

Grundlagen der Mechanik anwenden

Die betriebliche Praxis verlangt von Technikerinnen und Technikern häufig die Lösung von technisch-mechanischen Problemen.

Der Übergang von der beobachteten Umwelt zum physikalischen Modell ist anspruchsvoll, weil dazu Grundkenntnisse der Mechanik sowie Kenntnisse relevanter Größen und Maßeinheiten erforderlich sind.

Die Ableitung modellhaft erkannter Systeme in praktische Lösungen setzt die Fähigkeit voraus, Kräfte, Bewegungen und Energieformen zu erkennen und zu berechnen.

Im Lernbereich 1 dieses Lernmoduls werden zunächst das Messen und die Maßeinheiten der Physik als Basiswissen dargestellt, um die Fähigkeit zum Lösen technisch-mechanischer Aufgaben und Probleme zu erarbeiten.

Im zweiten Lernbereich wird die Mechanik der festen Körper und im dritten Lernbereich die Mechanik der Flüssigkeiten und Gase erarbeitet.

Alle notwendigen Informationen und Arbeitsunterlagen sind in diesem Lernmodul enthalten.

Dieses Lernmodul ist im häuslichen Studium zu erarbeiten.

Der benötigte Zeitaufwand liegt bei ca. 54 Stunden.

Zusätzlich finden in den semesterbezogenen Präsenzphasen 21 Stunden Festigung und Vertiefung fachspezifischer und fächerübergreifender Zusammenhänge sowie die Beschreibung typischer Aufgaben und Problemstellungen statt.

LERNMODUL 1

Ziele

Ausgangssituation

Planung

**Komplexaufgabe
des Lernmoduls****Planung eines Notauslaufes**

Eine Straßenbaufirma erhält den Auftrag, eine Bergstraße mit Spitzkehren zu sanieren. Da die Strecke auch häufig durch Schwerlastverkehr belastet wird, besteht eine Geschwindigkeitsbegrenzung von 60 km/h.

An einem extrem steilen Teilstück vor einer Spitzkehre soll aus Sicherheitsgründen zusätzlich ein Notberg (bzw. Notauslauf) für Pkw und Lkw gebaut werden. Sollten die Bremsen eines Fahrzeuges versagen, so kann das Ausweichen auf diese Straße helfen, schwere Unfälle zu verhindern.

Für die Projektierung des Notauslaufes stellt der Gemeinderat der angrenzenden Ortschaft ein passendes Steilgelände am Kurvenanfang zur Verfügung.

Für die Planung wird eine Abschätzung der erforderlichen Länge und Höhe der Auslaufstrecke benötigt.

Die erforderlichen Grundlagen zur erfolgreichen Bearbeitung des Projektes werden in diesem Lernmodul erarbeitet.

Inhaltsverzeichnis

1 Messen und Maßeinheiten in der Physik	4
2 Mechanik der festen Körper	11
2.1 Körperbegriff.....	11
2.2 Kräfte.....	17
2.2.1 Grundeigenschaften von Kräften.....	17
2.2.2 Kraftwirkungen.....	35
2.3 Hebelgesetz und Hebelarten.....	52
2.4 Bewegungen fester Körper	72
2.4.1 Gleichförmige und ungleichförmige Bewegungen.....	72
2.4.2 Bewegungen unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung	99
2.5 Kräfte und Bewegung.....	111
2.6 Arbeit, Energie und Leistung.....	122
2.6.1 Mechanische Arbeit.....	122
2.6.2 Formen der Energie	129
2.6.3 Leistung und Wirkungsgrad.....	139
2.6.4 Einfache Maschinen	144
3 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase	168
3.1 Allgemeine Eigenschaften der Flüssigkeiten	170
3.2 Allgemeine Eigenschaften der Gase.....	194
3.3 Dynamik der Flüssigkeiten und Gase	199
Lösungsanhang	209

Lernbereich

1 Messen und Maßeinheiten in der Physik

Der Begriff der Physik stammt aus dem Griechischen und bedeutet „Natur“. In den Anfängen befassten sich die griechischen Wissenschaftler („Physiker“) mit Problemen und Phänomenen der Natur, die ihnen interessant und untersuchenswert erschienen. Aus dieser Tätigkeit lässt sich auch der Begriff des Naturwissenschaftlers herleiten. Doch im Laufe der Jahrhunderte wuchs die Anzahl der Erkenntnisse derart, dass ein einzelner Forscher überfordert war. Die Naturwissenschaften wurden gegliedert in die Bereiche der Physik, Chemie, Biologie, Geologie usw.

Die Physik ist ein Teilgebiet der Naturwissenschaften. Sie beschäftigt sich, im Gegensatz zu der Biologie, mit Erscheinungen der unbelebten Umwelt.

Die Physik stellt sich die Aufgabe, die Bestandteile der Materie und ihre Wechselwirkungen zu untersuchen. Auf der Basis der Wechselwirkungen erklärt die Physik die Eigenschaften der Stoffe und anderer natürlicher Phänomene.

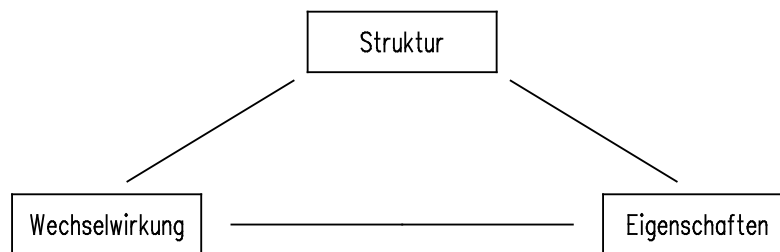


Abbildung 1 Modell der Physik

Am Anfang der Forschung steht die Beobachtung eines Phänomens oder eines Ereignisses in der unbelebten Natur. In der Physik besteht das Bestreben, diese Ereignisse zu untersuchen und zu beschreiben. Es sollen Zusammenhänge entdeckt und diese in **mathematischen Funktionen und Gesetzmäßigkeiten** definiert werden.

Um aber überhaupt die Physik mit der Mathematik in Verbindung zu bringen, muss die Beschreibung eines Ereignisses durch eine Reihe von Begriffen (zum Beispiel Länge, Masse, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Leistung, Arbeit usw.) möglich sein. Da Begriffe in der Sprache des täglichen Lebens oft eine unterschiedliche Bedeutung haben, müssen sie eindeutig festgelegt und somit unmissverständlich definiert sein. Erst die eindeutige Definition der Begriffe schafft die Voraussetzung für den Aufbau der physikalischen Wissenschaft.

Das Ziel der physikalisch-wissenschaftlichen Arbeit ist es, die Zustandsgrößen und die Begriffe mathematisch zu verknüpfen. Diese sollen, wie beschrieben, in mathematischen Funktionen formuliert werden. Erst die Definition eines Naturgesetzes stellt die Lösung eines physikalischen Problems dar. Hieraus ist zu erkennen, welche Bedeutung die Mathematik in der Physik hat. Fundierte mathematische Kenntnisse sind somit eine Voraussetzung für ein erfolgreiches Arbeiten in der Physik.

Am Anfang einer physikalischen Arbeit steht eine Beobachtung eines Phänomens oder einer Erscheinung. Doch treten Erscheinungen in der Natur meist schwer voraussagbar auf und sind zeitlich und räumlich unbeeinflussbar. Hieraus folgt, dass es messtechnisch sehr aufwändig ist, diese Erscheinungen und Phänomene exakt zu beobachten und Messergebnisse zu ermitteln.

An Stelle der Naturbeobachtung bedient sich die Physik deshalb der **Experimente**. Bei einem physikalischen Experiment werden Bedingungen geschaffen, unter der ein zu beobachtender Vorgang ablaufen soll. Wenn nun umgekehrt der Experimentator einen Vorgang so auslöst, dass er einen ihm bekannten und erwünschten Verlauf

nimmt, so stellt er damit die Naturgesetze in den Dienst menschlicher Ziele. Daher ist die Physik die Grundlage der Technik.

Allgemein kann gesagt werden, dass bei einem Experiment verschiedene physikalische Größen gemessen und miteinander verglichen werden.

Um nun die Beschreibungen der Beobachtungen aus der Natur oder den Experimenten in Gesetzmäßigkeiten auszudrücken, müssen die physikalischen Begriffe quantitativ erfasst werden. Dies wird zum Beispiel durch das Messen der **physikalischen Größen** erreicht. Der Begriff wird dann quantitativ eindeutig durch Zahlenwerte ausgedrückt. Durch das Verbinden der **quantitativen Aussage** mit der Einheit der physikalischen Größe erhält die physikalische Größe eine **qualitative Aussage**.

Eine Beobachtung und die Beschreibung eines Experiments oder einer Erscheinung besteht aus drei Teilen. Der Experimentator muss sich vor dem Versuch im Klaren sein, wie sein Experiment ablaufen soll und welche physikalischen Größen er ermitteln möchte. Er macht als Erstes eine Anfangsbeschreibung und definiert alle relevanten Größen vor der Beeinflussung durch den Versuch. Nach dem Start des Experiments oder der Erscheinung beobachtet der Experimentator als Zweites die Größen und dokumentiert auftretende Veränderungen. Als Drittes und letztes macht der Experimentator eine Endbetrachtung mit der Aufnahme aller beobachteten Größen.

Aus den Beobachtungen und den ermittelten Messgrößen versucht der Physiker nun, mathematische Zusammenhänge zu erkennen und diese zu definieren. Durch weitere ähnliche Experimente wird versucht, diese Zusammenhänge zu bestätigen und somit hieraus physikalische Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben.

Der Prozess der physikalischen Erkenntnisse ist schematisch in einem geschlossenen Regelkreis zu erklären, der vier Stationen umfasst (siehe Abbildung 2). Diese Stationen werden nachfolgend genauer beschrieben.

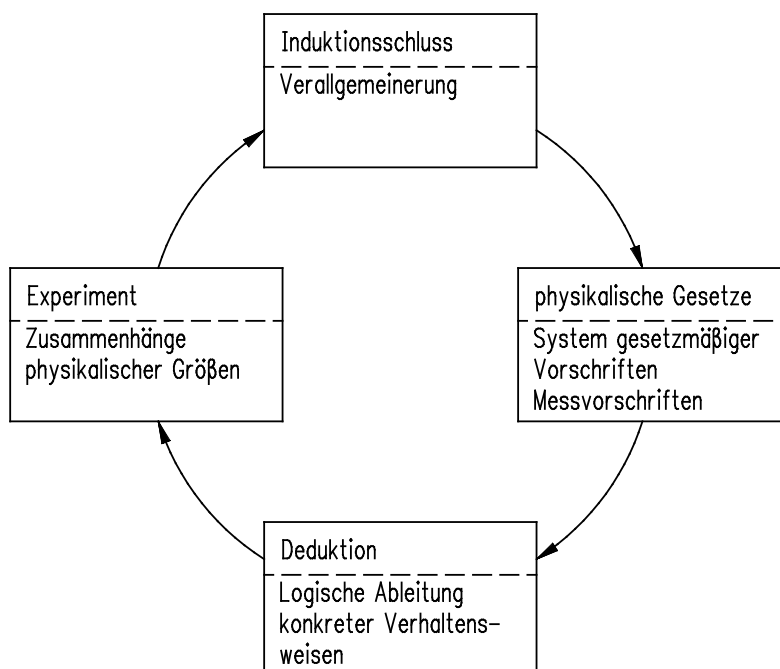


Abbildung 2 Regelkreis der physikalischen Erkenntnisse

Als Ausgangspunkt der physikalischen Forschung steht, wie beschrieben, eine Beobachtung in der Natur bzw. eine Idee oder eine aufgestellte Hypothese. Hiernach beginnt der Physiker seine Arbeit nach der im Regelkreis beschriebenen Reihenfolge.

- **Experiment**

Im ersten Schritt werden Merkmale der leblosen Umwelt, die physikalischen Größen, gesucht und zur präzisen Beschreibung durch physikalische Definitionen festgelegt (z.B. Länge). In einem Experiment werden durch Messungen zwei oder mehr physikalische Größen miteinander verglichen und die dabei aufgestellten Zusammenhänge dokumentiert.

- **Induktionsschluss**

Hierunter versteht man die Analyse der Ergebnisse aus den Experimenten. Werden physikalische Zusammenhänge immer wieder experimentell bestätigt, so kann gefolgert werden, dass sie zu jeder Zeit an jedem Ort Gültigkeit haben. Dieser Schluss, der eine Verallgemeinerung darstellt, wird in der Mathematik als Induktionsschluss definiert. Eine derartige Verallgemeinerung ist aber nur zulässig, wenn sich die physikalischen Konstanten nicht ändern (z.B. Lichtgeschwindigkeit).

- **Physikalische Gesetze**

Durch den Induktionsschluss kann ein physikalisches Gesetz formuliert werden (z.B. Kraft ist proportional zur Masse und Beschleunigung [$F = m \cdot a$]). Bildet eine Vielzahl an physikalischen Gesetzen ein widerspruchsfreies System von gesetzmäßigen Zusammenhängen in einem Bereich, so wird das System als Theorie bezeichnet.

- **Deduktion**

Mithilfe der physikalischen Gesetze und der Logik können für konkrete Probleme der Physik Aussagen hergeleitet werden.

- **Experiment**

Auch eine sehr sorgfältige Analyse eines physikalischen Problems kann fehlerhaft sein, da eine Einflussgröße nicht beachtet wurde. Darum müssen Vorhersagen in der Physik experimentell überprüft werden.

Das Forschungsziel des Physikers ist stets, die Theorie der von ihm untersuchten Naturerscheinungen aufzustellen. Er versucht, die aufgestellten Hypothesen zu prüfen und ihre Richtigkeit zu beweisen. Eine bewährte Hypothese wird in der Physik als Theorie bezeichnet. Mit den Gesetzmäßigkeiten der Theorie sollen aber nicht nur Beobachtungen oder Erscheinungen zusammengefasst und berechnet werden. Es besteht zudem die Möglichkeit, physikalische Geschehen quantitativ vorauszusagen.

Die theoretische und die experimentelle Physik sind auf das Engste miteinander verbunden und haben sich unter den Physikern als arbeitsteilig herausgebildet, da die Anforderungen äußerst komplex sind.

Die Physik ist in zwei Hauptbereiche gegliedert. Dies ist zum einen die Makrophysik und zum anderen die Mikrophysik. Der Unterschied liegt in den Größenordnungen der betrachteten Ereignisse oder Erscheinungen (Länge l).

Makrophysik ($l > 10^{-6} \text{ m}$):

- Mechanik
- Thermodynamik (Wärmelehre)
- Elektrizität, Magnetismus
- Wellen- und Schwingungslehre
- Optik
- Akustik

Mikrophysik ($l < 10^{-6} \text{ m}$):

- Atomphysik
- Kernphysik
- Elementarteilchenphysik

Physikalische Größen

Eine physikalische Größe G kennzeichnet Eigenschaften und beschreibt Zustände sowie Zustandsänderungen von Objekten der Umwelt.

Definition

Jede physikalische Größe G besteht aus einer quantitativen Aussage $\{G\}$ (ausgedrückt durch eine Maßzahl) und einer qualitativen Aussage $[G]$ (ausgedrückt durch die Maßeinheit).

$$G = \{G\} \cdot [G]$$

Beispiel

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$l = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 1 \cdot 10^3 \text{ m}$$

Durch das Gesetz über Einheiten im Messwesen vom 2. Juli 1969 (BGBl. IS. 709) wurden ab dem 1. Januar 1978 die Vereinbarungen der Internationalen Organisation für Standardisation (ISO), die so genannten SI-Einheiten (Système International d'Unités) in der Bundesrepublik Deutschland eingeführt. Im amtlichen und geschäftlichen Verkehr dürfen seither für physikalische Größen nur noch SI-Maßeinheiten benutzt werden. Wegen des enorm hohen messtechnischen Aufwands wurde versucht, die physikalischen Größen auf möglichst wenige voneinander unabhängige Einheiten zurückzuführen. Dieses sind die sieben SI-Basisgrößen. Von deren absoluter Messgenauigkeit sind unsere physikalischen Beobachtungen bestimmt. Alle physikalischen Gesetze lassen sich auf diese sieben SI-Basisgrößen zurückentwickeln.

Auf Grund des sehr aufwändigen Verfahrens zum Maßvergleich gibt es weltweit nur wenige Mess- und Eichlaboratorien. In Deutschland ist dieses die Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig.

SI-Basisgrößen**Zeit t**

Basiseinheit: Sekunde [s]

1 Sekunde ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Länge l

Basiseinheit: Meter [m]

1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $1/299\,792\,458$ Sekunden durchläuft (Lichtgeschwindigkeit).

Masse m

Basiseinheit: Kilogramm [kg]

1 Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.

Elektrische Stromstärke I

Basiseinheit: Ampere [A]

1 Ampere ist die Stromstärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorruft.

Temperatur T

Basiseinheit: Kelvin [K]

1 Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

Lichtstärke I

Basiseinheit: Candela [cd]

1 Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540 THz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung $1/683$ W/sr beträgt.

Stoffmenge n

Basiseinheit: Mol [mol]

1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso viel elementaren Teilchen besteht, wie Atome in $12/1000$ Kilogramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind.

Aufgabenstellungen in der Physik führen häufig zur Ermittlung **abgeleiteter physikalischer Größen** aus den Grundgrößen. Es wird eine Definitionsgleichung erstellt, bei der eine Abhängigkeit zwischen den Grundgrößen und der gesuchten abgeleiteten physikalischen Größe aufgezeigt wird. Die SI-Maßeinheiten der übrigen physikalischen Größen werden aus den Basiseinheiten entsprechend ihrer Definitionsgleichung abgeleitet. Bei der theoretischen Beschreibung der ermittelten Zusammenhänge zwischen den physikalischen Größen ergeben sich universelle Proportionalitätskonstanten.

Lehrbeispiel 1

Ermitteln Sie die Fläche eines Rechtecks mit den Kantenlängen von $a = 1\text{ m}$ und $b = 2\text{ m}$!

Lösung

gegeben: $a = 1\text{ m}$
 $b = 2\text{ m}$

gesucht: A

Definitionsgleichung:

$$A = a \cdot b$$
$$A = 1\text{ m} \cdot 2\text{ m}$$
$$\underline{A = 2\text{ m}^2}$$

Aus dem Lehrbeispiel ist zu ersehen:

- Die Kantenlängen a und b sind die Grundgrößen. Es handelt sich hierbei um SI-Basisgrößen.
- Die Fläche A des Rechtecks ist die abgeleitete physikalische Größe.
- In der Definitionsgleichung wird die Abhängigkeit zwischen den Grundgrößen und der abgeleiteten physikalischen Größe beschrieben. Hier wird eine klare Anweisung gegeben, wie diese Größe experimentell zu bestimmen ist.
- Die Einheit der abgeleiteten physikalischen Größe lässt sich aus der Definitionsgleichung ermitteln.

$$[A] = [a] \cdot [b] = \text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$$

Die Genauigkeit der abgeleiteten physikalischen Größe wird durch die Messgenauigkeit der Grundgrößen bestimmt. Bei der Bearbeitung einer Aufgabenstellung muss man sich im Klaren sein, in welcher Toleranz sich die Genauigkeit der Lösung bewegen soll (z.B. Millimeter, zehntel Millimeter usw.)

AufgabenAufgabe 1

Beschreiben Sie den Begriff der Naturwissenschaften!

Aufgabe 2

Beschreiben Sie das Aufgabengebiet der Physik!

Aufgabe 3

Erklären Sie den Unterschied zwischen Mikro- und Makrophysik!

Aufgabe 4

Wie ist eine physikalische Größe (G) allgemein definiert?

Aufgabe 5

Nennen Sie die sieben SI- Basisgrößen mit ihren Basiseinheiten!

