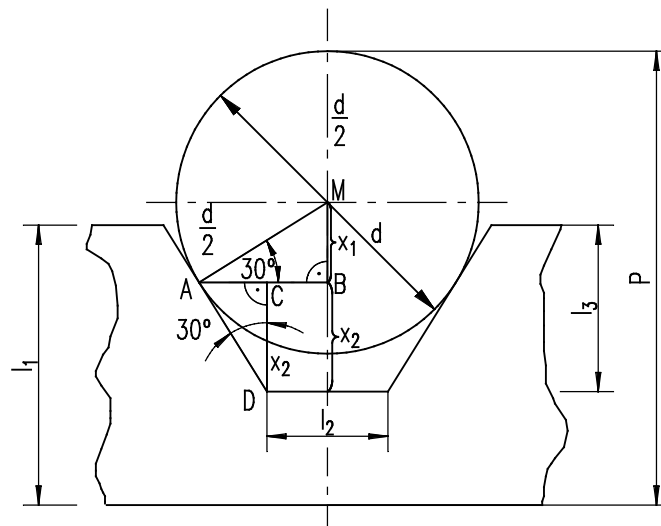
$$\frac{V}{V_Z} = \frac{60669,18}{282743,34} = 0,2146 = \underline{\underline{21,5 \%}}$$

Aufgabe 13

Geg.: $\alpha = 60^\circ$; $l_1 = 50 \text{ mm}$; $l_2 = 30 \text{ mm}$; $l_3 = 30 \text{ mm}$; $d = 70 \text{ mm}$

Ges.: P

Planfigur:



In die gegebene Figur müssen die Hilfsdreiecke ABM und ADC eingezeichnet werden.
 $CD \parallel MB \Rightarrow \angle CDA = 30^\circ$ (halber Winkel der Führung!)

$AM \perp AD$ und $AB \perp CD$ (d.h. die Schenkel zweier Winkel stehen paarweise aufeinander senkrecht)

$$\Rightarrow \angle BAM = 30^\circ$$

Für das Maß P gilt:

$$(1) \quad P = \frac{d}{2} + x_1 + x_2 + (l_1 - l_3)$$

Im rechtwinkligen $\triangle ABM$ gilt:

$$\sin 30^\circ = \frac{x_1}{\frac{d}{2}} \Rightarrow x_1 = \frac{d}{2} \cdot \sin 30^\circ$$

Daraus folgt:

$$(2) \quad x_1 = \frac{d}{4}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{d}{2} \cdot \cos 30^\circ$$

$$\overline{AB} = \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3})$$

$$(3) \quad \overline{AB} = \frac{d}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Im rechtwinkligen $\triangle ADC$ gilt:

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{AB} - \frac{l_2}{2}}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{\overline{AB} - \frac{l_2}{2}}{\tan 30^\circ}$$

$$\text{mit (3)} \quad x_2 = \left(\frac{d}{4} \cdot \sqrt{3} - \frac{l_2}{2} \right) : \left(\frac{1}{3} \sqrt{3} \right) \quad (\tan 30^\circ = \frac{1}{3} \sqrt{3})$$

$$x_2 = \left(\frac{d}{4} \cdot \sqrt{3} - \frac{l_2}{2} \right) \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}; \quad \left(\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \right)$$

$$(4) \quad x_2 = \frac{3}{4} d - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l_2$$

(2) und (4) in (1)

$$P = \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{3}{4}d - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l_2 + l_1 - l_3$$

$$P = \frac{3}{2}d + l_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l_2 - l_3$$

Mit den gegebenen Werten:

$$P = \left(\frac{3}{2} \cdot 70 + 50 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30 - 30 \right) \text{ mm}$$

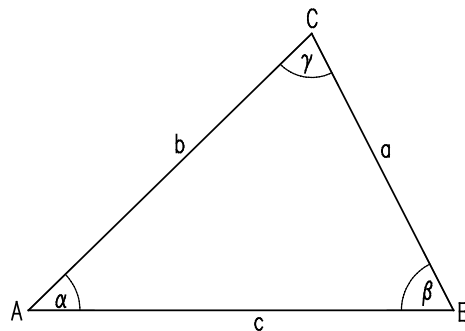
$$\underline{\underline{P = 99 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 14