2 Mechanik der festen Körper

Lernbereich

2.1 Körperbegriff

Die Mechanik ist ein Teilgebiet der Physik und nimmt eine besondere Stellung ein. Die geplante Erforschung des Gebietes hat seinen Ursprung im 16. und 17. Jahrhundert (G. Galilei 1548-1642, Newton 1643-1727).

Die Mechanik wird unterteilt in die Bereiche Statik und Kinetik. Die Statik beschäftigt sich mit der Zusammensetzung und dem Gleichgewicht von Kräften auf einen ruhenden Körper. Als Kinetik bezeichnet man die Lehre der bewegten Körper, deren Bewegungsursache die Einwirkung von Kräften auf den Körper ist.

Für die Behandlung technischer Aufgabenstellungen der Mechanik hat sich dabei folgendes Modell bewährt:

Alle Materie im Weltraum ist aus sehr kleinen Teilchen, den Partikeln, aufgebaut. Sie sind punktförmig und bestehen aus **Atomen, Elektronen, Ionen und Molekülen**.

Definition:

Ein Atom ist der kleinste Bestandteil eines chemischen Elementes, der noch die Eigenschaften des Elementes hat. Es besteht aus Protonen, Neutronen und Elektronen.

Definition:

Stoffe, die nur aus einer einzigen Atomart bestehen, heißen chemische Grundstoffe oder Elemente.

Beispiel:

Sauerstoff (O), Wasserstoff (H)

Die meisten Atome sind in der Lage, sich mit anderen Atomen anderer Elemente zu Bausteinen neuer Stoffe zusammenzusetzen.

Atome von Elementen unterschiedlicher Wertigkeit können sich dadurch verbinden, dass sie Elektronen an die anderen abgeben.

Definition:

Durch die Abgabe bzw. Aufnahme von Elektronen entstehen aus Atomen Ionen.

Die chemischen Eigenschaften von Elementen verändern sich durch die Ionisierung vollständig. Durch die Aufnahme von Elektronen entstehen negative Ionen, bei Abgabe von Elektronen positive.

Definition:

Die Teilchen, die sich nur durch chemische Vorgänge, d.h. Zersetzung des Stoffes trennen lassen, heißen Moleküle.

Beispiel:

Wassermolekül (H_2O); die Verbindung besteht aus zwei Wasserstoffatomen und einem Sauerstoffatom.

Moleküle bestehen wenigstens aus zwei Atomen. Viele Grundstoffe bilden in der natürlichen Form Moleküle, die dann aus gleichartigen Atomen bestehen. Zum Beispiel Sauerstoff (O_2), d.h. zwei Sauerstoffatome bilden ein Sauerstoffmolekül. Die Gase, abgesehen von den Edelgasen, bilden Moleküle, die im Normalfall aus zwei Atomen bestehen. In Metallen bilden viele gleichartige Atome einen Kristall.

Ein Atom kann nach dem Bohrschen Atommodell beschrieben werden (siehe Abbildung 4). Dieses Modell ist von J. J. Thomson 1904 entwickelt worden. Demnach besteht ein Atom aus einem Atomkern und einer Elektronenhülle. Der Durchmesser des Atoms liegt in der Größenordnung von 10^{-10} m.

Der Kern besitzt eine positive elektrische Ladung. In ihm befindet sich fast die gesamte Masse des Atoms. Der Durchmesser des Atomkerns ist etwa 10^{-14} m bis 10^{-15} m. Seine Bausteine sind Neutronen (elektrisch neutrale Teilchen) und Protonen (elektrisch positive Elementarladungen).

Die Elektronenhülle besteht aus den Elektronen (elektrisch negative Elementarladungen). Die Elektronen bewegen sich auf kreisförmigen oder ellipsenförmigen Bahnen um den Atomkern, in den so genannten Schalen. Die elektrischen Anziehungskräfte (Folge der Anziehungskraft zweier unterschiedlicher Ladungen) stehen mit den Zentrifugalkräften im Gleichgewicht, was die Stabilität des Atoms gewährleistet. Die Abstände der Elektronen vom Atomkern sind konstant. Jede dieser Schalen ist in der Lage, nur eine bestimmte Anzahl von Elektronen aufzunehmen. Je weiter die Schale vom Kern entfernt ist, umso höher ist das Energieniveau der darin enthaltenen Elektronen. Die Elektronenschalen werden vom Kern ausgehend mit K, L, M, usw. bezeichnet. Maximal können sich $2 \cdot n^2$ Elektronen auf einer Schale befinden.

Schale	n	Rechnung	max. Anzahl von Elektronen
K	1	$2 \cdot 1^2$	2
L	2	$2 \cdot 2^2$	8
M	3	$2 \cdot 3^2$	18
N	4	$2 \cdot 4^2$	32
O	5	$2 \cdot 5^2$	50
P	6	$2 \cdot 6^2$	72
Q	7	$2 \cdot 7^2$	98

Tabelle 1 Elektronenschalen und Elektronen

Da Atome nach außen elektrisch neutral sind, ist die Anzahl der Elektronen auf den Schalen und der Protonen im Atomkern gleich. Mithilfe des Periodensystems der Elemente kann das Atommodell genau bestimmt werden. Das System ist unterteilt in Gruppen (waagerechte Liste I-VIII) und Perioden (senkrechte Liste 1-7). Es gibt acht Haupt- und zehn Nebengruppen sowie sieben Perioden. Aus der Hauptgruppennummer wird gelesen, wie viele Elektronen sich auf der äußeren Schale befinden. Die Nummer der Periode sagt aus, wie viele Schalen ein Atom hat. Abbildung 3 erklärt ein Element aus dem Periodensystem und Abbildung 4 zeigt das zugehörige Modell. Die Ordnungszahl gibt die Anzahl der Protonen und Elektronen an.

3	Ordnungszahl
Li	Elementsymbol
6,9	relative Atommasse

Abbildung 3 Beispiel eines Elements aus dem Periodensystem

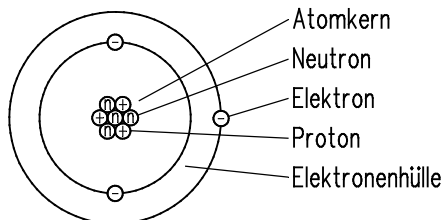


Abbildung 4 Aufbau eines Lithiumatoms

Auf das Periodensystem der Elemente soll hier nicht weiter eingegangen werden. Ihm können aber noch weitere Angaben zu den Elementen entnommen werden.

Periode	Hauptgruppen		Nebengruppen										Hauptgruppen					
	I a	II a	III b	IV b	V b	VI b	VII b	VIII	VIII	VIII	I b	II b	III a	IV a	V a	VI a	VII a	VIII
1	1 H 1,0																	2 He 4,0
2	3 Li 6,9	4 Be 9,0											5 B 10,8	6 C 12,0	7 N 14,0	8 O 16,0	9 F 19,0	10 Ne 20,2
3	11 Na 23,0	12 Mg 24,3											13 Al 27,0	14 Si 28,1	15 P 31,0	16 S 32,1	17 Cl 35,5	18 Ar 39,9
4	19 K 39,1	20 Ca 40,1	21 Sc 45,0	22 Ti 47,9	23 V 50,9	24 Cr 52,0	25 Mn 54,9	26 Fe 55,8	27 Co 58,9	28 Ni 58,7	29 Cu 63,5	30 Zn 65,4	31 Ga 69,7	32 Ge 72,6	33 As 74,9	34 Se 79,0	35 Br 79,9	36 Kr 83,8
5	37 Rb 85,5	38 Sr 87,6	39 Y 88,9	40 Zr 91,2	41 Nb 92,9	42 Mo 95,9	43 Tc 99	44 Ru 101,1	45 Rh 102,9	46 Pd 106,4	47 Ag 107,9	48 Cd 112,4	49 In 114,8	50 Sn 118,7	51 Sb 121,8	52 Te 127,6	53 I 126,9	54 Xe 131,3
6	55 Cs 132,9	56 Ba 137,3	57...71	72 Hf 178,5	73 Ta 180,9	74 W 183,9	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,1	79 Au 197,0	80 Hg 200,6	81 Tl 204,4	82 Pb 207,2	83 Bi 209,0	84 Po 210	85 At 210	86 Rn (222)
7	87 Fr 223	88 Ra 226	89...103	104 Ku 261	105 Ha	(gekürzte Darstellung)												

Wichtige Elemente mit Kurzzeichen

Wasserstoff	H	Natrium	Na	Chlor	Cl	Silber	Ag
Helium	He	Magnesium	Mg	Calcium	Ca	Zinn	Sn
Kohlenstoff	C	Aluminium	Al	Eisen	Fe	Gold	Au
Stickstoff	N	Silicium	Si	Nickel	Ni	Quecksilber	Hg
Sauerstoff	O	Phosphor	P	Kupfer	Cu	Blei	Pb
Neon	Ne	Schwefel	S	Zink	Zn	Uran	U

Abbildung 5 Periodensystem der Elemente

Die Gegenstände unseres täglichen Lebens setzen sich aus Atomen oder Molekülen zusammen. Bei den für die Technik so wichtigen kristallinen Materialien wie den Metallen, sind Atome in einer Gitterstruktur zusammengebaut. Nichtkristalline feste Stoffe sowie Flüssigkeiten und Gase bestehen aus Molekülen. Je zwei solcher Atome können einen gegenseitigen Einfluss aufeinander ausüben, wenn sie sich nahe genug sind. Sie „spüren“ sich gegenseitig oder man sagt, **sie üben eine Wechselwirkung aufeinander aus**. In der Physik unterscheidet man vier grundlegende Arten von Wechselbeziehungen:

- **Gravitationswechselwirkung**
Sie ist die schwächste aller Wechselwirkungen, die aber eine große Reichweite hat. Sie bindet die Sonne und Planeten an unser Sonnensystem und bewirkt die Gewichtskraft aller Körper auf der Erdoberfläche.
- **Elektromagnetische Wechselwirkung**
Sie bindet Elektronen an Atome, kettet Atome zu Molekülen und Kristallen zusammen.
- **Starke Wechselwirkung**
Sie ist die stärkste in der Natur bekannte Kraft und bindet die Protonen und Neutronen zu den Atomkernen aller Elemente.
- **Schwache Wechselwirkung**
Sie spielt bei den leichten Teilchen und zwischen leichten und schweren Teilchen eine Rolle. Sie ist aber in der Mechanik uninteressant.

Die Physiker bezeichnen alle Gegenstände der Natur, die sich aus den Grundbausteinen Molekül und Atom zusammensetzen, als Körper (z.B. Eisen, Holz, Wasser, Sauerstoff usw.). Lichtstrahlen, Radiowellen und Strahlungen bei radioaktiven Stoffen sind aber keine Körper, da sie nicht an Atome oder Moleküle gebunden sind. Körper werden an ihren Zustandsformen unterschieden, den so genannten **Aggregatzuständen**. Es gibt drei Aggregatzustände: fest, flüssig und gasförmig. Wie vorab beschrieben üben die Moleküle bzw. Atome aller Stoffe aufeinander Anziehungskräfte aus. Diesen Molekularkräften wirken abstoßende Kräfte entgegen, die eine Folge der thermischen Bewegung sind, d.h. Schwingungen der Moleküle auf Grund der in ihnen enthaltenen Wärmeenergie.

Feste Körper

Sie haben eine bestimmte Form und ein bestimmtes Volumen. Die Moleküle oder Atome sind in einer festen Struktur untereinander verbunden, um die herum sie ihre Schwingungen ausführen.

Flüssige Körper

Sie haben ein bestimmtes Volumen, aber keine bestimmte Form. Sie passen sich den Gefäßen an, in denen sie sich befinden. Die starken Schwingungen lassen keine feste Lage der Moleküle zu. Die Moleküle sind nicht fest miteinander verbunden, aber durch die Molekularkräfte verbleiben sie miteinander in Kontakt.

Gasförmige Körper

Sie haben weder ein bestimmtes Volumen, noch eine bestimmte Form. Die Schwingungen sind derart stark, dass die Abstände der Teilchen zu groß sind, als dass sie von den Molekularkräften zusammengehalten werden. Die Moleküle bewegen sich frei im Raum.

Ein Körper kann seinen Aggregatzustand ändern, wenn ihm Energie in Form von Wärme zugeführt oder entzogen wird.

Maße zur Beschreibung eines Körpers oder Stoffes

Bei einer Bewegungsänderung eines Körpers reagiert dieser träge. Es muss ein Widerstand überwunden werden. Ein Maß für die Trägheit ist die **Masse m**. Sie ist eine SI-Basisgröße. Die Masse eines Körpers ist unabhängig vom Ort. Sie ist auch ein geeignetes Maß für die Menge, d.h. die Anzahl der Atome oder Moleküle in einem Körper. Die Maßeinheit ist das Kilogramm (kg). Sie ist durch einen Eichkörper festgelegt. Die Balkenwaage ist ein Messinstrument für die Masse. Hier werden zwei Körper

miteinander verglichen. Ist die Waage im Gleichgewicht, so haben die Körper die gleiche Masse.

Ein Beispiel für Masse

Eine Tüte voll Zucker besteht aus einer bestimmten, aber sehr großen Anzahl von Zuckermolekülen. Die Anzahl der Moleküle bleibt an jedem Ort gleich, ob auf der Erde oder auf dem Mond.

Weitere Maße für die Beschreibung eines Körpers oder eines Stoffes sind die Dichte und die Wichte. Die Dichte beschreibt, welche Masse sich in einer Volumeneinheit befindet.

Definition:

Die Dichte ρ eines Körpers ist der Quotient aus der Masse m und dem Körpervolumen V . Die Einheit der Dichte ist $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; gebräuchliche (SI-fremde) Einheiten

$$\text{sind } 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}.$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Die Maßzahlen der Dichte für die Elemente sind in Tabellenbüchern und Formelsammlungen beschrieben (siehe hierzu Tabelle 2). Die Maßzahlen der Dichte für andere Stoffe können ebenfalls aus Tabellenbüchern entnommen werden.

Element	Bezeichnung	ρ in kg/dm^3
Metalle		
Eisen	Fe	7,86
Nickel	Ni	8,90
Kupfer	Cu	8,96
Lithium	Li	0,53
Natrium	Na	0,97
Magnesium	Mg	1,74
Titan	Ti	4,54

Element	Bezeichnung	ρ in kg/m^3
Gase		
Wasserstoff	H	0,07
Helium	He	0,15
Sauerstoff	O	1,15
Neon	Ne	1,20

Tabelle 2 Dichte einiger Elemente

Lehrbeispiel

Bestimmen Sie die Länge eines Kupferdrahtes mit einem Querschnitt von $2,5 \text{ mm}^2$ und einer Masse von 5 kg !

Lösung

Gegeben: $m = 5 \text{ kg}$

$$A = 2,5 \text{ mm}^2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\rho = 8,96 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 8,96 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Gesucht: l

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = A \cdot l$$

$$\rho = \frac{m}{A \cdot l}$$

$$\Rightarrow l = \frac{m}{A \cdot \rho} = \frac{5 \text{ kg} \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2,5 \text{ m}^2 \cdot 8,96 \text{ kg}} \approx 223 \text{ m}$$

$$l = \frac{5 \text{ kg}}{2,5 \text{ mm}^2 \cdot \frac{\text{dm}^2}{10^4 \text{ mm}^2} \cdot 8,96 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}}$$

$$\underline{\underline{l = 2232 \text{ dm} = 223,2 \text{ m}}}$$

2.2 Kräfte

2.2.1 Grundeigenschaften von Kräften

Jeder Körper widersetzt sich einer Bewegungsänderung durch seine Masse. **Der Körper reagiert träge (Massenträgheit).**

Versuch:

Zwei Personen (A und B) wollen ihre Kräfte vergleichen. Sie veranstalten auf einer Wiese ein Tauziehen. Jeder der beiden nimmt ein Ende des Seils in die Hand, und die Person B zieht es in die entgegengesetzte Richtung (180°) wie Person A.

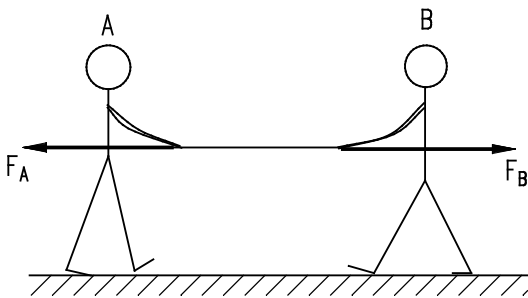


Abbildung 6 Tauziehen

Beide ziehen mit voller Kraft F_A und F_B , doch das Seil und die beiden Personen bewegen sich nicht. Sie sind in Ruhe. Die Folgerung aus diesem Versuch ist, dass beide Personen gleich stark sind. Beide ziehen das Seil mit gleicher Kraft in entgegengesetzter Richtung. Die Kräfte sind im Gleichgewicht.

$$F_A = F_B$$

Allgemein: Jeder Partner übt auf den anderen eine **Kraft** aus. Die beiden Kräfte, die wegen der entgegengesetzten Richtung auf die beiden Partner wirken, werden **Kraft** und **Gegenkraft** oder **Actio** und **Reactio** genannt.

Betrachten wir noch einmal den Versuch „Tauziehen“. Nach einer gewissen Zeit wird die Person B schwächer. Die linke Person ist stärker und zieht das Seil mit einer größeren Kraft. Dies bedeutet, die Kraft F_A ist größer als die Kraft F_B .

$$F_A > F_B$$

Dies hat zur Folge, dass Person B in Richtung von Person A gezogen wird. Bei Person B erfolgt eine Bewegungsänderung, sie wird beschleunigt.

Versuch:

Befinden sich Personen in einem Auto, so bemerken diese beim Beschleunigen eine Kraft, die sie in die Fahrzeugsitze drückt, beim Abbremsen wird eine Kraft spürbar, die sie nach vorne schiebt. Bei konstanter Geschwindigkeit ist dagegen keine Krafteinwirkung von den Personen bemerkbar.

Die Beobachtungen der Personen im Auto verdeutlichen einen Zusammenhang zwischen dem Bewegungszustand der Masse von Körpern und dessen Geschwindigkeitsänderung. Sowohl beim Beschleunigen als auch beim Abbremsen widersetzt sich die Masse der Körper zunächst der Änderung des Bewegungszustandes. Die Masse ist bestrebt, den vorliegenden Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung beizubehalten. Diese Eigenschaft wird als **Trägheit der Masse** bezeichnet.

Um den Bewegungszustand einer Masse zu ändern, sie also zu beschleunigen oder abzubremesen, ist eine Kraft erforderlich. Für die Personen im Auto wird die Kraft beim Beschleunigen durch den Motor aufgebracht, beim Verzögern durch die Bremsen des Fahrzeugs.

Definition:

Die Kraft F ist die Ursache für eine Form- oder Bewegungsänderung eines Körpers. Bei konstanter Masse m ist die Kraft F proportional zur Momentanbeschleunigung a . Die Einheit der Kraft ist Newton (N).

$$F = m \cdot a$$

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$

Lehrbeispiel 1

Wie groß ist die Masse eines Wagens, auf den eine Kraft von 4000 N wirkt und der dadurch eine Beschleunigung von 4 m/s^2 erfährt?

Lösung

Gegeben $F = 4000 \text{ N}$; $a = 4 \text{ m/s}^2$

Gesucht: m

$$F = m \cdot a \Rightarrow m = \frac{F}{a}$$

$$m = \frac{4000 \text{ N}}{4 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{1000 \text{ kg}}}$$

Die Wirkung einer Kraft lässt sich genau beschreiben. Hierzu sind drei Angaben notwendig:

- der Betrag der Kraft (z.B. $F = 18 \text{ N}$)
- die Wirklinie (WL) der Kraft
- der Richtungssinn der Kraft vom Angriffspunkt

Größen, die erst durch ihren Betrag und ihre Richtung eindeutig bestimmt sind, werden Vektoren genannt. Die physikalischen Größen Kraft und Beschleunigung sind Vektoren.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Der Kraftvektor wird zeichnerisch als Pfeil dargestellt. Die Länge des Pfeils gibt, bei Beachtung eines bestimmten Maßstabs, den Betrag der Kraft an. Die Pfeilspitze bestimmt den Richtungssinn. Die Wirklinie zeigt, wo und unter welchem Winkel zur Bezugsachse die Kraft wirkt.