Geg.: $\gamma = 112,5^\circ$; $a = 6,4 \text{ cm}$; $c = 9,8 \text{ cm}$

Ges.: α ; β ; b

Planfigur:



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c} \quad | \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c}$$

$$\sin \alpha = \frac{6,4 \text{ cm} \cdot \sin 112,5^\circ}{9,8 \text{ cm}}$$

$$\alpha = \underline{\underline{37,11}}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 37,11^\circ - 112,5^\circ$$

$$\underline{\underline{\beta = 30,39^\circ}}$$

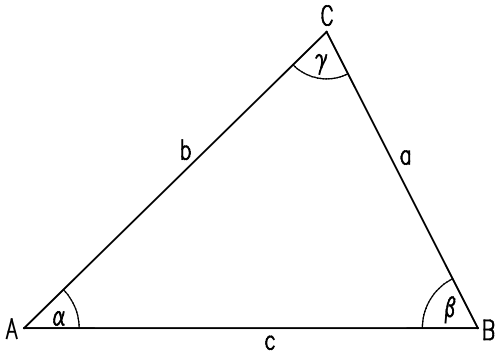
$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$b = \frac{9,8 \text{ cm} \cdot \sin 30,39^\circ}{\sin 112,5^\circ} = \underline{\underline{5,37 \text{ cm}}}$$

Aufgabe 15

Geg.: $\alpha = 32^\circ$; $\beta = 104^\circ$; $c = 4,5 \text{ cm}$

Ges.: γ ; a ; b



$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 32^\circ - 104^\circ = \underline{\underline{44^\circ}}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$a = \frac{4,5 \text{ cm} \cdot \sin 32^\circ}{\sin 44^\circ} = \underline{\underline{3,43 \text{ cm}}}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

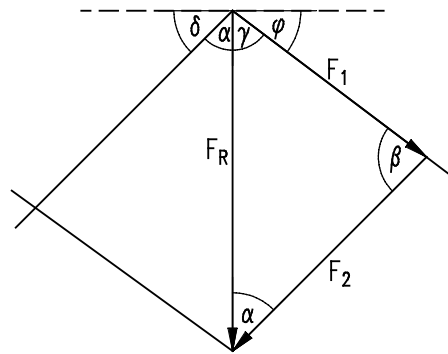
$$b = \frac{4,5 \text{ cm} \cdot \sin 104^\circ}{\sin 44^\circ} = \underline{\underline{6,29 \text{ cm}}}$$

Aufgabe 16

Geg.: $F_R = 1500 \text{ N}$; $\varphi = 30^\circ$; $\delta = 45^\circ$

Ges.: F_1 ; F_2

Planfigur:



$$\gamma = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

$$\frac{F_1}{F_R} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow F_1 = \frac{F_R \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$F_1 = \frac{1500 \text{ N} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \underline{\underline{1098 \text{ N}}}$$

$$\frac{F_2}{F_R} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \Rightarrow F_2 = \frac{F_R \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$$

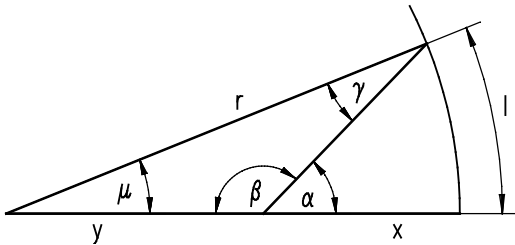
$$F_2 = \frac{1500 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = \underline{\underline{1345 \text{ N}}}$$

Aufgabe 17

Geg.: $z = 80$; $d = 90 \text{ mm}$; $\alpha = 45^\circ$

Ges.: x

Planfigur:



$$r = \frac{d}{2} = 45 \text{ mm}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 135^\circ$$

Die Länge l des Bogens kann aus dem Kreisumfang und der Anzahl der Zähne berechnet werden.

$$l = \frac{\pi \cdot d}{z} = \frac{\pi \cdot 90 \text{ mm}}{80} = \underline{3,5343 \text{ mm}}$$

Aus der Länge des Bogens kann nun der Mittelpunktswinkel μ berechnet werden.