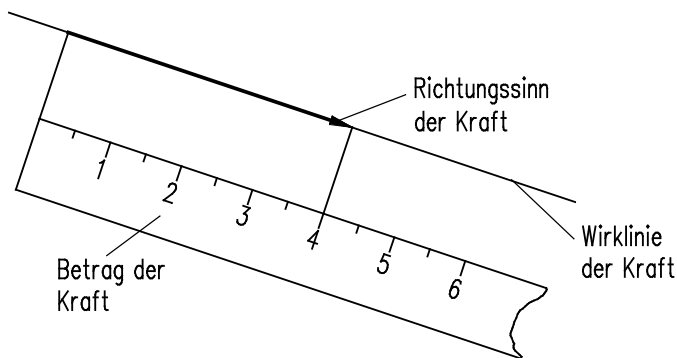


Abbildung 7 Darstellung eines Kraftvektors

Ist ein Körper frei beweglich, so verschiebt ihn die Kraft in der Richtung ihrer Wirklinie, ohne ihn zu drehen.

Statik

Die Aufgabe der Statik ist es, in ruhenden Bauwerken, Konstruktionen usw. bestimmte unbekannte Kräfte zu ermitteln, um dadurch Bauteile richtig dimensionieren zu können, damit sie den Belastungen standhalten. Ein Körper in Ruhe bedeutet, dass er im **Gleichgewicht** ist. Die geometrische Addition aller äußeren Kräfte, die auf einen Körper im Gleichgewicht wirken, sind gleich Null.

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

Fast alle Lösungsansätze der Statik können auf die nachfolgend beschriebenen Grundoperationen zurückgeführt werden. Sie sind das „kleine Einmaleins der Statik“ und müssen deshalb geläufig sein. Oft ist es zweckmäßiger, Teile eines Systems der äußeren Kräfte in Gedanken zu ändern, um besser die gesuchten Kräfte ermitteln zu können. Dabei dürfen die übrigen Kräfte aber nicht beeinflusst werden. Erlaubt sind alle gedachten Änderungen, die die Summe der einzelnen Kräfte unverändert lassen. Nur dann bleiben die Bestimmungsgleichungen erhalten. Die zu bestimmende Unbekannte wird nicht beeinflusst.

1. Parallelogrammsatz

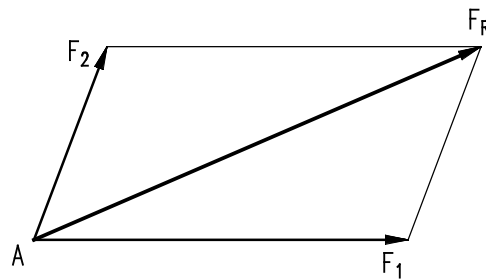


Abbildung 8 Kräfteparallelogramm

Greifen zwei bekannte Kräfte einen Körper in einem Punkt an, so können diese durch die Anwendung des Parallelogrammsatzes auf eine resultierende Kraft reduziert werden.

Definition:

Die Resultierende F_R zweier in einem Punkt A angreifender Kräfte F_1 und F_2 ist die Diagonale des aus beiden Kräften gebildeten Parallelogramms.

2. Krafteck

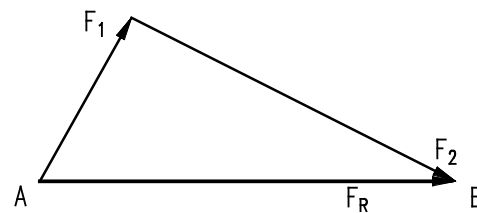


Abbildung 9 Krafteck

Aus dem Parallelogrammsatz folgt, dass Kräfte, wie alle Vektoren, geometrisch addiert werden. Dies kann zeichnerisch durch das Krätedreieck gelöst werden. Hier werden die Kräfte ihrem Betrag und ihrem Richtungssinn entsprechend maßstabsgerecht aneinander gereiht. Die Reihenfolge ist hierbei nicht relevant.

Definition:

Im Krafteck ist die Resultierende F_R die Verbindungslinie vom Anfangspunkt A der zuerst gezeichneten zum Endpunkt der zuletzt gezeichneten Kraft.

3. Zerlegung von Kräften

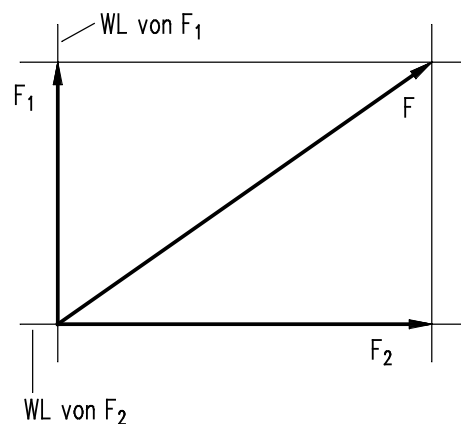


Abbildung 10 Zerlegung einer Kraft F

Die Umkehrung der Kräfte-reduktion ist die Zerlegung einer Kraft F in zwei Komponenten. Die Voraussetzung hierfür ist aber, dass die Wirklinien der einzelnen Komponenten bekannt sind.

Definition:

Jede Kraft F darf in Teilkräfte (Komponenten) zerlegt werden, die an dem selben Angriffspunkt angreifen. Hierzu werden die Wirklinien der Komponenten in den Anfangspunkt A und den Endpunkt E gelegt, sodass ein Kräfteparallelogramm entsteht, aus dem die Beträge der Kräfte F_1 und F_2 unter Berücksichtigung des Maßstabs abgelesen werden können.

4. Erweiterungssatz

Bei dieser Gesetzmäßigkeit muss beachtet werden, dass zwei Kräfte mit gleichem Betrag und gleicher Wirklinie aber entgegengesetztem Richtungssinn sich aufheben, weil der Betrag der resultierenden Kraft gleich Null ist. Werden solche Kräfte einem System hinzugefügt, treten keine Veränderungen auf.

Definition:

In einem Kräftesystem dürfen Kräfte hinzugefügt oder weggenommen werden, wenn sie sich das Gleichgewicht halten, d.h. wenn sie gleich groß und gegensinnig sind und auf der gleichen Wirklinie liegen.

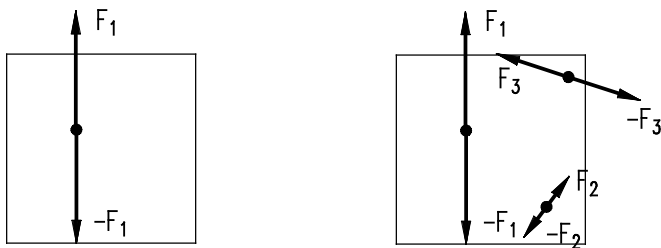


Abbildung 11 Erweiterungssatz

5. Längsverschiebungssatz

Eine Kraft F wirkt auf einen Körper im Punkt A (Abbildung 12a). Das System wird, wie beim Erweiterungssatz beschrieben, mit zwei Kräften gleichen Betrages und entgegengesetzter Richtung im Punkt B erweitert (Abbildung 12b). Wichtig hierbei ist, dass die Kräfte auf der gleichen Wirklinie liegen wie die Anfangskraft F und dass die Beträge gleich der Anfangskraft sind. Da sich die Kraft F im Punkt A und die entgegen gerichtete Kraft F' im Punkt B aufheben, können Sie entfernt werden. Es bleibt die Kraft F , die aber nicht mehr im Punkt A , sondern im Punkt B wirkt (Abbildung 12c).

Definition:

Eine Kraft F darf längs ihrer Wirkungsline WL verschoben werden, ohne dass sich die Wirkung auf den Körper ändert.

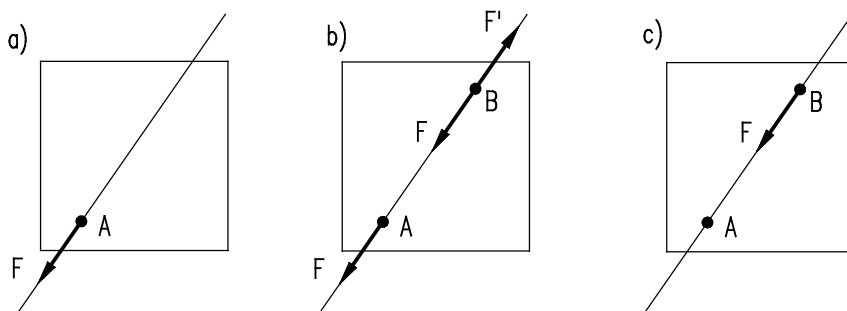


Abbildung 12 Längsverschiebungssatz

6. Parallelverschiebungssatz

Diese Gesetzmäßigkeit lässt sich auch wieder mit dem Ergänzungssatz begründen. Wieder wird das System um zwei gleich große, entgegengerichtete Kräfte ergänzt. Die ergänzten Kräfte müssen auch den gleichen Betrag wie die Ursprungskraft haben. In diesem Fall ist die Wirklinie aber parallel um den Abstand l zur ursprünglichen verschoben worden. Durch das Entfernen der Ursprungskraft und der entgegengerichteten verschobenen Kraft F' bleibt die Kraft F in Bezug mit dem Abstand l übrig (Drehmoment).

Definition:

Eine Kraft F darf auf eine parallele Wirklinie mit dem Abstand l verschoben werden, wenn ein Drehmoment $M = \text{Kraft } F \text{ mal Verschiebeabstand } l$ hinzugefügt wird.

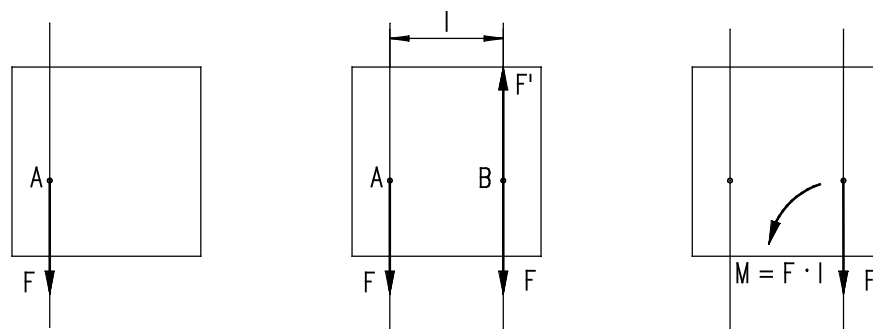


Abbildung 13 Parallelverschiebungssatz

Ermittlung der resultierenden Kraft eines zentralen Kräftesystems

Als ein **Kräftesystem** wird ein Bauteil bezeichnet, auf dem gleichzeitig beliebig viele Kräfte wirken. Wird ein **zentrales Kräftesystem** beschrieben, so schneiden sich alle Wirklinien der Kräfte gemeinsam in einem Punkt. Bei einem **allgemeinen Kräftesystem** können die Wirklinien der Kräfte mehr als einen Schnittpunkt haben.

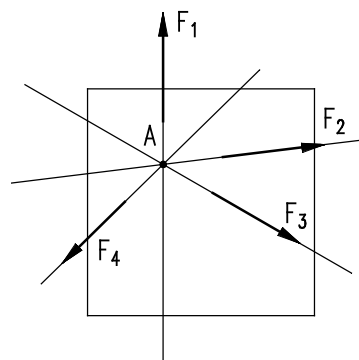


Abbildung 14 Zentrales Kräftesystem

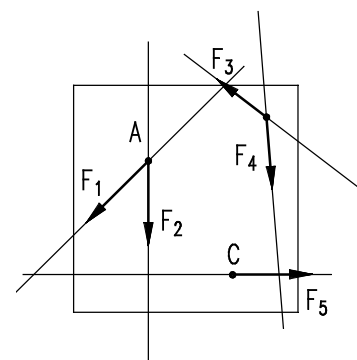


Abbildung 15 Allgemeines Kräftesystem

In einem Kräftesystem sind alle Kräfte nach Betrag, Lage und Richtungssinn bekannt.

Um eine Aussage über die Wirkung des Kräftesystems auf ein Bauteil machen zu können (z.B. Verschiebung), muss die resultierende Kraft F_R ermittelt werden.

Es gibt zwei Lösungsmethoden zu dieser Aufgabenstellung: Zeichnerisch und rechnerisch.

a) Zeichnerisches Verfahren

Es wird ein Lageplan maßstabsgetreu aufgezeichnet, der das zu betrachtende Bauteil mit allen maßstäblich gezeichneten Kräften mit Wirklinien und Richtungssinn aufzeigt. Dieser wird als Kräfteplan bezeichnet.

b) Rechnerisches Verfahren

Eine Lageskizze, die nicht maßstäblich sein muss, zeigt alle Längenmaße und Winkel, sowie alle Kräfte mit Wirklinie, Richtungssinn und Winkel zwischen den Kräften. Hieraus kann in Form von Gleichungen und Gleichungssystemen ein Kräfteplan erstellt werden.

Zu a) Zeichnerisches Verfahren

Zunächst wird der zeichnerische Lösungsansatz betrachtet. Hierbei müssen die nachfolgenden Schritte der Reihenfolge nach eingehalten werden.

1. Lageplan mit den Wirklinien aller Kräfte winkelgetreu in ein rechtwinkliges Achsenkreuz einzeichnen.
2. Im Kräfteplan die gegebenen Kräfte in beliebiger Reihenfolge maßstäblich aneinander reihen.
3. Anfangs- und Endpunkt des Kräftezuges verbinden, Richtungssinn eintragen.
4. Resultierende Kraft F_R in den Zentralpunkt des Lageplans übertragen.
5. Ergebnis des Betrages und des Winkels ablesen.

Lehrbeispiel 2

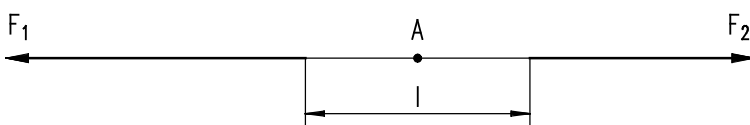
Es findet ein Tauziehen mit zwei Personen statt. Das Seil hat die Länge von $l = 2 \text{ m}$. Teilnehmer 1 zieht das Seil mit einer Kraft von $F_1 = 400 \text{ N}$ in eine Richtung, Teilnehmer 2 mit einer Kraft von $F_2 = 300 \text{ N}$ in entgegengesetzter Richtung.

Welche Richtung und welchen Betrag hat die resultierende Kraft F_R in Punkt A (bezogen auf die Mitte des Seils)?

Wichtig: Den Maßstab festlegen: $100 \text{ N} \hat{=} 1 \text{ cm}$

Gegeben: $F_1 = 400 \text{ N} \hat{=} 4 \text{ cm}$; $F_2 = 300 \text{ N} \hat{=} 3 \text{ cm}$

Gesucht: \vec{F}_R



Lösung

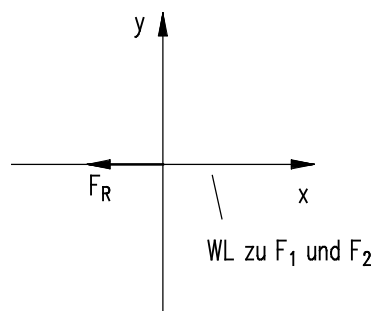
Als Erstes wird ein Koordinatensystem mit den Wirklinien der Kräfte F_1 und F_2 gezeichnet, dessen Ursprung in der Mitte des Seils im Punkt A liegt. Danach wird die Kraft F_1 parallel in den Kräfteplan verschoben und der Betrag und die Richtung der Kraft maßstäblich abgetragen.

Als Nächstes wird die Wirklinie der Kraft F_2 aus dem Koordinatensystem parallel verschoben, sodass sie durch den Endpunkt der Kraft F_1 geht. Der Betrag der Kraft F_2 wird ebenfalls maßstäblich abgetragen. Der Anfang der Kraft F_2 liegt im Endpunkt der Kraft F_1 .

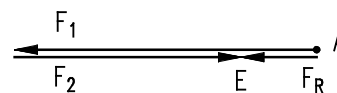
Verbindet man nun den Anfangspunkt A der Kraft F_1 mit dem Endpunkt E der Kraft F_2 , so ergibt sich hieraus die resultierende Kraft F_R . Die Kraft F_R wird durch Parallelverschiebung ins Koordinatensystem eingezeichnet.

Der Richtungssinn der Kraft ist von Punkt A zum Punkt E (gleiche Richtung wie F_A). Die Länge zwischen den beiden Punkten unter Berücksichtigung des Maßstabs ist der Betrag der Kraft $F_R = 100 \text{ N}$.

Achsenkreuz:



Kräfteplan:



$$l_{FR} = 1 \text{ cm} \Rightarrow F_R = 100 \text{ N}$$

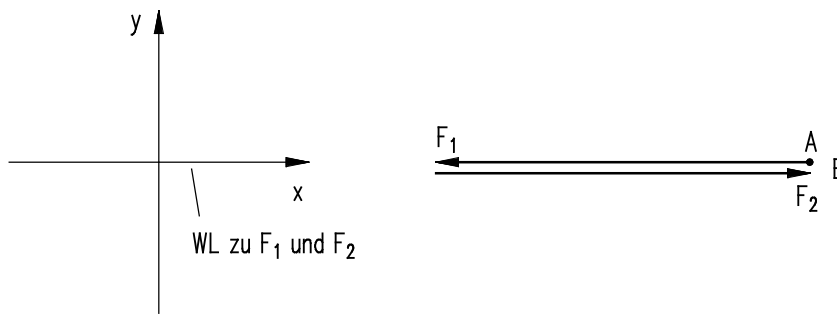
Lehrbeispiel 3

Es findet der gleiche Wettkampf mit anderen Personen statt. Teilnehmer 1 zieht diesmal mit 500 N in eine Richtung und Teilnehmer 2 mit 500 N in die entgegengesetzte.

Das Kräfteck soll gezeichnet werden unter der Annahme, dass die Kräfte, wie in Lehrbeispiel 2, in Punkt A wirken. Als Maßstab ist gewählt: $100 \text{ N} \hat{=} 1 \text{ cm}$

Lösung

Zunächst wird mit den Kräften F_1 und F_2 so vorgegangen wie im Lehrbeispiel vorab beschrieben. Der Endpunkt E der Kraft F_2 liegt im Anfangspunkt A der Kraft F_1 . Der Betrag der resultierenden Kraft F_R ist gleich Null. Die Kraft hat keine Wirkung. Das Kräftesystem ist in Ruhe, es ist im **Gleichgewicht**.



$$l_{FR} = 0 \text{ cm} \Rightarrow \underline{\underline{F_R = 0 \text{ N}}}$$

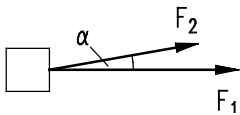
Lehrbeispiel 4

An einer würfelförmigen Kiste ist an einer Seite eine Lasche mittig befestigt. An dieser Lasche sind zwei Seile, an denen zwei Männer mit der Kraft $F_1 = 500 \text{ N}$ und $F_2 = 400 \text{ N}$ ziehen.

Mit welcher Kraft und in welche Richtung bewegt sich die Kiste, wenn die zwei Männer gemäß Skizze an dieser ziehen?