$$l = \frac{\pi \cdot d}{360^\circ} \cdot \mu \quad | \cdot \frac{360^\circ}{\pi \cdot d}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{l \cdot 360^\circ}{\pi \cdot d}$$

$$\mu = \frac{360^\circ \cdot 3,5343 \text{ mm}}{\pi \cdot 90 \text{ mm}} = \underline{4,5^\circ}$$

$$\gamma = 180^\circ - \mu - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 4,5^\circ - 135^\circ = 40,5^\circ$$

Nach dem Sinussatz folgt:

$$\frac{y}{r} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \Rightarrow y = \frac{r \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$y = \frac{45 \text{ mm} \cdot \sin 40,5^\circ}{\sin 135^\circ} = 41,33 \text{ mm}$$

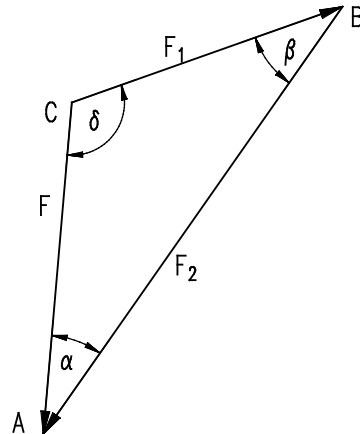
$$x = r - y = 45 \text{ mm} - 41,33 \text{ mm} = \underline{\underline{3,67 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 18

Geg.: $\overline{AC} = 3,15 \text{ m}$; $\alpha = 34^\circ 20'$; $\beta = 42^\circ 50'$; $F = 7280 \text{ N}$

Ges.: F_1 ; F_2

Planfigur:



$$\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 102,83^\circ$$

$$\frac{F_1}{F} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow F_1 = \frac{F \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$F_1 = \frac{7280 \text{ N} \cdot \sin 34^\circ 30'}{\sin 42^\circ 50'} = \underline{\underline{6039 \text{ N}}}$$

$$\frac{F_2}{F} = \frac{\sin \delta}{\sin \beta} \Rightarrow F_2 = \frac{F \cdot \sin \delta}{\sin \beta}$$

$$F_2 = \frac{7280 \text{ N} \cdot \sin 102,83^\circ}{\sin 42^\circ 50'} = 10441 \text{ N}$$

Aufgabe 19

Geg.: $\alpha = 28,17^\circ$; $b = 6,5 \text{ cm}$; $c = 3,2 \text{ cm}$

Ges.: a ; β ; γ

Da zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, kann der Kosinussatz angewendet werden.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$a = \sqrt{6,5^2 + 3,2^2 - 2 \cdot 6,5 \cdot 3,2 \cdot \cos 28,17^\circ} \text{ cm}$$

$$a = 3,9771 \text{ cm} = \underline{\underline{3,98 \text{ cm}}}$$

Mit dem Sinussatz ergibt sich:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{6,5 \text{ cm} \cdot \sin 28,17^\circ}{3,9771 \text{ cm}} \Rightarrow \beta = 50,49^\circ$$

$$\underline{\beta_1 = 50,49^\circ} \quad \underline{\beta_2 = 129,51^\circ}$$

Zunächst muss mit beiden Lösungen weitergerechnet werden, bis entschieden werden kann, ob beide Lösungen brauchbar sind oder nicht:

$$\gamma_1 = 180^\circ - \alpha - \beta_1 = 101,34^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - \alpha - \beta_2 = 22,32^\circ$$

Da $b > c$ ist, muss auch $\beta > \gamma$ sein; dies ist aber nur bei β_2 und γ_2 erfüllt.

$\Rightarrow \beta_1$ und γ_1 sind keine Lösungen!

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta = 129,51^\circ}} \quad \underline{\underline{\gamma = 22,32^\circ}}$$

Wenn zur Berechnung des Winkels β nicht der Sinussatz, sondern noch einmal der Kosinussatz verwendet wird, dann erhält man sofort die richtige Lösung:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \beta = \frac{(3,9771^2 + 3,2^2 - 6,5^2) \text{ cm}^2}{2 \cdot 3,9771 \cdot 3,2 \text{ cm}^2}$$

$$\underline{\underline{\beta = 129,51^\circ}}$$

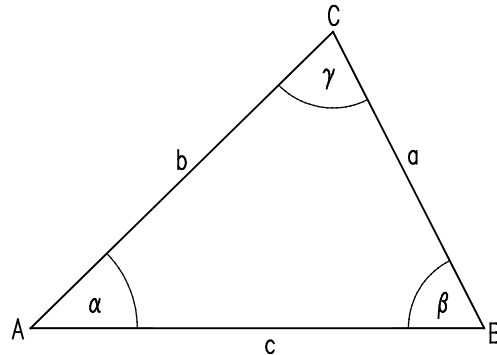
(Da der Kosinus im 1. Quadranten positiv und im 2. Quadranten negativ ist, sind Lösungen mit dem Kosinussatz immer eindeutig!)

Aufgabe 20

Geg.: $a = 4,2 \text{ cm}$; $b = 6 \text{ cm}$; $c = 7,8 \text{ cm}$

Ges.: α ; β ; γ

Planfigur:



Da 3 Seiten gegeben sind, muss der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{(6 \text{ cm})^2 + (7,8 \text{ cm})^2 - (4,2 \text{ cm})^2}{2 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 7,8 \text{ cm}}$$

$$\alpha = \underline{\underline{32,2^\circ}}$$

Man könnte mit dem Sinussatz weiterrechnen, hätte dann aber 2 Lösungen für β . Es ist also besser, den Kosinussatz anzuwenden:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \beta = \frac{(4,2 \text{ cm})^2 + (7,8 \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2}{2 \cdot 4,2 \text{ cm} \cdot 7,8 \text{ cm}}$$

$$\beta = \underline{\underline{49,58^\circ}}$$

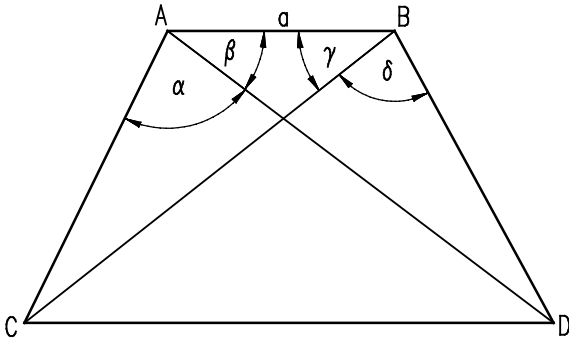
$$\gamma = 180^\circ - (32,2^\circ + 49,58^\circ) = \underline{\underline{98,22^\circ}}$$

Aufgabe 21

Geg.: $\overline{AB} = 120 \text{ mm}$; $\alpha = 75^\circ$; $\beta = 32,17^\circ$; $\gamma = 40,33^\circ$; $\delta = 88,5^\circ$

Ges.: \overline{AB} ; \overline{BC} ; \overline{AD} ; \overline{DB} ; \overline{CD}

Planfigur:



Im $\triangle ACB$ gilt:

$$\angle ACB = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ - (75^\circ + 32,17^\circ + 40,33^\circ)$$

$$\angle ACB = 32,5^\circ$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 40,33^\circ} = \frac{120 \text{ mm}}{\sin 32,5^\circ}$$

$$\overline{AC} = \frac{120 \text{ mm} \cdot \sin 40,33^\circ}{\sin 32,5^\circ} = \underline{\underline{144,5 \text{ mm}}}$$

Im $\triangle ADB$ gilt:

$$\angle ADB = 180^\circ - (\beta + \gamma + \delta) = 180^\circ - (32,17^\circ + 40,33^\circ + 88,5^\circ)$$

$$\angle ADB = 19^\circ$$

$$\frac{\overline{BD}}{\sin 32,17^\circ} = \frac{120 \text{ mm}}{\sin 19^\circ}$$

$$\overline{BD} = \underline{\underline{196,2 \text{ mm}}}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\sin (40,33^\circ + 88,5^\circ)} = \frac{120 \text{ mm}}{\sin 19^\circ}$$

$$\overline{AD} = \underline{\underline{287 \text{ mm}}}$$

Im $\triangle CDA$ gilt:

$$(\overline{CD})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AD})^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(144,5 \text{ mm})^2 + (287 \text{ mm})^2 - 2 \cdot 144,5 \text{ mm} \cdot 287 \text{ mm} \cdot \cos 75^\circ}$$

$$\overline{CD} = 285,98 \text{ mm}$$

Im $\triangle ACB$ gilt:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin (75^\circ + 32,1^\circ)} = \frac{120 \text{ mm}}{\sin 32,5^\circ}$$