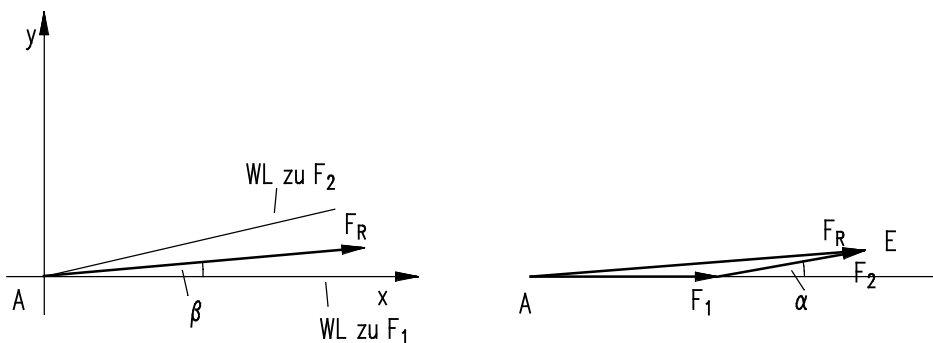
Gegeben: $F_1 = 500 \text{ N}$; $F_2 = 400 \text{ N}$; $\alpha = 10^\circ$

Gesucht: F_R ; α_R



Lösung

Zur Lösung dieser Aufgabe muss als Erstes ein Maßstab gewählt werden, mit dem die Beträge der Kräfte auf ein Längenmaß umgerechnet werden können. Danach wird das Koordinatensystem mit dem Ursprung A, dem Angriffspunkt der Kraft F_1 und F_2 und deren Wirklinien gezeichnet. Durch die Erstellung des Kräfteplans wird die resultierende Kraft F_R ermittelt und im Koordinatensystem übertragen. Durch das Ablesen des Betrags und des Winkels der Kraft unter Berücksichtigung des Maßstabes ist nun die resultierende Kraft F_R zu bestimmen.



Nach Abmessung der Größen und unter Berücksichtigung des Maßstabes ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$l_{FR} \approx 4,5 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad F_R \approx 900 \text{ N}; \alpha_R \approx 4,5^\circ$$

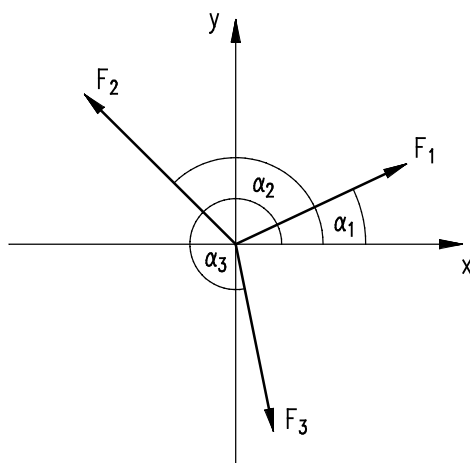
Je genauer im Lageplan die Winkel abgetragen werden, desto genauer ist auch das Ergebnis.

Lehrbeispiel 5

Ein zentrales Kräftesystem wird von drei Kräften beeinflusst. Die resultierende Kraft F_R soll bestimmt werden. Die bekannten Kräfte haben die folgenden Größen:

Gegeben: $F_1 = 15 \text{ N}; \alpha_1 = 30^\circ$
 $F_2 = 40 \text{ N}; \alpha_2 = 135^\circ$
 $F_3 = 30 \text{ N}; \alpha_3 = 280^\circ$

Gesucht: $F_R; \alpha_R$

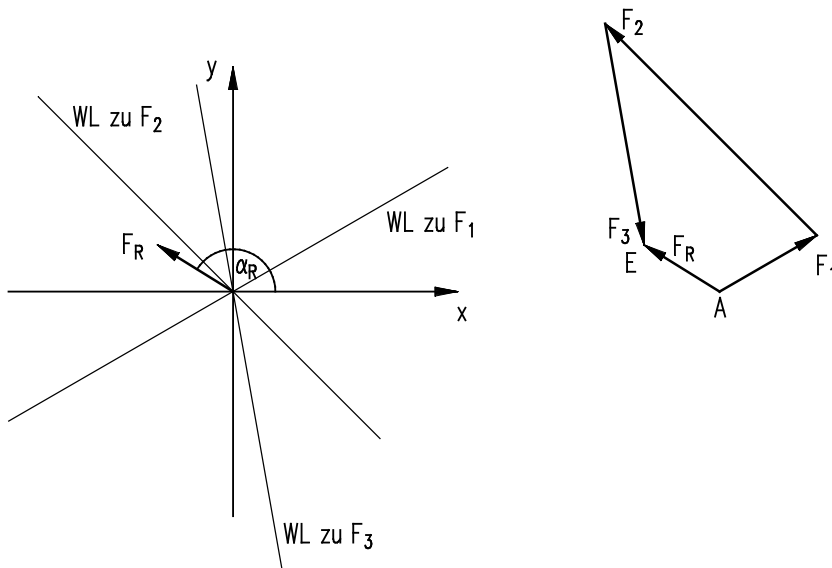


Lösung

Maßstab: $10 \text{ N} \triangleq 1 \text{ cm}$

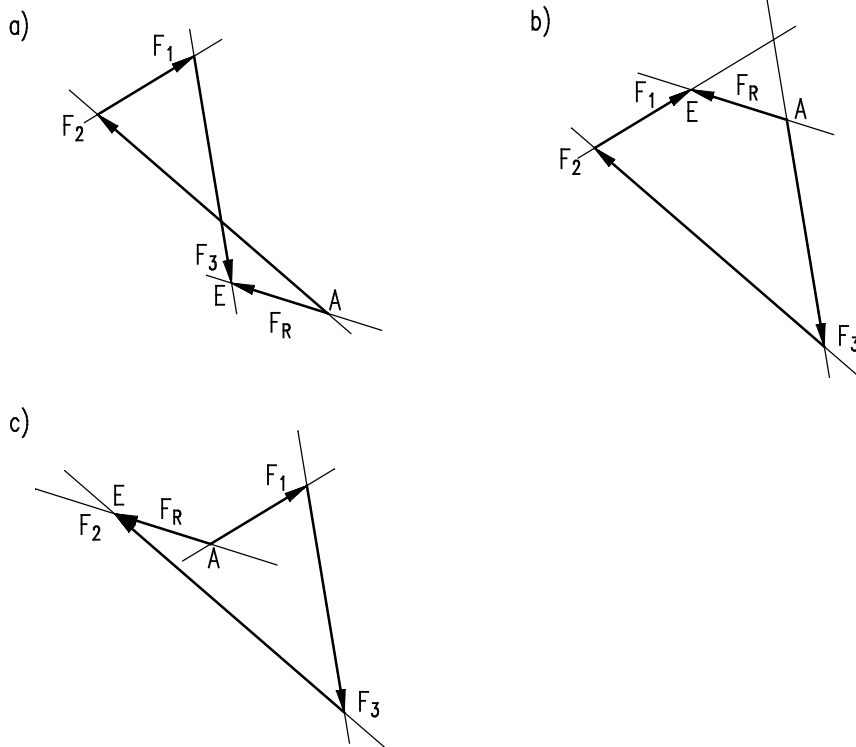
Wirken mehr als zwei Kräfte auf den selben Punkt eines Körpers, so ergibt sich die resultierende Kraft aus der Summe der Einzelkräfte. Die Einzelkräfte werden schrittweise vektoriell addiert. Hierzu wird wieder vorab das Koordinatensystem mit allen Wirklinien der Kräfte aufgezeichnet. Die erste Bezugskraft wird durch Parallelverschiebung in den Kräfteplan gezeichnet, und die anderen Vektoren werden nacheinander durch Parallelverschiebung ihrer Wirklinien und durch Abtragen des Betrages unter Berücksichtigung des Maßstabes aneinander gereiht.

Das Verfahren wurde in den vorigen Beispielen genau beschrieben. Die Reihenfolge der abgetragenen Kräfte ist F_1, F_2, F_3 . Sie ist aber bei der Lösung des Beispiels nicht relevant. Der resultierende Pfeil vom Anfangspunkt A (Ursprung des Koordinatensystems) der zuerst gezeichneten Kraft zum Endpunkt E der zuletzt gezeichneten Kraft ist die resultierende Kraft F_R (Krafteck).



$$l_{FR} = 1,2 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_R = 12 \text{ N}; \alpha_R = 148^\circ}}$$

Wie beschrieben ist die Reihenfolge der Kräfte nicht zu berücksichtigen. Dies soll in den nachfolgenden Darstellungen gezeigt werden. In Abbildung a) ist die Reihenfolge der aneinander gereihten Kräfte F_2, F_1, F_3 , in Abbildung b) F_3, F_2, F_1 und in Abbildung c) F_1, F_3, F_2 . Die entstandenen Kraftecke sind in ihrem Aussehen unterschiedlich, die resultierenden Kraftvektoren sind nach ihrem Betrag und ihrem Richtungssinn gleich den oben entwickelten.



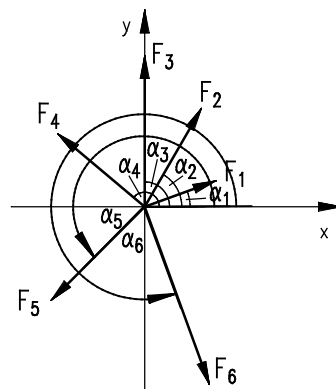
$$l_{FR} = 1,2 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_R = 12 \text{ N}; \alpha_R = 148^\circ}}$$

Lehrbeispiel 6

Die resultierende Kraft F_R des folgenden zentralen Kräftesystems soll zeichnerisch ermittelt werden. Die Kräfte und Winkel wirken, wie im Lageplan beschrieben, auf das System. Sie haben die folgenden Beträge:

Gegeben: $F_1 = 20 \text{ N}$; $\alpha_1 = 20^\circ$
 $F_2 = 30 \text{ N}$; $\alpha_2 = 60^\circ$
 $F_3 = 40 \text{ N}$; $\alpha_3 = 90^\circ$
 $F_4 = 30 \text{ N}$; $\alpha_4 = 140^\circ$
 $F_5 = 35 \text{ N}$; $\alpha_5 = 225^\circ$
 $F_6 = 50 \text{ N}$; $\alpha_6 = 290^\circ$

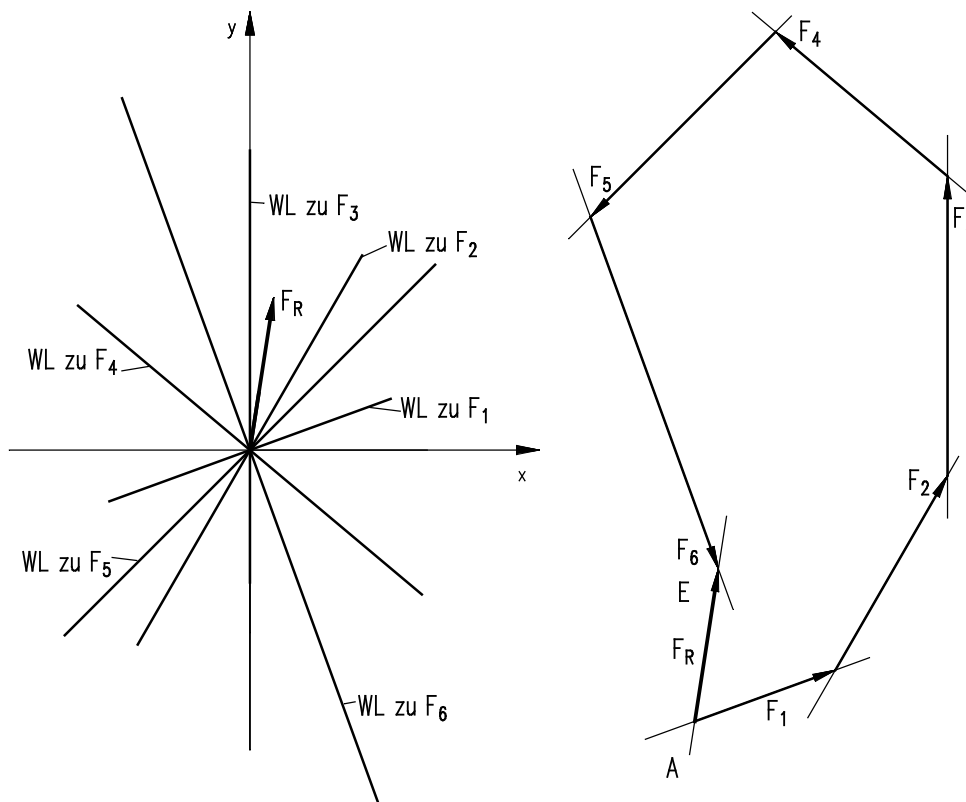
Gesucht: F_R ; α_R



Lösung

Maßstab: $10 \text{ N} \cong 1 \text{ cm}$

Die Wirklinien der Kräfte F_1 bis F_6 werden unter den gegebenen Winkeln in ein Koordinatensystem (Lageplan) eingezeichnet. Danach werden die einzelnen Kräfte durch Parallelverschiebung der Wirklinien in beliebiger Reihenfolge maßstabsgerecht aneinandergereiht. Die resultierende Kraft F_R ist dann der Pfeil vom Anfangspunkt A der ersten Kraft zum Endpunkt E der letzten.



$$l_{FR} = 2,1 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_R = 20 \text{ N}; \alpha_R = 81^\circ}} \quad (\text{abgelesen})$$

Zu b) Rechnerisches Verfahren

Nun wird der rechnerische Lösungsansatz betrachtet, mit den gleichen Beispielen.

Wie schon beschrieben werden Kräfte als Vektoren dargestellt. Durch die **geometrische Addition** ergibt sich die resultierende Kraft.

Hieraus folgt:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$$

Um die resultierende Kraft eines zentralen Kräftesystems rechnerisch zu ermitteln, müssen die einzelnen Kräfte in ihre grafischen x- und y-Komponenten zerlegt werden. Es entstehen rechtwinklige Dreiecke, die mithilfe des Satzes von Pythagoras und der Winkelfunktionen gelöst werden können (siehe Abbildung 16).

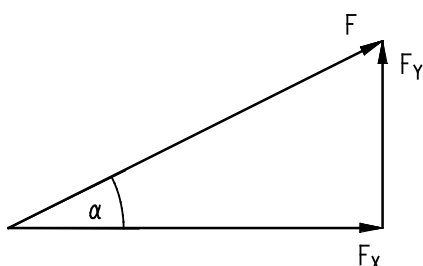


Abbildung 16 Zerlegung einer Kraft in ihre x- und y-Komponenten

Gleichungen zur Zerlegung von Kräften in die einzelnen x- und y-Komponenten:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

Die nachfolgenden Schritte müssen der Reihenfolge nach eingehalten werden, um zu einer rechnerischen Lösung zu gelangen.

1. Lageskizze mit allen gegebenen Kräften unmaßstäblich aufzeichnen und alle Kräfte in ihre x- und y-Komponenten zerlegen.
2. x- und y-Komponenten aller Kräfte berechnen.
3. Komponenten der resultierenden Kraft aus den x- und y-Komponenten berechnen (Vorzeichen beachten).
4. Richtungssinn der resultierenden Kraft nach diesen Vorzeichen der Komponenten bestimmen.
5. Betrag der resultierenden Kraft nach Pythagoras aus den Komponenten berechnen.
6. Neigungswinkel der Wirklinie der resultierenden Kraft mit der Tangentenfunktion aus den Komponenten bestimmen (Vorzeichen beachten).

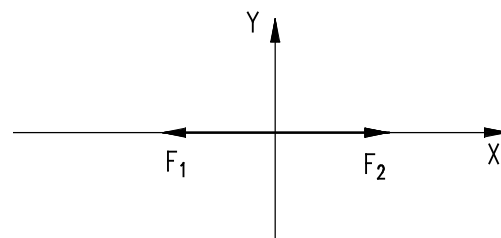
Hierzu muss noch angemerkt werden, dass dieser Lösungsansatz nur für ein zentrales Kräftesystem in der Ebene gilt. Wenn auf dieses System räumliche Kräfte wirken würden, müssten noch die z-Komponenten berücksichtigt werden. In unseren Aufgaben werden aber nur Kräfte in der Ebene betrachtet.

Lehrbeispiel 7

Lösen Sie die im Lehrbeispiel 2 gestellte Aufgabe rechnerisch!

Gegeben: $F_1 = 400 \text{ N}$; $\alpha_1 = 180^\circ$; $F_2 = 300 \text{ N}$; $\alpha_2 = 0^\circ$

Gesucht: F_R , α_R



Lösung

Sicher ist sofort zu erkennen, dass die beiden Kräfte auf einer Wirklinie liegen, in der x-Richtung. Die Lösung der Aufgabe kann dadurch vereinfacht werden. Trotzdem wird dieses Beispiel Schritt für Schritt erarbeitet.

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 400 \text{ N} \cdot \cos 180^\circ = -400 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 400 \text{ N} \cdot \sin 180^\circ = 0 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 300 \text{ N} \cdot \cos 0^\circ = 300 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 300 \text{ N} \cdot \sin 0^\circ = 0 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} = (-400 \text{ N}) + 300 \text{ N} = -100 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} = 0 \text{ N} + 0 \text{ N} = 0 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(-100 \text{ N})^2 + (0 \text{ N})^2} = 100 \text{ N}$$

$$\alpha_R = \arccos \frac{F_{Rx}}{F_R} = \arccos \frac{-100 \text{ N}}{100 \text{ N}} = 180^\circ$$

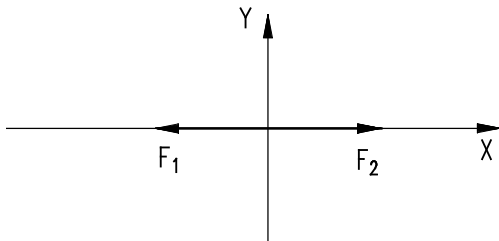
Aus den Lösungen ist zu entnehmen, dass die resultierende Kraft einen Betrag von 100 N hat und ihr Richtungssinn gleich der Kraft F_1 ist.

Lehrbeispiel 8

Lösen Sie die im Lehrbeispiel 3 gestellte Aufgabe rechnerisch!

Gegeben: $F_1 = 500 \text{ N}$; $\alpha_1 = 180^\circ$; $F_2 = 500 \text{ N}$; $\alpha_2 = 0^\circ$

Gesucht: F_R

**Lösung**

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 500 \text{ N} \cdot \cos 180^\circ = -500 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 500 \text{ N} \cdot \sin 180^\circ = 0 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 500 \text{ N} \cdot \cos 0^\circ = 500 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 500 \text{ N} \cdot \sin 0^\circ = 0 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} = (-500 \text{ N}) + 500 \text{ N} = 0 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} = 0 \text{ N} + 0 \text{ N} = 0 \text{ N}$$

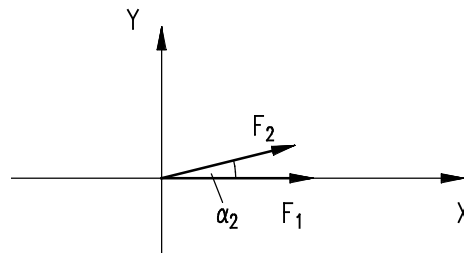
$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(0 \text{ N})^2 + (0 \text{ N})^2} = 0 \text{ N}$$

Lehrbeispiel 9

Lösen Sie die im Lehrbeispiel 4 gestellte Aufgabe rechnerisch!