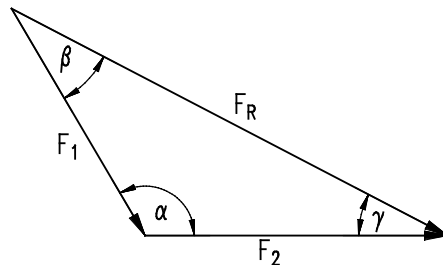
$$\overline{BC} = \underline{\underline{213,4 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 22

Geg.: $F_1 = 65 \text{ N}$; $F_2 = 80 \text{ N}$; $\alpha = 120^\circ$

Ges.: F_R ; β ; γ

Planfigur:



$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha$$

$$F_R = \sqrt{(65 \text{ N})^2 + (80 \text{ N})^2 - 2 \cdot 65 \text{ N} \cdot 80 \text{ N} \cdot \cos 120^\circ} = \underline{\underline{125,8 \text{ N}}}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{F_R} \Rightarrow \sin \beta = \frac{F_2 \cdot \sin \alpha}{F_R}$$

$$\sin \beta = \frac{80 \text{ N} \cdot 0,866}{125,8 \text{ N}}$$

$$\beta = \underline{\underline{33,4^\circ}}$$

$$\gamma = 180^\circ - (120^\circ + 33,4^\circ) = \underline{\underline{26,6^\circ}}$$

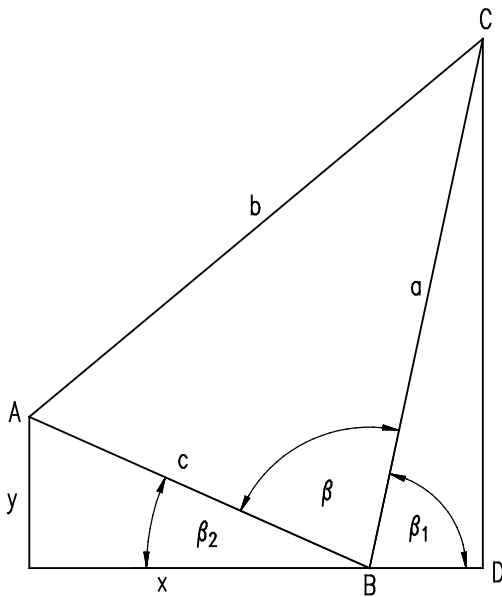
Aufgabe 23

Geg.: $z_1 = 60$; $z_2 = 45$; $z_3 = 35$; $m = 3 \text{ mm}$

Ges.: x ; y

Planfigur:

(A, B, C sind die Mittelpunkte der Zahnräder)



Im rechtwinkligen $\triangle BDC$ gilt nach Pythagoras:

$$a^2 = (180 \text{ mm})^2 + (30 \text{ mm})^2$$

$$\underline{a = 182,5 \text{ mm}}$$

$$b = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot m = \frac{60 + 45}{2} \cdot 3 \text{ mm}$$

$$\underline{b = 157,5 \text{ mm}}$$

$$c = \frac{z_2 + z_3}{2} \cdot m = \frac{45 + 35}{2} \cdot 3 \text{ mm} = 120 \text{ mm}$$

$$\tan \beta_1 = \frac{180 \text{ mm}}{30 \text{ mm}} = 6; \quad \beta_1 = 80,54^\circ$$

Den Winkel β erhält man mithilfe des Kosinussatzes aus dem $\triangle ABC$.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \beta = \frac{(182,5^2 + 120^2 - 157,5^2) \text{ mm}^2}{2 \cdot 182,5 \cdot 120 \text{ mm}^2}$$

$$\underline{\beta = 58,48^\circ}$$

$$\beta_2 = 180^\circ - (58,48^\circ + 80,54^\circ) = 40,98^\circ$$

$$\sin \beta_2 = \frac{y}{c} \Rightarrow y = c \cdot \sin \beta_2$$

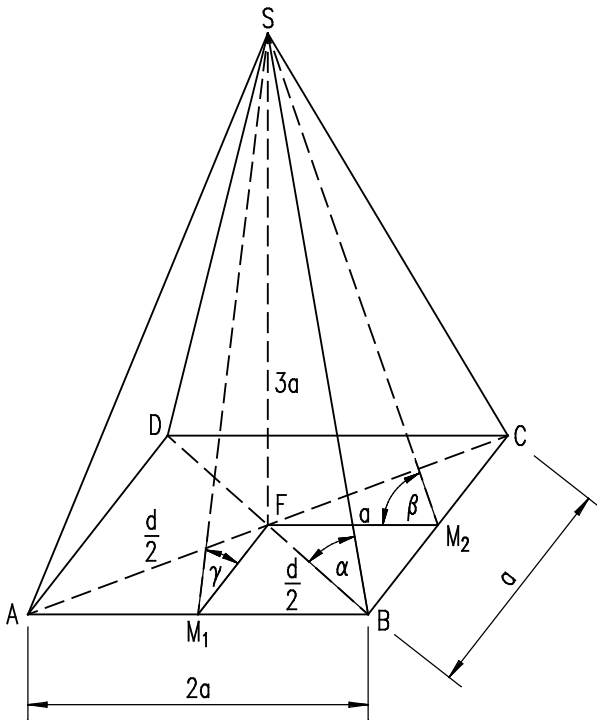
$$y = 120 \text{ mm} \cdot \sin 40,98^\circ = \underline{\underline{78,7 \text{ mm}}}$$

$$\cos \beta_2 = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos \beta_2$$

$$x = 120 \text{ mm} \cdot \cos 40,98^\circ = \underline{\underline{90,6 \text{ mm}}}$$

Aufgabe 24

Planfigur:



Die Länge der Diagonale in der Grundfläche erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC:

$$d = \sqrt{a^2 + (2a)^2} \Rightarrow \underline{d = a\sqrt{5}}$$

Da SF auf der Grundfläche senkrecht steht, gilt:

$$SF \perp M_1F; SF \perp BF; SF \perp M_2F$$

Im rechtwinkligen $\triangle BSF$ gilt:

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{3a}{d/2} = \frac{3a}{\frac{1}{2}a\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 69,56^\circ}}$$

Im rechtwinkligen $\triangle M_2SF$ gilt:

$$\tan \beta = \frac{3a}{a} = 3$$

$$\underline{\underline{\beta = 71,57^\circ}}$$

Im rechtwinkligen $\triangle SM_1F$ gilt:

$$\tan \gamma = \frac{3a}{a/2} = 6$$

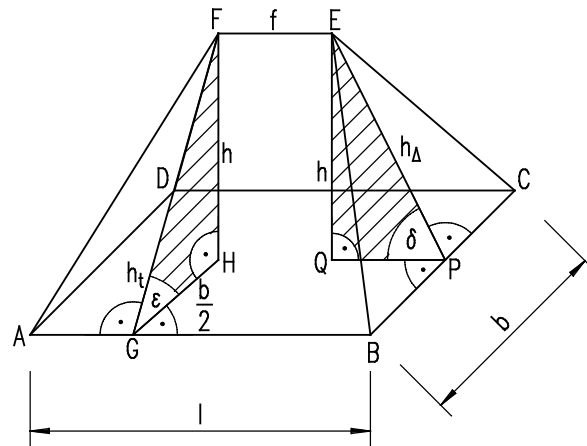
$$\underline{\underline{\gamma = 80,54^\circ}}$$

Aufgabe 25

Geg.: $l = 21 \text{ m}$; $b = 12 \text{ m}$; $\varepsilon = 38^\circ$; $f = 15 \text{ m}$

Ges.: h; δ ; A

Planfigur:



a) im rechtwinkligen $\triangle FGH$ gilt:

$$\tan \alpha = \frac{h}{b/2} \quad | \cdot b/2$$

$$h = \frac{b}{2} \cdot \tan \varepsilon$$

$$h = \frac{12 \text{ m}}{2} \cdot \tan 38^\circ = 4,6877 \text{ m} = \underline{\underline{4,69 \text{ m}}}$$

b) im rechtwinkligen $\triangle PEQ$ gilt:

$$\tan \delta = \frac{h}{\overline{PQ}} \quad \text{mit} \quad \overline{PQ} = (l - f) : 2$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{h}{\frac{1}{2} \cdot (l - f)}$$