Gegeben: $F_1 = 500 \text{ N}$; $\alpha_1 = 0^\circ$; $F_2 = 400 \text{ N}$; $\alpha_2 = 10^\circ$

Gesucht: F_R, α_R



Lösung

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 500 \text{ N} \cdot \cos 0^\circ = 500 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 500 \text{ N} \cdot \sin 0^\circ = 0 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 400 \text{ N} \cdot \cos 10^\circ = 393,9 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 400 \text{ N} \cdot \sin 10^\circ = 69,5 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} = 500 \text{ N} + 393,9 \text{ N} = 893,9 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} = 0 \text{ N} + 69,5 \text{ N} = 69,5 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(893,9 \text{ N})^2 + (69,5 \text{ N})^2} = \underline{\underline{896,6 \text{ N}}}$$

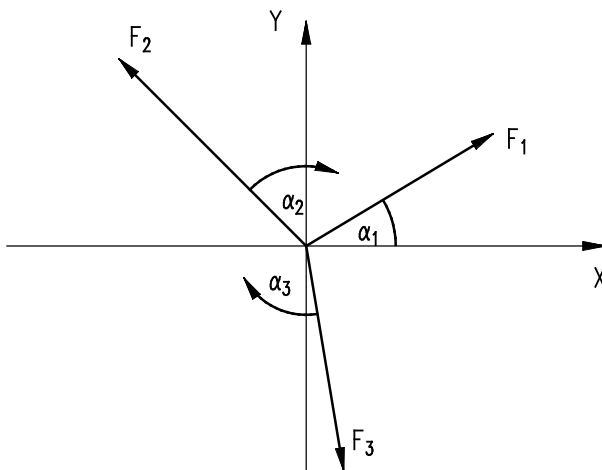
$$\alpha_R = \arccos \frac{F_{Rx}}{F_R} = \arccos \frac{893,9 \text{ N}}{896,6 \text{ N}} = \underline{\underline{4,45^\circ}}$$

Lehrbeispiel 10

Lösen Sie die im Lehrbeispiel 5 gestellte Aufgabe rechnerisch!

Gegeben: $F_1 = 15 \text{ N}$ $\alpha_1 = 30^\circ$
 $F_2 = 40 \text{ N}$ $\alpha_2 = 135^\circ$
 $F_3 = 30 \text{ N}$ $\alpha_3 = 280^\circ$

Gesucht: F_R, α_R

**Lösung**

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 15 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ = 13 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 15 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ = 7,5 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 40 \text{ N} \cdot \cos 135^\circ = -28,3 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 40 \text{ N} \cdot \sin 135^\circ = 28,3 \text{ N}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 30 \text{ N} \cdot \cos 280^\circ = 5,21 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 30 \text{ N} \cdot \sin 280^\circ = -29,6 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 13 \text{ N} + (-28,3 \text{ N}) + 5,21 \text{ N} = -10,1 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 7,5 \text{ N} + 28,3 \text{ N} + (-29,6 \text{ N}) = 6,2 \text{ N}$$

\vec{F}_R befindet sich im 2. Quadranten!

$$\tan \alpha_x = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

$$\alpha_x = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{6,2 \text{ N}}{-10,1 \text{ N}} = -31,5^\circ$$

$$\alpha_R = 180^\circ + \alpha = 180^\circ + -31,5^\circ = \underline{\underline{148,5^\circ}}$$

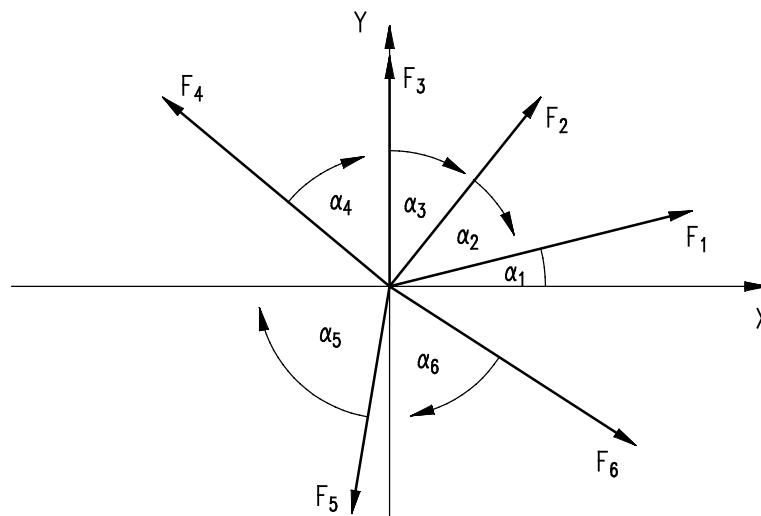
$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(-10,1 \text{ N})^2 + (6,2 \text{ N})^2} = \underline{\underline{11,9 \text{ N}}}$$

Lehrbeispiel 11

Lösen Sie die im Lehrbeispiel 6 gestellte Aufgabe rechnerisch!

Gegeben: $F_1 = 20 \text{ N}$; $\alpha_1 = 20^\circ$
 $F_2 = 30 \text{ N}$; $\alpha_2 = 60^\circ$
 $F_3 = 40 \text{ N}$; $\alpha_3 = 90^\circ$
 $F_4 = 30 \text{ N}$; $\alpha_4 = 140^\circ$
 $F_5 = 35 \text{ N}$; $\alpha_5 = 225^\circ$
 $F_6 = 50 \text{ N}$; $\alpha_6 = 290^\circ$

Gesucht: F_R ; α_R



Lösung

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 20 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ = 18,79 \text{ N} \\ F_{1y} &= F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 20 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ = 6,84 \text{ N} \\ F_{2x} &= F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 30 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ = 15 \text{ N} \\ F_{2y} &= F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 30 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ = 25,98 \text{ N} \\ F_{3x} &= F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 40 \text{ N} \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ N} \\ F_{3y} &= F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 40 \text{ N} \cdot \sin 90^\circ = 40 \text{ N} \\ F_{4x} &= F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 30 \text{ N} \cdot \cos 140^\circ = -22,98 \text{ N} \\ F_{4y} &= F_4 \cdot \sin \alpha_4 = 30 \text{ N} \cdot \sin 140^\circ = 19,28 \text{ N} \\ F_{5x} &= F_5 \cdot \cos \alpha_5 = 35 \text{ N} \cdot \cos 225^\circ = -24,75 \text{ N} \\ F_{5y} &= F_5 \cdot \sin \alpha_5 = 35 \text{ N} \cdot \sin 225^\circ = -24,75 \text{ N} \\ F_{6x} &= F_6 \cdot \cos \alpha_6 = 50 \text{ N} \cdot \cos 290^\circ = 17,1 \text{ N} \\ F_{6y} &= F_6 \cdot \sin \alpha_6 = 50 \text{ N} \cdot \sin 290^\circ = -46,98 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} + F_{6x} \\ F_{Rx} &= 18,79 \text{ N} + 15 \text{ N} + 0 \text{ N} + (-22,98 \text{ N}) + (-24,75 \text{ N}) + 17,1 \text{ N} = 3,16 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} + F_{6y} \\ F_{Ry} &= 6,84 \text{ N} + 25,98 \text{ N} + 40 \text{ N} + 19,28 \text{ N} + (-24,75) + (-46,98 \text{ N}) = 20,37 \text{ N} \end{aligned}$$

$$F_R^2 = F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 \Rightarrow F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(3,16 \text{ N})^2 + (20,37 \text{ N})^2} = \underline{\underline{20,61 \text{ N}}}$$

\vec{F}_R befindet sich im I. Quadranten!

$$\alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{20,37 \text{ N}}{3,16 \text{ N}} = \underline{\underline{81,2^\circ}}$$

2.2.2 Kraftwirkungen

Allgemein beschrieben ist die Kraft F das Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung a :

$$F = m \cdot a$$

Doch es gibt verschiedene Arten der physikalischen Größe Kraft. Diese Fälle werden nachfolgend beschrieben.

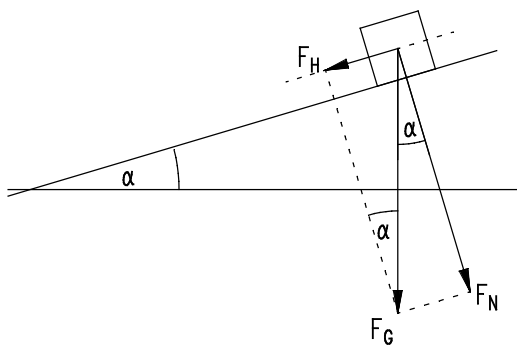


Abbildung 17 Kräfte auf einer schiefen Ebene

Gewichtskraft F_G (siehe Abbildung 17)

Die Gewichtskraft ist sicherlich die bekannteste aller Kraftarten. Sie beschreibt, mit welcher Kraft ein Körper in Richtung des Erdmittelpunktes wirkt. Beeinflusst wird die Gewichtskraft von der Masse m des betrachteten Körpers und der Erdbeschleunigung g . Die Erdbeschleunigung oder auch Fallbeschleunigung wird beim freien Fall eines beliebigen Körpers ohne äußeren Einfluss (z.B. Luftreibung) zur Erde gemessen. Die Ursache dieser gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Gravitationskraft der Erde. Da die Gravitationskraft der Erde abhängig vom Abstand zum Erdmittelpunkt ist, ist auch die Fallbeschleunigung und die Gewichtskraft von diesem Abstand abhängig. Auf einem Berg nimmt die Beschleunigung und damit die Gewichtskraft ab, in einem Tal, das sich unterhalb des Meeresspiegels befindet, nehmen beide zu (siehe Abbildung 17).

Die Erdbeschleunigung beträgt im Nahbereich der Erdoberfläche (0 m über normal Null):

$$g_{\text{Erde}} = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Die Fallbeschleunigung beträgt im Nahbereich der Mondoberfläche (0 m über normal Null):

$$g_{\text{Mond}} = 1,62 \text{ m/s}^2$$

Definition:

Die Gewichtskraft F_G eines Körpers ist das Produkt aus der Masse m des Körpers und der Fallbeschleunigung g . Die Gewichtskraft ist eine ortsabhängige Größe und ihr Vektor zeigt immer zum Erdmittelpunkt.

$$F_G = m \cdot g$$

Lehrbeispiel 1

Welche Gewichtskraft hat ein Mensch mit einer Masse von 80 kg auf der Erde und auf dem Mond bei 0 m über normal Null?

Lösung

Gegeben: $m = 80 \text{ kg}$
 $g_{\text{Erde}} = 9,81 \text{ m/s}^2$
 $g_{\text{Mond}} = 1,62 \text{ m/s}^2$

Gesucht: $F_{G \text{ Erde}}, F_{G \text{ Mond}}$

$$F_G = m \cdot g$$

$$\Rightarrow F_{G \text{ Erde}} = m \cdot g_{\text{Erde}} = 80 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{784,8 \text{ N}}}$$

$$F_{G \text{ Mond}} = m \cdot g_{\text{Mond}} = 80 \text{ kg} \cdot 1,62 \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{129,6 \text{ N}}}$$

Normalkraft F_N (siehe Abbildung 17)

Ein Körper, der sich auf einer Ebene befindet, übt senkrecht auf diese Ebene eine Kraft aus. Diese Kraft wird Normalkraft genannt. Die Größe der Kraft ist abhängig von dem Neigungswinkel α . Dieser Winkel beschreibt die Neigung der betrachteten Fläche zur Waagerechten. Ist der Neigungswinkel gleich Null (waagerechte Oberfläche), so ist die Normalkraft gleich der Gewichtskraft.

Definition:

Die Normalkraft F_N beschreibt die senkrecht auf eine Ebene wirkende Kraft. Sie ist das Produkt aus der Masse m des Körpers, der Fallbeschleunigung g und dem Kosinus des Neigungswinkels α .

$$F_N = F_G \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

Hangabtriebskraft F_H (siehe Abbildung 17)

Ein Körper mit der Form einer Kugel befindet sich auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α . Verursacht durch die Anziehungskraft der Erde rollt die Kugel parallel zur Ebene und in Richtung der resultierenden Hangabtriebskraft abwärts.

Definition:

Die Hangabtriebskraft F_H ist das Produkt aus der Masse m eines Körpers, der Fallbeschleunigung g und dem Sinus des Neigungswinkels α , der die Neigung der betrachteten Ebene beschreibt.

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

Gegenkraft

Betrachten wir einmal eine Kiste, die auf dem Fußboden einer Halle steht. Der Neigungswinkel des Bodens ist gleich Null und die Kiste ist in Ruhe. Es wirkt, wie beschrieben, die Gewichtskraft des Körpers senkrecht zur Ebene, zum Erdmittelpunkt. Da sich die Kiste aber nicht in die Richtung der Gewichtskraft bewegt, kann gefolgert werden, dass der Fußboden eine Kraft auf die Kiste ausübt, die **gegen** die Gewichtskraft wirkt, die so genannte **Gegenkraft (reactio)**. Die **Gegenkraft** hat in diesem Beispiel den gleichen Betrag wie ihre **Ursprungskraft (actio)**, sie wirkt ihr aber entgegen.

Allgemein beschrieben ist eine Gegenkraft (reactio) eine Kraft, die **gegen** ihre Ursprungskraft (actio) wirkt. Die Beträge dieser Kräfte müssen aber nicht gleich groß sein.

Lehrbeispiel 2

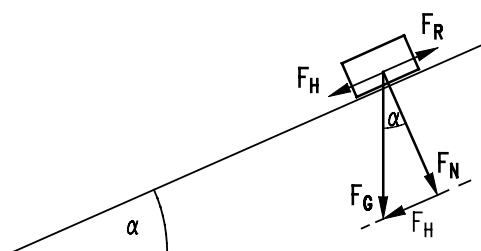
Eine Kiste steht auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel von 25° . Die Kiste hat eine Masse von 10 kg.

Bestimmen Sie die Normalkraft, die Gewichtskraft und die Hangabtriebskraft unter der Berücksichtigung, dass keine weiteren äußeren Kräfte das System beeinflussen!

Lösung

Gegeben: $\alpha = 25^\circ$
 $m = 10 \text{ kg}$

Gesucht: F_N, F_H, F_G



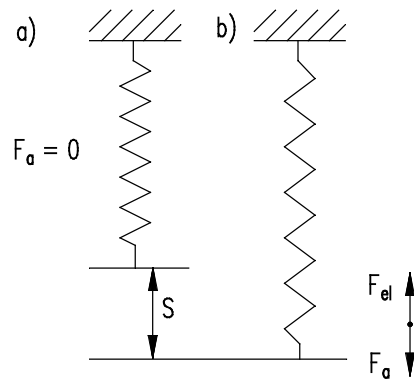
F_G : Gewichtskraft
 F_N : Normalkraft
 F_H : Hangabtriebskraft
 F_R : Reibungskraft
 α : Neigungswinkel

$$F_G = m \cdot g = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{98,1 \text{ N}}}$$

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 25^\circ = \underline{\underline{88,9 \text{ N}}}$$

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin \alpha = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 25^\circ = \underline{\underline{41,5 \text{ N}}}$$

Federkraft F_{Fe}



Kräfte verursachen aber nicht nur eine Beschleunigung, sondern durch das Einwirken von Kräften auf einen Körper kann dieser auch verformt werden. Umgekehrt üben verformte Körper auch Kräfte aus, die ihrer Ursache (der Verformung) entgegenwirken. Diese Kräfte werden elastische Kräfte oder auch Federkräfte genannt. Die Verformung bzw. Längenänderung s ist ein Maß für die verursachende Kraft.

Abbildung 18 Elastische Verformung von Federn

Versuch:

An zwei gleichartigen Federn, die an der Decke befestigt sind, wird jeweils ein Körper mit einer Masse von 5 kg bzw. 10 kg gehängt und die Längenänderung s der Federn abgemessen.

Bei der Abmessung wird festgestellt, dass die Längenänderung der Feder b, die mit einer Masse von 10 kg beansprucht wird, größer ist als die der Feder a. Die Gewichtskraft des Körpers an Feder b ist größer.

Versuch:

Zwei Federn aus unterschiedlichen Werkstoffen werden mit einem Körper mit der Masse von 5 kg wie im Beispiel vorher beschrieben belastet, und die Längenänderung der Federn wird durch Abmessen festgestellt.

Auch in diesem Beispiel wird festgestellt, dass die Längenänderung der Federn unterschiedlich ist. Die Federkraft ist also vom Werkstoff der Feder abhängig. Ebenso beeinflussen unterschiedliche Formen und Abmessungen von Federn deren Federkraft. All diese Abhängigkeiten werden in der Federkonstanten (oder Federsteifigkeit) c erfasst.

In den meisten Fällen ist die Federkonstante bekannt, andernfalls muss sie durch einen Versuch bestimmt werden.

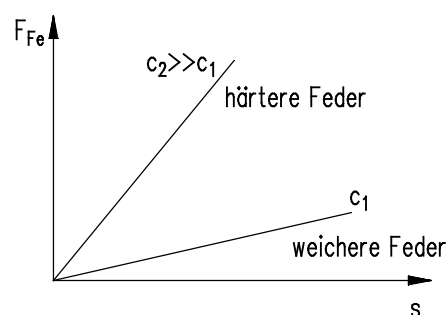


Abbildung 19 Federkonstanten

Definition:

Die Federkonstante oder Federsteifigkeit c gibt an, welche Kraft F für einen Federweg s von einem Millimeter erforderlich ist.

$$[c] = \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Alle festen Körper zeigen innerhalb von Grenzwerten der Verformung ein elastisches Verhalten. Dieses wird durch das Hookesche Gesetz beschrieben:

Definition:

Die elastische Kraft oder Federkraft F_{Fe} ist proportional der Federkonstanten c und dem Federweg s . Dieser Zusammenhang wird als Hookesches Gesetz bezeichnet.

$$F_{Fe} = c \cdot s$$

$$[F_{Fe}] = [c] \cdot [s] = \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \text{mm} = \text{N}$$

Diese Gesetzmäßigkeit findet ihre Anwendung bei der messtechnischen Erfassung von Kräften. Es werden z.B. Metallfedern verwendet, die schon bei kleinen Kräften eine relativ große Längenänderung der Federn verursachen. Durch die bekannte Federkonstante c ist es möglich, die Längenänderung in die Größe der Kraft umzurechnen und diese als Skala aufzutragen (Abbildung 20).

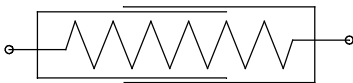


Abbildung 20 Aufbau eines Kraftmessers

Weitere Methoden zur Ermittlung von Kräften sind Dehnungsmessstreifen, piezoelektrischer Kristall und die Glasfaserbeanspruchung.

Werden mehrere Federn gekoppelt, so ergibt sich die resultierende Federkonstante c_{res} bei der:

Reihenschaltung von Federn:
$$\frac{1}{c_{res}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}$$

Parallelschaltung von Federn:
$$c_{res} = \sum_{k=1}^n c_k = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$$

Lehrbeispiel 3

Bei einer Feder, an die eine Kiste mit einer Masse von 10 kg gehängt wird, beträgt die gemessene Längenänderung 12 cm.

Welche Größe hat die Federkonstante c der Feder?

Lösung

Gegeben: $m = 10 \text{ kg}$; $s = 12 \text{ cm}$

Gesucht: c

$$F_G = m \cdot g = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = \underline{98,1 \text{ N}}$$

$$F_{Fe} = F_G$$

$$\Rightarrow F_{Fe} = F_G = c \cdot s$$

$$\Rightarrow c = \frac{F_{Fe}}{s} = \frac{98,1 \text{ N}}{120 \text{ mm}}$$

$$c = \underline{\underline{0,818 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}}$$

Reibungskraft F_R

Versuch:

Ein Klotz ruht auf einer waagerechten Unterlage. Parallel zu dieser Unterlage lässt man auf den Klotz eine Schubkraft F_S wirken, die von Null beginnend allmählich erhöht wird. Dabei zeigt sich, dass der Klotz anfänglich in Ruhe bleibt und erst ab einer bestimmten Größe der Schubkraft F_S zu gleiten beginnt. Wie kann man diesen Sachverhalt erklären?