$$\tan \delta = \frac{4,6877 \text{ m}}{\frac{1}{2} \cdot (21 - 15) \text{ m}}$$

$$\Rightarrow \delta = 57,382^\circ = \underline{\underline{57,4^\circ}}$$

c) im rechtwinkligen $\triangle PEQ$ gilt:

$$\cos \delta = \frac{\frac{1}{2} \cdot (l - f)}{h_{\Delta}} \Rightarrow h_{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (l - f)}{\cos \delta}$$

$$h_{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (21 - 15) \text{ m}}{\cos 57,382^{\circ}} = \underline{5,5655 \text{ m}}$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_{\Delta}$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ m} \cdot 5,5655 \text{ m} = \underline{33,393 \text{ m}^2}$$

Für die Trapezfläche ABEF gilt:

$$A_T = \frac{l+f}{2} \cdot h_T$$

Im rechtwinkligen $\triangle FGH$ gilt:

$$\cos \varepsilon = \frac{b/2}{h_T}$$

$$h_T = \frac{b}{2 \cos \varepsilon}$$

$$h_T = \frac{12 \text{ m}}{2 \cdot \cos 38^{\circ}} = 7,614 \text{ m}$$

$$\Rightarrow A_T = \frac{21 \text{ m} + 15 \text{ m}}{2} \cdot 7,614 \text{ m} = 137,054 \text{ m}^2$$

$$A = 2 \cdot A_T + 2 \cdot A_{\Delta}$$

$$A = 2 \cdot 137,052 \text{ m}^2 + 2 \cdot 33,393 \text{ m}^2 = \underline{\underline{341 \text{ m}^2}}$$

3 Stereometrie

Aufgabe 1

Gegeben: $d_1 = 90 \text{ cm}$; $d_2 = 40 \text{ cm}$; $h = 60 \text{ cm}$

Gesucht: V ; A_M ; A_0

$$V = \frac{\pi}{12} h (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} 60 \text{ cm} (90^2 \text{ cm}^2 + 90 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} + 40^2 \text{ cm}^2) = 208916 \text{ cm}^3 \approx \underline{\underline{0,209 \text{ m}^3}}$$

$$A_M = \frac{\pi}{2} \cdot s (d_1 + d_2) \quad \left| s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2}\right.$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2} (d_1 + d_2)$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{60^2 \text{ cm}^2 + \left(\frac{90 \text{ cm}}{2} - \frac{40 \text{ cm}}{2}\right)^2} \cdot (90 \text{ cm} + 40 \text{ cm}) = 13273 \text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{1,33 \text{ m}^2}}$$

$$A_0 = \frac{\pi}{4} (d_1^2 + d_2^2) + A_M$$

$$= \frac{\pi}{4} (90^2 \text{ cm}^2 + 40^2 \text{ cm}^2) + 13273 \text{ cm}^2 = 20892 \text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{2,09 \text{ m}^2}}$$

Aufgabe 2

Gegeben: $d = 1 \text{ mm}$; $m = 1 \text{ kg}$; $\rho = 7,85 \text{ kg/dm}^3$

Gesucht: Anzahl n

n mal das Volumen V_{ku} einer Kugel muss das Volumen V_{st} von 1 kg Stahl ergeben.

$$V_{st} = n \cdot V_{ku}$$

$$\Rightarrow n = \frac{V_{st}}{V_{ku}} \quad \left| V_{st} = \frac{m}{\rho} \right.$$

$$n = \frac{m}{\rho \cdot V_{ku}} \quad \left| V_{ku} = \frac{\pi}{6} d^3 \right.$$

$$= \frac{m \cdot 6}{\rho \pi \cdot d^3} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 6 \cdot \text{dm}^3}{7,85 \text{ kg} \cdot \pi \cdot 0,01^3 \text{ dm}^3} = \underline{\underline{243294}}$$

Aufgabe 3Gegeben: $V = 8380 \text{ cm}^3$ Gesucht: A_0

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \pi d^2 & \left| \begin{array}{l} V = \frac{\pi}{6} d^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}} \end{array} \right. \\
 &= \pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}} \right)^2 = \pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{6 \cdot 8380 \text{ cm}^3}{\pi}} \right)^2 = 1995 \text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{20 \text{ dm}^2}}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4Gegeben: $D = 80 \text{ mm}; d = 15 \text{ mm}$ Gesucht: V

$$\begin{aligned}
 V &= A \cdot 2\pi r_{\text{SA}} & \left| \begin{array}{l} A = \frac{\pi}{4} d^2 \\ r_{\text{SA}} = \frac{D}{2} \end{array} \right. \\
 &= \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 2\pi \cdot r_{\text{SA}} \\
 &= \frac{\pi^2}{2} d^2 \cdot \frac{D}{2} = \frac{\pi^2}{4} d^2 \cdot D \\
 &= \frac{\pi^2}{4} 15^2 \text{ mm}^2 \cdot 80 \text{ mm} = 44413 \text{ mm}^3 \approx \underline{\underline{44,4 \text{ cm}^3}}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5Gegeben: $a = 10 \text{ mm}; b = 30 \text{ mm}; D = 60 \text{ mm}$ Gesucht: V

$$\begin{aligned}
 V &= A \cdot 2\pi r_{\text{SA}} & \left| \begin{array}{l} \text{Die Rotationsfläche besteht aus 4 rechtwinkligen Dreiecken,} \\ \text{deren Katheten jeweils } \frac{a}{2} \text{ und } \frac{b}{2} \text{ sind:} \\ A = 4 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{2}\right)}{2} = \frac{ab}{2} \end{array} \right. \\
 &= \frac{ab}{2} 2\pi r_{\text{SA}} & \left| \begin{array}{l} r_{\text{SA}} = \frac{D}{2} \end{array} \right. \\
 &= ab \cdot \pi \cdot \frac{D}{2} = \frac{10 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm} \cdot \pi \cdot 60 \text{ mm}}{2} = 28274 \text{ mm}^3 \approx \underline{\underline{28,3 \text{ cm}^3}}
 \end{aligned}$$

Komplexaufgabe „Trigonometrische Höhenbestimmung“

Aufgabe 1

$$H_c = I_A + h_a \quad | \quad I_A = H_A + i_a$$

$$= H_A + i_a + h_a \quad | \quad x \text{ kann auf 2 Arten dargestellt werden:}$$

1. aus Dreieck CFD

$$\frac{c+x}{h_a} = \tan z_a \Rightarrow x = \tan z_a \cdot h_a - c$$

2. aus Dreieck CGE

$$\frac{x}{h_b} = \tan z_b \Rightarrow x = \tan z_b \cdot h_b$$

also gilt (Gleichsetzen der rechten Seiten)

$$\tan z_a \cdot h_a - c = \tan z_b \cdot h_b \quad | \quad h_b = h_a - (I_B - I_A)$$

$$\tan z_a \cdot h_a - c = \tan z_b \cdot (h_a - (I_B - I_A))$$

 Umstellen nach h_a

$$\tan z_a \cdot h_a - \tan z_b \cdot h_a = c + \tan z_b \cdot (I_A - I_B)$$

$$h_a = \frac{c + \tan z_b \cdot (I_A - I_B)}{\tan z_a - \tan z_b}$$

$$= H_A + i_a + \frac{c + \tan z_b \cdot (I_A - I_B)}{\tan z_a - \tan z_b} \quad | \quad I_A = H_A + i_a ; I_B = H_B + i_b$$

$$= H_A + i_a + \frac{c + \tan z_b \cdot (H_A + i_a - H_B - i_b)}{\tan z_a - \tan z_b}$$

Zahlenbeispiel

gemessen werden:	$H_A = 162,37 \text{ m ü NN}$	$H_B = 163,15 \text{ m ü NN}$
	$i_a = 1,52 \text{ m}$	$i_b = 1,55 \text{ m}$
	$z_a = 69,788^\circ$	$z_b = 51,161^\circ$
	$c = 26,14 \text{ m}$	

Rechnung

$$H_c = H_A + i_a + \frac{c + \tan z_b \cdot (H_A + i_a - H_B - i_b)}{\tan z_a - \tan z_b}$$

$$= 162,37 \text{ m} + 1,52 \text{ m} + \frac{26,14 \text{ m} + \tan 51,161^\circ \cdot (162,37 + 1,52 - 163,15 - 1,55) \text{ m}}{\tan 69,788^\circ - \tan 51,161^\circ}$$

$$= 180,94 \text{ m}$$