Offensichtlich haftet der Klotz bei kleinen Werten der Schubkraft auf seiner Unterlage, wird also an seinem Platz mit einer Kraft festgehalten, bis diese durch Erhöhung der Schubkraft überwunden wird. Diese der Schubkraft entgegenwirkende Kraft ist die Haftreibungskraft F_R . Sie tritt nur als Reaktionskraft der angreifenden Schubkraft auf und hält deren Erhöhung stets „die Waage“, bis ein maximaler Wert überschritten wird. Dieser Maximalwert der Haftreibungskraft ist bei beginnender Gleitung (Bewegung) des Klotzes gerade überschritten. Nun ist festzustellen, dass sich bei weiterhin gleich bleibender Schubkraft der Klotz beschleunigt bewegt. Will man den Klotz mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, kann man die Schubkraft verringern, da die Gleitreibungskraft stets geringer als die Haftreibungskraft ist.

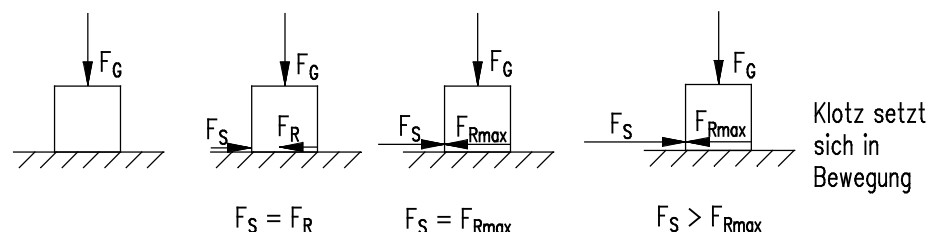


Abbildung 21 Reibung

Versuch:

Auf einer schiefen Ebene mit einem konstanten Neigungswinkel α rutscht ein Klotz, verursacht durch die Hangabtriebskraft, hinunter.

Die Beschaffenheit der Oberfläche ist in einem ersten Versuch ein glatter, gebohrter Fußboden, in einem zweiten Versuch rauher Asphalt.

Trotz der gleichen Masse des Klotzes und des gleichen Neigungswinkels in beiden Versuchen ist die Beschleunigung der Klötze unterschiedlich. Bei dem Versuch mit glattem, gebohrtem Fußboden rutscht der Klotz die Ebene schneller hinunter. Die Ursache liegt bei der Reibungskraft. Sie ist abhängig von der Beschaffenheit der Oberfläche der Ebene. Ist die Reibungskraft größer als die Hangabtriebskraft, bewegt sich der Körper nicht, er bleibt in Ruhe.

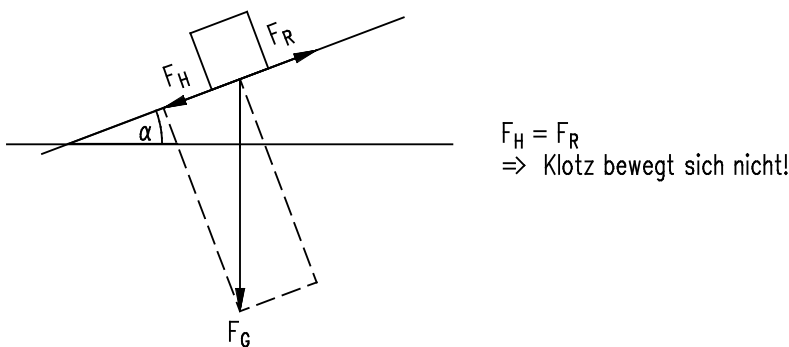


Abbildung 22 Haftreibung

Versuch:

Ein Klotz mit der Form eines Quaders hat Oberflächen unterschiedlicher Größe ($A_1 \neq A_2 \neq A_3$). Er liegt auf einer waagerechten Ebene. Die Masse m des Körpers beträgt 5 kg. An dem Körper ist ein Kraftmesser montiert, an dem in einer Richtung gezogen wird. Es soll die Kraft gemessen werden, die aufgewendet werden muss, um den Körper gerade zu beschleunigen. Der Versuch wird dreimal durchgeführt, und der Körper steht jeweils auf einer unterschiedlichen Oberfläche (A_1, A_2, A_3).

Bei der Messung wird festgestellt, dass, egal welche Größe die Auflagefläche des Körpers auf der Ebene hat, die aufgewendete Kraft zur Beschleunigung gleich ist. Die Reibungskraft ist unabhängig zu der Auflagefläche des Körpers.

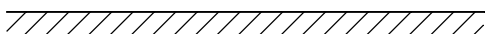
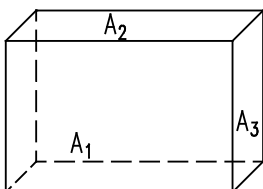


Abbildung 23 Reibungskraft und Auflagefläche

Versuch:

Der Versuchsaufbau ist gleich dem Vorversuch. Auf den Körper wird ein zweiter Körper gestellt, sodass sich die Masse verdoppelt. Wieder soll die Kraft gemessen werden, die aufgewendet werden muss, um den Körper gerade zu beschleunigen.

Die Kraft, die aufgewendet werden muss, um den Körper zu beschleunigen, ist bei Verdopplung der Masse ebenfalls doppelt so groß.

Versuch:

Ein Reifen mit der Masse m , der sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt, rollt auf einer tangential geraden Straße. Auf den Reifen wirkt keine zusätzliche Kraft zur Beschleunigung. Die Geschwindigkeit des Reifens soll beobachtet werden.

Die Geschwindigkeit des Reifens nimmt entlang der Wegstrecke ab, bis sie Null ist. Nach dem Gesetz der Trägheit der Masse hätte der Reifen mit gleicher Geschwindigkeit weiter rollen müssen. Es wirkt eine Gegenkraft auf ihn, die Rollreibung.

Durch weitere Versuche kann nachgewiesen werden, dass auch eine Reibung bei Gasen (z.B. Luft) existiert. Sie hat die gleiche Wirkung wie die vorab beschriebenen Reibungsarten.

Aus allen Reibungsversuchen lassen sich die folgenden Merksätze zu der Reibungskraft entwickeln:

- a) **Die Reibungskraft wirkt tangential zu der Berührungsfläche (Ebene).**
- b) **Die Reibungskraft ist proportional der Normalkraft.**
- c) **Bewegen sich die Berührungsfläche des Körpers und der Ebene trotz äußerer Krafteinwirkung nicht gegeneinander, so wird von der Haftreibung gesprochen.**
- d) **Bewegen sich die Berührungsfläche des Körpers und der Ebene wegen äußerer Krafteinwirkung gegeneinander, so wird von der Gleitreibung gesprochen.**
- e) **Die Reibungskraft ist unabhängig von der Größe der Gleitfläche.**
- f) **Rollende Körper werden durch den Rollwiderstand (Rollreibung) abgebremst.**
- g) **Bewegt sich ein Körper innerhalb bewegter Flüssigkeiten oder Gase so wird seine Geschwindigkeit durch Reibung verringert.**

Besonders eingegangen werden soll noch einmal auf die Haft- und Gleitreibung.

Die Haftreibung

Diese Reibungsart wird verursacht durch die Verzahnungswirkung der rauen, sich berührenden Oberflächen. Auch die Anziehungskräfte zwischen den Atomen der Körper spielen eine Rolle. Je stärker die Normalkraft senkrecht auf die Berührungsfläche wirkt, desto enger ist der Kontakt zwischen Körper und Unterlage und desto größer kann die maximale Haftreibung sein. Dieser enge Kontakt wird aber nur an drei Stellen vorhanden sein, sodass die Größe der Berührungsfläche keinen Einfluss haben kann.

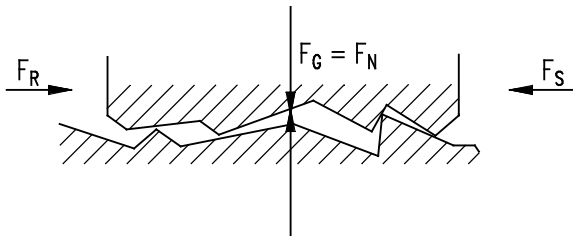


Abbildung 24 Berührung der Oberflächen

Die Haftreibung kann ein gewisses Maximum nicht überschreiten. Die maximale Haftreibung F_{Rmax} ist der Normalkraft proportional. Sie hängt nicht von der Größe der Berührungsfläche ab. Es gilt stets:

$$F_R \leq F_{Rmax} \quad \text{mit} \quad F_{Rmax} = \mu_0 \cdot F_N$$

Die Haftreibungszahl μ_0 hängt von den Werkstoffen und der Beschaffenheit der sich berührenden Oberflächen ab. Sie ist aber nicht von der Größe der Berührungsfläche abhängig. Die Werte der Haftreibungszahl verschiedener Werkstoffpaarungen kann aus Tabellenbüchern entnommen werden. In der nachfolgenden Tabelle sind einige Beispiele aufgelistet. Die Haftreibungszahl wird ohne physikalische Einheit angegeben.

Werkstoffpaarung	Haftreibungszahl μ_0
Stahl auf Stahl	0,1 bis 0,15
Lederriemen auf Grauguss	0,2 bis 0,3
Lederdichtung auf Metall	0,2 bis 0,6
Gummi auf Asphalt	0,7 bis 0,8

Tabelle 3 Haftreibungszahl

Aus der Formel zur Haftreibung lässt sich Folgendes ableiten:

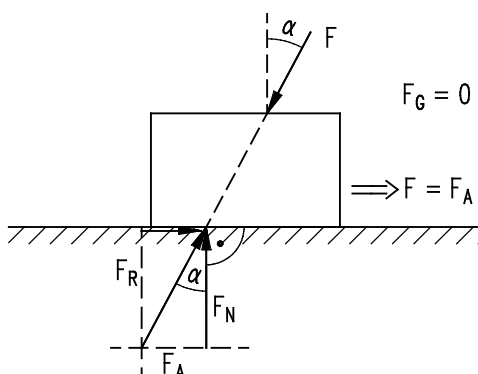
$$F_R \leq \mu_0 \cdot F_N$$

$$\Rightarrow \frac{F_R}{F_N} \leq \mu_0$$

$$\text{mit } \frac{F_R}{F_N} = \tan \alpha \quad \text{und} \quad \mu_0 = \tan \rho_0$$

$$\Rightarrow \tan \alpha \leq \tan \rho_0$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \rho_0$$



α ist der Winkel, den die Auflagerreaktion F mit der Flächennormalen, also der Normalkraft F_N einschließt.

ρ_0 ist der Reibungswinkel, der sich formal aus der Haftreibungszahl μ_0 errechnen lässt.

Abbildung 25 Schief angreifende Kräfte

Das Coulombsche Gesetz der Haftreibung sagt damit aus, dass im Gleichgewichtsfall die Wirkungslinie Auflagerreaktion nur eine begrenzte Schräglage gegenüber der Normalkraft haben kann. Ihr Winkel darf den Haftreibungswinkel α nicht überschreiten. Dieses gilt für alle Richtungen um die Flächennormalen. Die Auflagerkraft F_A kann daher nur Lagen innerhalb des gezeichneten Reibungskegels einnehmen. Schrägere Lagen sind nicht möglich. Bei Lagen außerhalb des Kegels beginnt der Körper zu rutschen.

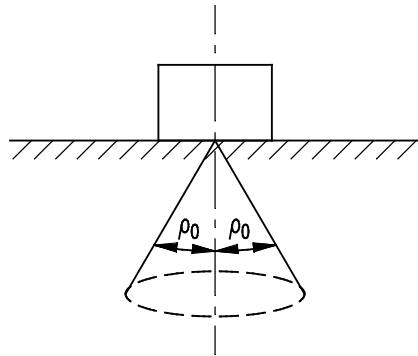


Abbildung 26 Der Reibungskegel

Versuch:

Ein Klotz befindet sich auf einer schiefen Ebene. Er wird durch eine vertikale Kraft belastet, in der auch die Gewichtskraft des Klotzes enthalten ist. Die Haftreibungszahl ist so groß, dass der Klotz nicht rutscht und das System im Gleichgewicht ist.

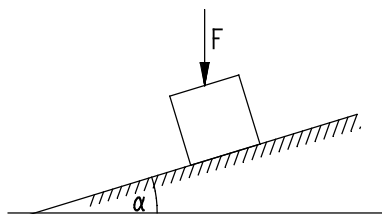


Abbildung 27 Bild zum Beispiel

Der Klotz soll nun durch eine von Null an wachsende Zusatzkraft belastet werden. Die Erfahrung zeigt, dass ab einer bestimmten Größe der Kraft der Klotz sich bewegt und abwärts rutscht. Dieser Zustand soll zeichnerisch nachvollzogen werden.

Es sollen zwei Fälle behandelt werden:

Fall 1: Die Zusatzkraft F_z wirkt parallel zur schiefen Ebene und zwar aufwärts bzw. abwärts.

Fall 2: Die Zusatzkraft F_z wirkt horizontal und zwar aufwärts bzw. abwärts.

Fall 1: Die Zusatzkraft F_Z wirkt parallel zur schiefen Ebene und zwar aufwärts bzw. abwärts:

a) aufwärts:

Die Auflagerreaktion legt sich auf der Aufwärtsseite des Reibungskegels auf den Mantel des Reibungskegels:

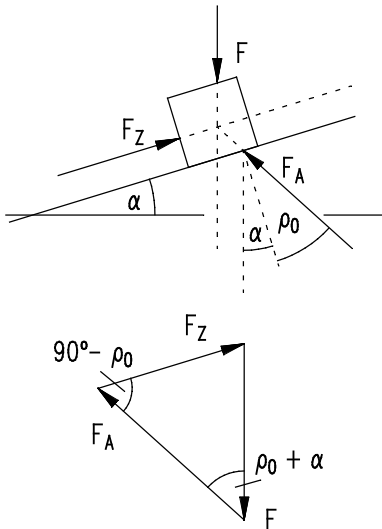


Abbildung 28 Zusatzkraft aufwärts

$$\frac{F_Z}{F} = \frac{\sin(\rho_0 + \alpha)}{\sin(90^\circ - \rho_0)}$$

$$F_Z = F \cdot \frac{\sin(\rho_0 + \alpha)}{\cos \rho_0}$$

b) abwärts:

Die Auflagerreaktion legt sich auf der Abwärtsseite des Reibungskegels auf den Mantel des Reibungskegels:

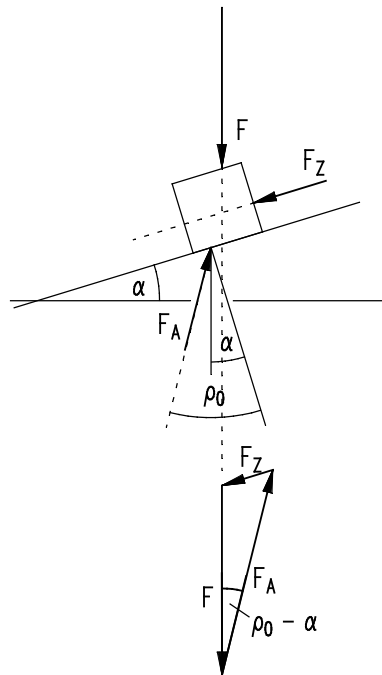


Abbildung 29 Zusatzkraft abwärts

$$\frac{F_Z}{F} = \frac{\sin(\rho_0 - \alpha)}{\sin(90^\circ - \rho_0)}$$

$$F_Z = F \cdot \frac{\sin(\rho_0 - \alpha)}{\cos \rho_0}$$

Fall 2: Die Zusatzkraft F_Z wirkt horizontal und zwar aufwärts bzw. abwärts:

a) aufwärts:

Die Auflagerreaktion legt sich auf der Aufwärtsseite des Reibungskegels auf den Mantel des Reibungskegels:

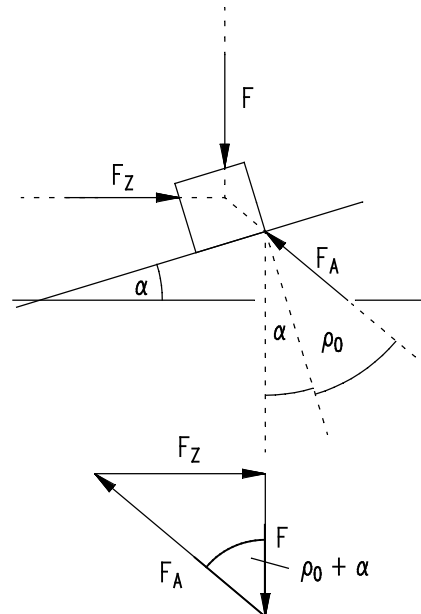


Abbildung 30 Zusatzkraft aufwärts

$$F_Z = F \cdot \tan(\rho_0 + \alpha)$$

b) abwärts:

Die Auflagerreaktion legt sich auf der Abwärtsseite des Reibungskegels auf den Mantel des Reibungskegels:

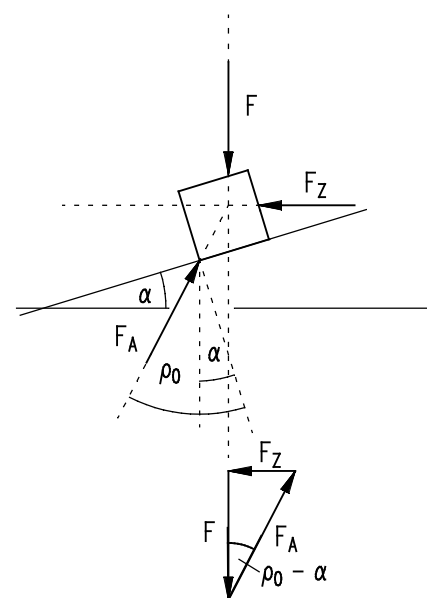


Abbildung 31 Zusatzkraft abwärts

$$F_Z = F \cdot \tan(\rho_0 - \alpha)$$

Die Gleitreibung

Analog zum Coulombschen Gesetz der Haftreibung gilt bei der Gleitreibung das Gleitreibungsgesetz:

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Die Gesetze sind ähnlich, nur ist die Gleitreibungskraft eindeutig zur Normalkraft festgelegt. Die Gleitreibungszahl μ ist kleiner als die Haftreibungszahl der selben Flächenpaarung.

Ein Klotz gleitet durch die Wirkung der Antriebskraft auf einer Unterlage, ohne dass ihm eine Beschleunigung widerfährt. Dadurch wird eine Auflagekraft geweckt, die mit der Antriebskraft ein Gleichgewichtssystem bilden muss. Die Kräfte haben den gleichen Betrag und sind auf derselben Wirkungslinie, ihre Wirkrichtung ist aber entgegengesetzt.

$$F = -F_A$$

Aus dem Gleitreibungsgesetz lässt sich Folgendes ableiten:

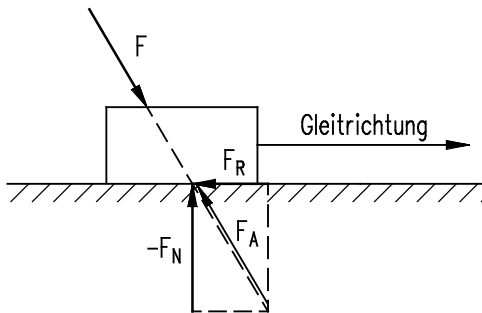


Abbildung 32 Gleitreibung

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

$$\Rightarrow \frac{F_R}{F_N} = \mu$$

mit $\mu = \tan \rho$

$$\frac{F_R}{F_N} = \tan \rho$$

Das bedeutet, dass die Auflagerkraft F_A mit der Normalen den Gleitreibungswinkel ρ einschließt, wobei sie der Gleitrichtung entgegenwirkt.

Weitere Arten der Reibung sind

- Gewindereibung (z.B. bei Schrauben)
- Seilreibung (z.B. bei Riemenantrieben)
- Lagerreibung/Zapfenreibung (z.B. bei rotierenden Wellen)
- Luftreibung (z.B. bei fahrenden Fahrzeugen).

Hierauf soll aber nicht genauer eingegangen werden.

Lehrbeispiel 4

Ein Holzbalken liegt waagrecht auf einem Holzfußboden. Der Balken drückt mit einer Gewichtskraft von 500 N auf den Boden. Um den Balken zu bewegen muss eine Kraft von 250 N parallel zur Oberfläche des Fußbodens aufgebracht werden. Um den Balken gleichförmig weiter zu bewegen, muss nur noch eine Kraft von 150 N aufgewendet werden.

Berechnen Sie die Haftreibungszahl und die Gleitreibungszahl!

Lösung

Gegeben: $F_G = 500 \text{ N}$
 $F_{R \max} = 250 \text{ N}$
 $F_R = 150 \text{ N}$

Gesucht: μ_0 ; μ

$$F_{R \max} = \mu_0 \cdot F_N$$

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

$$F_N = F_G$$

$$\Rightarrow \mu_0 = \frac{F_{R \max}}{F_G} = \frac{250 \text{ N}}{500 \text{ N}}$$

$$\underline{\underline{\mu_0 = 0,5}}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{F_R}{F_G} = \frac{150 \text{ N}}{500 \text{ N}}$$

$$\underline{\underline{\mu = 0,3}}$$

Lehrbeispiel 5

Ein Lastwagen hat eine Gewichtskraft von 90 kN. Die Vorderachse wird mit 35 kN belastet und die Hinterachse trägt den Rest. Zwischen den Reifen und dem Straßenbelag beträgt die Haftreibungszahl 0,5 und die Gleitreibungszahl 0,4.

Welche maximale Bremskraft kann am Boden abgestützt werden,

- 5.1 *wenn alle vier Räder gebremst werden und die Räder nicht rutschen,*
- 5.2 *wenn die Räder rutschen,*
- 5.3 *wenn nur die hinteren Räder gebremst werden und die Räder nicht rutschen,*
- 5.4 *wenn nur die hinteren Räder gebremst werden und die Räder rutschen?*

Lösung

Gegeben: $F_G = 90 \text{ kN} = F_N$

$$\mu_0 = 0,5$$

$$\mu = 0,4$$

$$F_{NV} = 35 \text{ kN}$$

Lehrbeispiel 5.1

Gesucht: F_{br1}

$$F_G = F_N$$

$$F_{br1} = F_N \cdot \mu_0 = 90 \text{ kN} \cdot 0,5$$

$$\underline{\underline{F_{br1} = 45 \text{ kN}}}$$

Lehrbeispiel 5.2

Gesucht: F_{br2}

$$F_{br2} = F_N \cdot \mu = 90 \text{ kN} \cdot 0,4$$

$$\underline{\underline{F_{br2} = 36 \text{ kN}}}$$

Lehrbeispiel 5.3Gesucht: F_{br3}

$$F_{NH} = F_G - F_{NV} = 90 \text{ kN} - 35 \text{ kN} = 55 \text{ kN}$$

$$F_{br3} = F_{NH} \cdot \mu_0 = 55 \text{ kN} \cdot 0,5$$

$$\underline{\underline{F_{br3} = 27,5 \text{ kN}}}$$

Lehrbeispiel 5.4Gesucht: F_{br4}

$$F_{Br4} = F_{NH} \cdot \mu = 55 \text{ kN} \cdot 0,4$$

$$\underline{\underline{F_{Br4} = 22 \text{ kN}}}$$

Kraftwirkungen bei verschiedenen Bauteilen

Um die Aufgaben der Statik bearbeiten zu können, muss das zu betrachtende Bauteil genau untersucht und **frei gemacht** werden. Freimachen ist ein wichtiger Bestandteil der Statik. Es bedeutet, dass bei einem zu betrachtenden Körper alle benachbarten Bauteile gedanklich entfernt und deren Wirkung auf den Körper durch Kräfte ersetzt werden. Die Kräfte müssen so wirken, dass der betrachtete Körper auch weiter im Gleichgewicht ist. Hierzu müssen aber erst einige Bauteile und Lager genauer untersucht werden, um die Wirkungen der Kräfte beim Freimachen genau bestimmen zu können.

a) Berührung eines mechanischen Systems mit einem Körper der Umgebung

Der Kraftangriffspunkt liegt im Berührungspunkt. Die Kraftrichtung ist bei einem System ohne Haftreibung immer senkrecht zur Berührungsfläche. Muss zusätzlich die Haftreibung berücksichtigt werden, so ist die Kraftrichtung schräg.

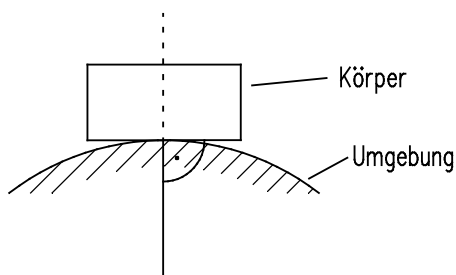


Abbildung 33 Berührung eines mechanischen Systems mit einem Körper der Umgebung

b) Rollkörper

Eine Rolle kann nur im Gleichgewicht sein, wenn die Auflagekraft durch den Mittelpunkt des Rades geht, also immer senkrecht zur Auflageebene. Der Kraftangriffspunkt liegt im Berührungspunkt des Rads mit der Auflageebene. Die Kraftrichtung ist bei einem System ohne Haftreibung immer senkrecht zur Auflagefläche.

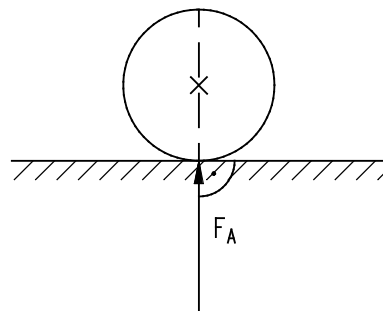


Abbildung 34 Rolle auf Unterlage

c) Loslager

Loslager sind einwertige Lager. Sie sind nur in der Lage Kräfte senkrecht zu stützen (z.B. Normalkraft). Sie werden verwendet, um Träger zu stützen und Wellen bzw. Achsen zu lagern.

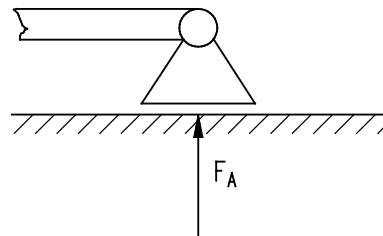


Abbildung 35 Loslager

d) Festlager

Festlager sind zweiwertige Lager. Sie sind in der Lage, Kräfte in jeder beliebigen Richtung aufzunehmen. Sie werden in der Statik als Stütze und Lager eingesetzt.

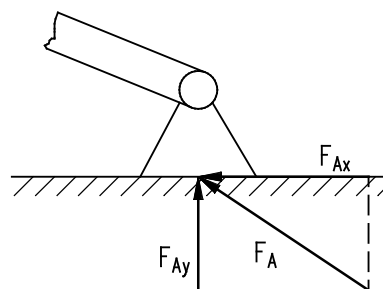


Abbildung 36 Festlager

e) Feste Einspannung

Feste Einspannungen sind in der Lage, Kräfte und Momente in jeglicher Richtung aufzunehmen.

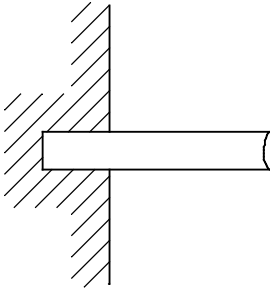


Abbildung 37 Feste Einspannung

f) Seile, Ketten und ähnliche flexible Bauteile

Flexible Bauteile können nur in einer Richtung Kräfte ausüben und zwar auf Zug. Sie wirken stets vom Angriffspunkt des Bauteils weg.

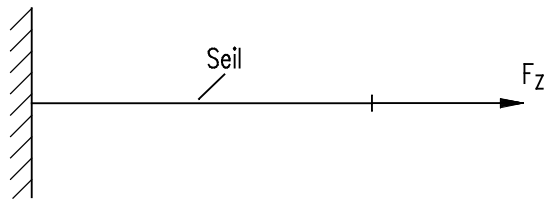


Abbildung 38 Flexible Bauteile

g) Stäbe

Stäbe können Zug- und Druckkräfte aufnehmen. Zugkräfte wirken stets vom Angriffspunkt des Bauteils weg, Druckkräfte stets auf den Angriffspunkt zu.

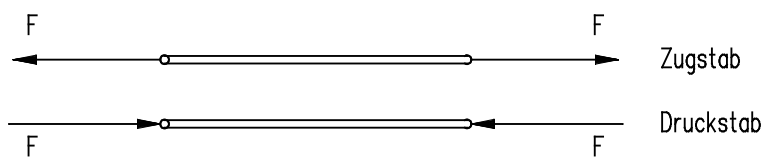


Abbildung 39 Stäbe

In der nachfolgenden Tabelle werden die Bauteile und Lager mit ihren Symbolen aufgezeigt und gegliedert.




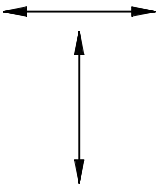
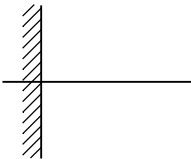
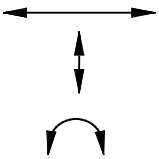
Lagerarten	Beispiele	Symbol	Auflagerreaktionsart
einwertig	Berührung ohne Haftreibung Rollenlager, Pendelstütze		
zweiwertig	Berührung mit Haftreibung Gelenklager		
dreiwertig	Einspannung		

Tabelle 4 Lagerarten

2.3 Hebelgesetz und Hebelarten

Ein Stab mit einer Länge l , der drehbar gelagert ist, wird als Hebel bezeichnet. Wirkt eine äußere Kraft F mit dem Abstand l vom Lager auf den Hebel, so fängt dieser an sich zu drehen. Die Größe der Drehbewegung ist abhängig von der wirkenden Kraft und dem Hebelarm. Das Produkt aus den beiden Größen wird als Drehmoment bezeichnet. Die Einheit ist das Newtonmeter Nm.

Das Drehmoment lässt sich durch die Angabe des Betrages und des Richtungssinns genau bestimmen. Es ist somit ein Vektor.

Die gleiche Gesetzmäßigkeit gilt auch bei einer Scheibe, die im Mittelpunkt gelagert ist, und auf die z.B. eine äußere Kraft auf den Umfang wirkt. In diesem Fall ist der Radius der Scheibe der "Hebelarm".

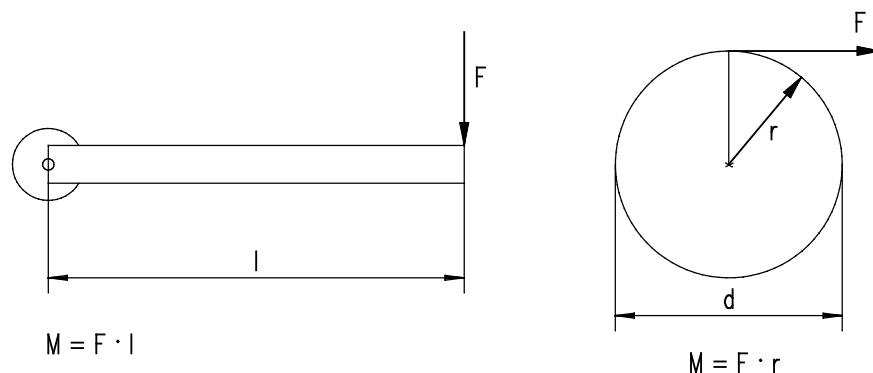


Abbildung 40 Das Drehmoment

Es ist aber eine falsche Annahme, dass sich die Drehbewegung eines Körpers auf die Wirkung einer einzelnen Kraft zurückführen lässt. Würde bei einem Hebel wie im Beispiel das Lager entfernt werden, so würde sich der Hebel nicht drehen. Es muss ein

Kräftepaar auf den Körper wirken, um ein Drehmoment zu erzeugen. Eine Kraft hiervon ist meist eine Lagerkraft.

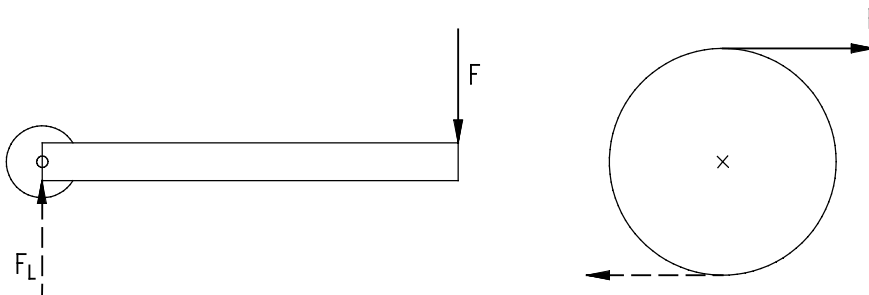


Abbildung 41 Ein Kräftepaar erzeugt ein Drehmoment

Definition:

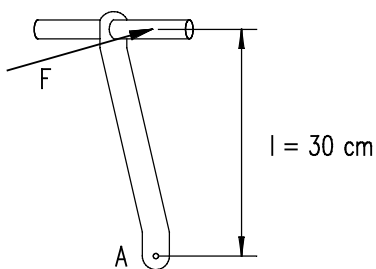
Die Drehwirkung eines Kräftepaares wird als sein Drehmoment M bezeichnet. Es ist das Produkt aus der Kraft F und dem Wirkabstand l .

$$M = F \cdot l$$

$$[M] = [F] \cdot [l] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{Nm}$$

Der Drehsinn des Momentes wird durch sein Vorzeichen angegeben. Der Drehsinn wird als Linksdrehsinn und Rechtsdrehsinn bezeichnet. In der Physik, Mathematik und Technik ist der Linksdrehsinn positiv (+) und der Rechtsdrehsinn negativ (-).

Lehrbeispiel 1



Auf den Hebel einer Gangschaltung, die im Punkt A gelagert ist, soll wie im Bild beschrieben, eine äußere Kraft F von 100 N wirken.

Wie groß ist das Moment im Ansatzpunkt der Kraft?

Lösung

Gegeben: $F = 100 \text{ N}$
 $l = 30 \text{ cm}$

Gesucht: M

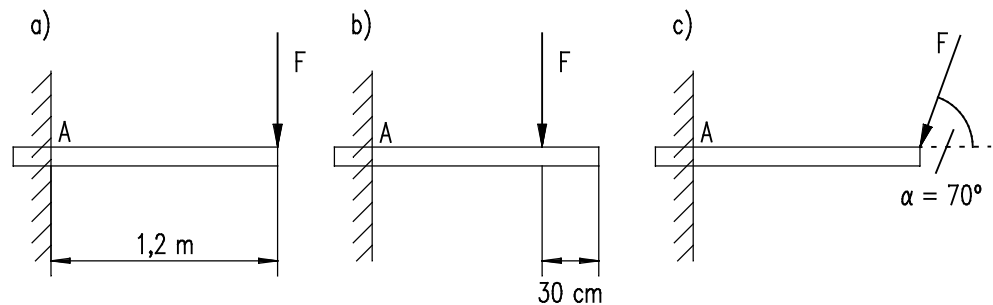
$$M = F \cdot l = 100 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{M = 30 \text{ Nm}}}$$

Lehrbeispiel 2

Bestimmen Sie die Drehmomente in den Punkten A der nachfolgend skizzierten Beispiele!

Die Kraft F beträgt in allen drei Fällen 1,5 kN und der Balken ist jeweils 1,2 m lang.



Lösung

Gegeben: $F = 1,5 \text{ kN}$
 $l = 1,2 \text{ m}$
 $l_b = 30 \text{ cm}$

Gesucht: M_a, M_b, M_c

$$\begin{aligned} \text{a) } M_a &= F \cdot l = 1500 \text{ N} \cdot 1,2 \text{ m} \\ M_a &= F \cdot l = 1800 \text{ Nm} = \underline{\underline{1,8 \text{ kNm}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } M_b &= F \cdot (l - l_b) \\ M_b &= 1500 \text{ N} \cdot (1,2 \text{ m} - 0,3 \text{ m}) \\ M_b &= 1350 \text{ Nm} = \underline{\underline{1,35 \text{ kNm}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } M_c &= F_{\perp} \cdot l \\ F_{\perp} &= F \cdot \sin \alpha \\ M_c &= F \cdot \sin \alpha \cdot l = 1500 \text{ N} \cdot \sin 70^\circ \cdot 1,2 \text{ m} \\ M_c &= 1691 \text{ Nm} = \underline{\underline{1,691 \text{ kNm}}} \end{aligned}$$

In der Statik werden ruhende Systeme betrachtet. Das bedeutet, das System ist im Gleichgewicht. Ein System ist im Gleichgewicht, wenn alle Momente addiert den Wert Null ergeben.

Definition: Allgemeiner Hebelsatz

Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der linksdrehenden Momente gleich der Summe der rechtsdrehenden Momente ist.

$$\sum_n^1 M_{\text{links}} = \sum_n^1 M_{\text{rechts}}$$

Allgemein kann gesagt werden:

- Wirkt eine resultierende Kraft F auf einen Körper, so wird dieser verschoben.
- Wirkt ein resultierendes Drehmoment M auf einen Körper, so wird dieser gedreht.
- Wird ein Körper weder verschoben noch gedreht, wirkt also weder eine resultierende Kraft F noch ein resultierendes Drehmoment M auf ihn, so ist dieser im Gleichgewicht.

Definition: Gleichgewichtsbedingung der Statik

Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Kräfte der x-Achse, die Summe aller Kräfte der y-Achse und die Summe aller Drehmomente, bezogen auf einen Punkt jeweils gleich Null ist.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

In Abbildung 42 sind zwei Hebel im Gleichgewicht zu sehen. Es soll jeweils das Hebelgesetz aufgestellt werden, bezogen auf Punkt A.

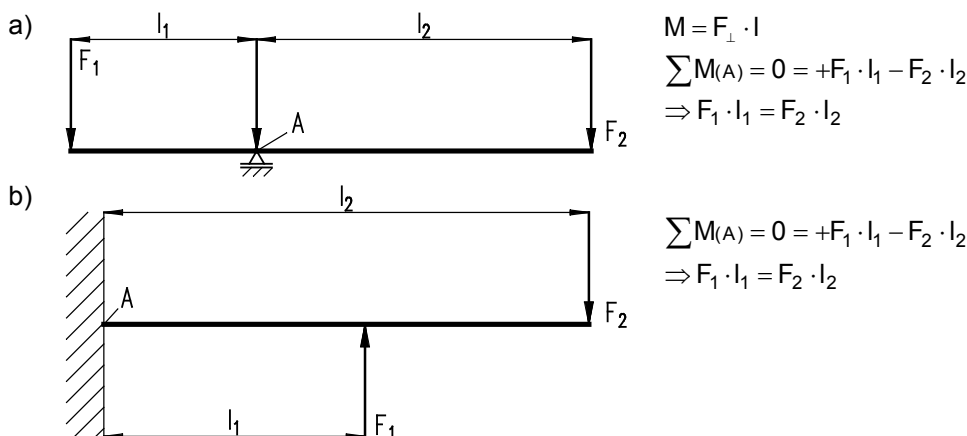


Abbildung 42 Hebel im Gleichgewicht

Betrachten wir als Erstes das Beispiel a). Das System ist in Punkt A gelagert. Würde die Kraft F_2 nicht wirken, so würde F_1 den Balken nach unten drücken und das Moment wäre linksdrehend und daher positiv. Das Gleiche würde geschehen, wenn die Kraft F_1 nicht wirken würde. Hier wäre aber das Moment rechtsdrehend und daher negativ.

Die Momente in dem Beispiel b) verhalten sich gleich wie im Beispiel a. Wirkt nur die Kraft F_1 , so ist das von ihr erzeugte Moment linksdrehend (positiv), wirkt nur die Kraft F_2 , so ist das von ihr erzeugte Moment rechtsdrehend (negativ). Es lässt sich die gleiche Momentengleichung aufstellen:

$$\sum M_{(A)} = 0 = +M_1 - M_2 = +(F_1 \cdot l_1) - F_2 \cdot l_2$$

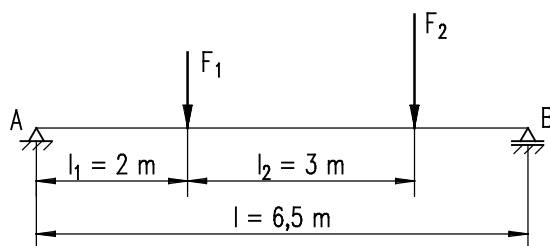
$$\Rightarrow F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

Durch das Aufstellen der Momentengleichungen lassen sich unbekannte Kräfte eines statischen Problems bestimmen. Durch die nachfolgenden Lehrbeispiele soll dieses genau beschrieben werden.

Lehrbeispiel 3

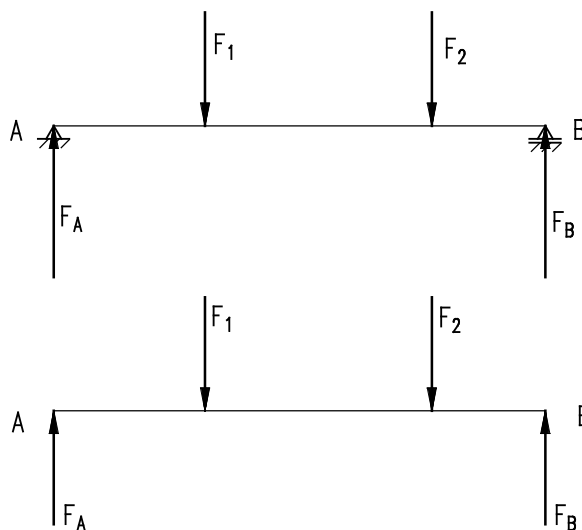
Bestimmen Sie in der nachfolgend beschriebenen Skizze alle Kräfte!

Es wirken die Kräfte $F_1 = 500 \text{ N}$ und $F_2 = 700 \text{ N}$ auf den Balken. Die Kräfte F_A und F_B sind zu bestimmen.



Lösung

Als erstes muss das System „freigemacht“ werden. Es werden alle Kräfte mit ihrer Wirkrichtung eingezeichnet. Wenn die Wirkrichtung einer Kraft nicht genau bestimmt werden kann, so wird einfach eine Richtung angenommen. Die Richtigkeit dieser Annahme wird mit der Rechnung kontrolliert. In diesem Beispiel sind die Kräfte F_1 , F_2 bekannt. Die Kräfte F_A , F_B in den Auflagelagern müssen bestimmt werden. Da die beiden bekannten Kräfte nach unten wirken, wird angenommen, dass die beiden unbekannten Kräfte entgegengesetzt wirken (siehe nachfolgende Abbildung).



Nach dem „Freimachen“ werden die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt. Es muss hierbei festgelegt werden, welches Lager als erstes betrachtet werden soll. In diesem Beispiel wirken alle Kräfte in y-Richtung. Es muss daher keine besondere Reihenfolge eingehalten werden. Die Ergebnisse der Kräfte F_A und F_B sind hiervon nicht abhängig. Zur Vollständigkeit werden auch die Kräfte in x-Richtung erwähnt. Zur Bestätigung wird diese Aufgabe von beiden Seiten betrachtet und berechnet:

Gegeben: $F_1 = 500 \text{ N}$ $l_1 = 2 \text{ m}$
 $F_2 = 700 \text{ N}$ $l_2 = 3 \text{ m}$
 $l = 6,5 \text{ m}$

Gesucht: F_A ; F_B

$$\text{I} \quad \sum F_y = 0 = F_A - F_1 - F_2 + F_B$$

$$\text{II} \quad \sum F_x = 0$$

$$\text{III} \quad \sum M_{(A)} = 0 = -F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot (l_1 + l_2) + F_B \cdot l$$

$$\text{A) III} \Rightarrow F_B = \frac{F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot (l_1 + l_2)}{l} = \frac{500 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} + 700 \text{ N} \cdot (2 \text{ m} + 3 \text{ m})}{6,5 \text{ m}}$$

$$F_B = \underline{\underline{692,3 \text{ N}}}$$

$$\text{I} \Rightarrow F_A = F_1 + F_2 - F_B = 500 \text{ N} + 700 \text{ N} - 692,3 \text{ N}$$

$$F_A = \underline{\underline{507,7 \text{ N}}}$$

$$\text{B) III} \quad \sum M_{(B)} = 0 = -F_A \cdot l + F_1 \cdot (l - l_1) + F_2 \cdot (l - l_1 - l_2)$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{F_1 \cdot (l - l_1) + F_2 \cdot (l - l_1 - l_2)}{l} = \frac{500 \text{ N} \cdot (6,5 \text{ m} - 2 \text{ m}) + 700 \text{ N} \cdot (6,5 \text{ m} - 2 \text{ m} - 3 \text{ m})}{6,5 \text{ m}}$$

$$F_A = \underline{\underline{507,7 \text{ N}}}$$

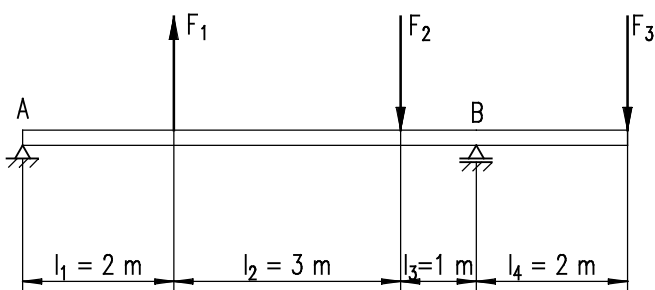
$$\text{I} \Rightarrow F_B = F_1 + F_2 - F_A = 500 \text{ N} + 700 \text{ N} - 507,7 \text{ N}$$

$$F_B = \underline{\underline{692,3 \text{ N}}}$$

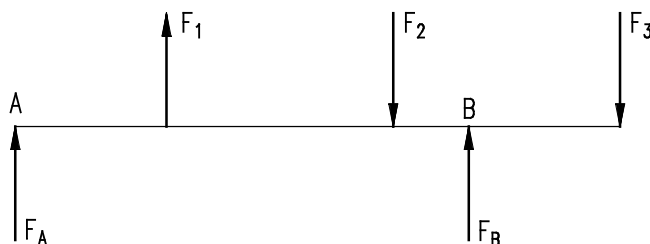
Lehrbeispiel 4

Bestimmen Sie die Kräfte in den Lagern A und B!

Die Beträge der bekannten Kräfte sind: $F_1 = 200 \text{ N}$, $F_2 = 400 \text{ N}$, $F_3 = 600 \text{ N}$.



Lösung



Gegeben: $F_1 = 200 \text{ N}$ $l_1 = 2 \text{ m}$
 $l_2 = 3 \text{ m}$
 $F_2 = 400 \text{ N}$ $l_3 = 1 \text{ m}$
 $F_3 = 600 \text{ N}$ $l_4 = 2 \text{ m}$

Gesucht: F_A ; F_B

$$\text{I} \quad \sum F_y = 0 = F_A + F_1 - F_2 + F_B - F_3$$

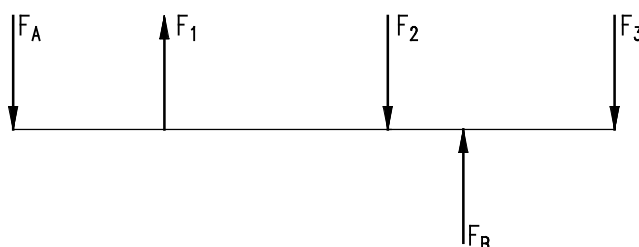
$$\text{II} \quad \sum F_x = 0$$

$$\text{III} \quad \sum M_{(A)} = 0 = +F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot (l_1 + l_2) + F_B \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_3 \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad \Rightarrow F_B &= \frac{-F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot (l_1 + l_2) + F_3 \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4)}{(l_1 + l_2 + l_3)} \\ F_B &= \frac{-200 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} + 400 \text{ N} \cdot (2 \text{ m} + 3 \text{ m}) + 600 (2 \text{ m} + 3 \text{ m} + 1 \text{ m} + 2 \text{ m})}{(2 \text{ m} + 3 \text{ m} + 1 \text{ m})} \\ F_B &= 1067 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \Rightarrow F_A &= -F_1 + F_2 - F_B + F_3 \\ F_A &= -200 \text{ N} + 400 \text{ N} - 1067 \text{ N} + 600 \text{ N} \\ F_A &= -267 \text{ N} \end{aligned}$$

Der errechnete Betrag der Kraft F_A ist negativ. Dies bedeutet, dass die anfangs angenommene Wirkrichtung falsch war. F_A wirkt in die entgegengesetzte Richtung. Dies muss in der freigemachten Skizze vermerkt werden.

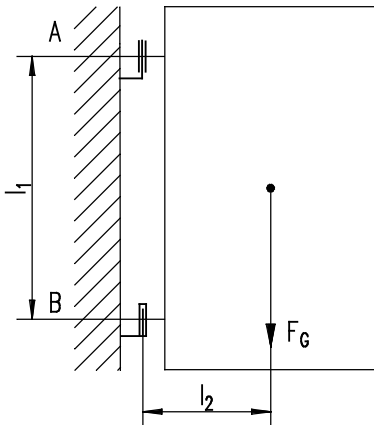


$$\Rightarrow \underline{\underline{F_A = 267 \text{ N}}}$$

Lehrbeispiel 5

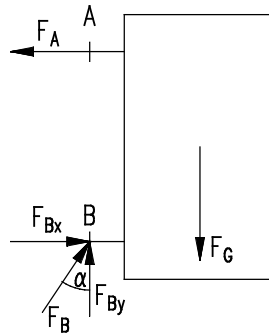
Eine Tür mit der Gewichtskraft von 800 N hängt in den Scharnieren A und B. Das Lager A ist ein Loslager und kann die Kraft nur in einer Richtung aufnehmen. Die Abstände in der unten gezeigten Skizze betragen $l_1 = 1,2 \text{ m}$ und $l_2 = 0,6 \text{ m}$.

Berechnen Sie die Kräfte in den Lagern A und B und geben Sie ihre Richtung an!



Lösung

Gegeben: $F_G = 800 \text{ N}$
 $l_1 = 1,2 \text{ m}$
 $l_2 = 0,6 \text{ m}$



$$\text{I} \quad \sum F_x = 0 = F_{Bx} - F_A$$

$$\text{II} \quad \sum F_y = 0 = F_{By} - F_G$$

$$\text{III} \quad \sum M_{(B)} = 0 = -F_G \cdot l_2 + F_A \cdot l_1$$

$$\text{III} \Rightarrow F_A \cdot l_1 = F_G \cdot l_2$$

$$F_A = \frac{F_G \cdot l_2}{l_1} = \frac{800 \text{ N} \cdot 0,6 \text{ m}}{1,2 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{F_A = 400 \text{ N}}}$$

$$\text{II} \Rightarrow F_{By} = F_G$$

$$\underline{\underline{F_{By} = 800 \text{ N}}}$$

$$\text{I} \Rightarrow F_{Bx} = F_A$$

$$\underline{\underline{F_{Bx} = 400 \text{ N}}}$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{(800 \text{ N})^2 + (400 \text{ N})^2}$$

$$\underline{\underline{F_B = 894 \text{ N}}}$$

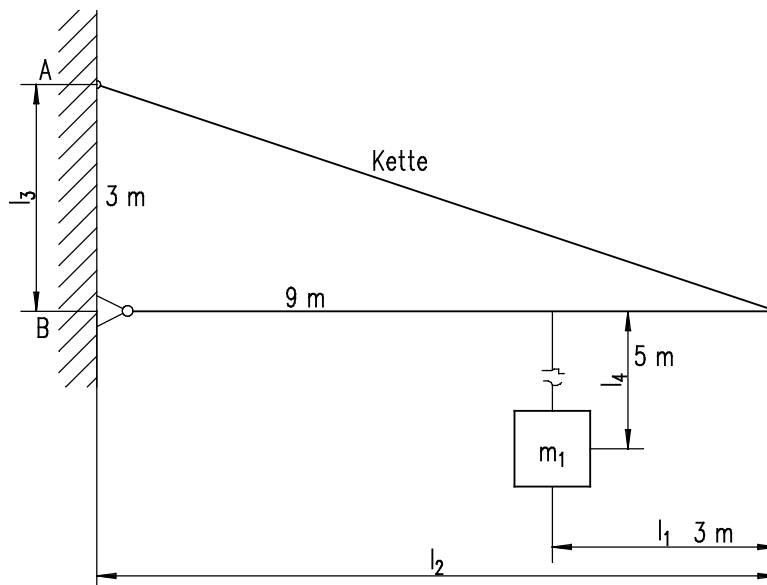
$$\alpha = \arccos \frac{F_{By}}{F_B} = \arccos \frac{800 \text{ N}}{894 \text{ N}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 26,5^\circ}}$$

Lehrbeispiel 6

Ein an der Wand installierter Kranausleger trägt eine Kiste mit einer Masse von 900 kg ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Die Kiste hängt 3 m vor dem Ende des Auslegers in einer Tiefe von 5 m. Die Masse des Seils beträgt 50 kg. Die gesamte Länge des Auslegers ist 9 m und der Abstand der Haltekette beträgt 3 m.

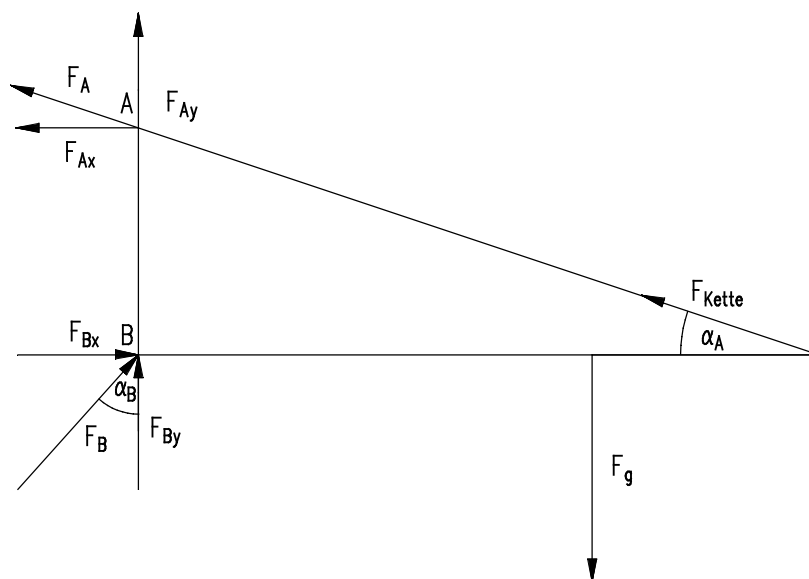
Berechnen Sie die Kräfte in den Lagern A und B und geben Sie ihre Wirklinie an!



Lösung

Gegeben: $m_1 = 900 \text{ kg}$; $m_2 = 50 \text{ kg}$
 $g = 10 \text{ m/s}^2$
 $l_1 = 3 \text{ m}$; $l_2 = 9 \text{ m}$; $l_3 = 3 \text{ m}$; $l_4 = 5 \text{ m}$

Gesucht: F_A ; F_B



$$F_G = (m_1 + m_2) \cdot g = (900 \text{ kg} + 50 \text{ kg}) \cdot 10 \text{ m/s}^2$$

$$F_G = \underline{9500 \text{ N} = 9,5 \text{ kN}}$$

$$\alpha_A = \arctan \frac{l_3}{l_2} = \arctan \frac{3 \text{ m}}{9 \text{ m}}$$

$$\alpha_A = \underline{18,4^\circ}$$

$$\underline{F_{\text{Kette}} = F_A}$$

$$\text{I} \quad \sum F_x = 0 = F_{Bx} - F_{Ax} = F_{Bx} - F_A \cdot \cos \alpha_A$$

$$\text{II} \quad \sum F_y = 0 = F_{By} - F_g + F_{Ay} = F_{By} - F_g + F_A \cdot \sin \alpha_A$$

$$\text{III} \quad \sum M(B) = 0 = -F_G \cdot (l_2 - l_1) + F_{\text{Kette}} \cdot l_2 = -F_G \cdot (l_2 - l_1) + F_A \cdot \sin \alpha_A \cdot l_2$$

$$\text{III} \Rightarrow F_A \cdot \sin \alpha_A \cdot l_2 = F_G \cdot (l_2 - l_1)$$

$$F_A = \frac{F_G \cdot (l_2 - l_1)}{\sin \alpha_A \cdot l_2} = \frac{9,5 \text{ kN} \cdot (9 \text{ m} - 3 \text{ m})}{\sin 18,4^\circ \cdot 9 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{F_A = 20,1 \text{ kN}}}$$

$$\text{II} \Rightarrow F_{By} = -F_A \cdot \sin \alpha_A + F_G = -20,1 \text{ kN} \cdot \sin 18,4^\circ + 9,5 \text{ kN}$$

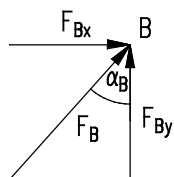
$$F_{By} = \underline{3,16 \text{ kN}}$$

$$\text{I} \Rightarrow F_{Bx} = F_A \cdot \cos \alpha_A = 20,1 \text{ kN} \cdot \cos 18,4^\circ$$

$$F_{Bx} = \underline{19,1 \text{ kN}}$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{(19,1 \text{ kN})^2 + (3,16 \text{ kN})^2}$$

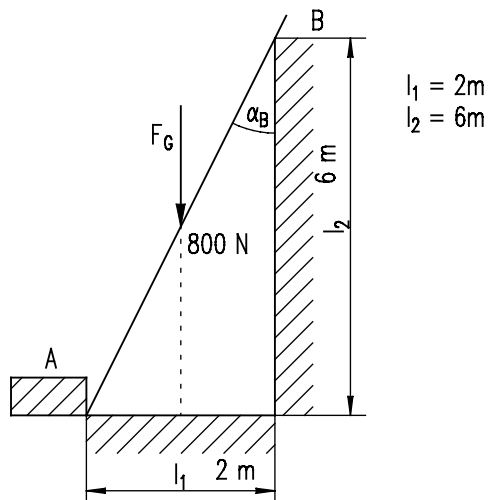
$$\underline{\underline{F_B = 19,36 \text{ kN}}}$$



$$\alpha_B = \arccos \frac{F_{By}}{F_B} = \arccos \frac{3,16 \text{ kN}}{19,36 \text{ kN}}$$

$$\underline{\underline{\alpha_B = 80,61^\circ}}$$

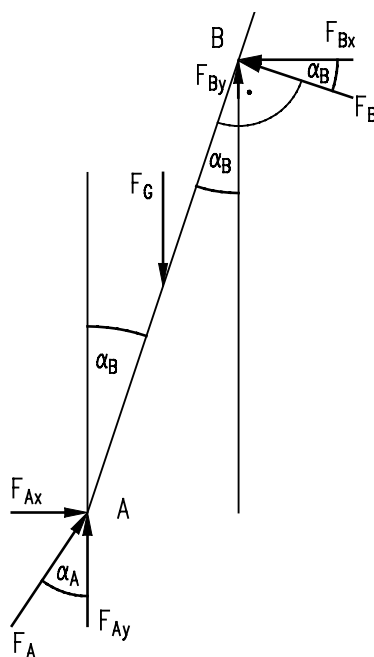
Lehrbeispiel 7



Eine Leiter liegt reibungsfrei wie in nebenstehender Skizze beschrieben an einer Mauerkante und wird unten durch eine weitere Kante gestützt. Auf halber Höhe der Leiter steht ein Mann mit einer Gewichtskraft von 750 N . Die Gewichtskraft der Leiter von 50 N wirkt gleich der Gewichtskraft des Mannes und wird ihr hinzuaddiert.

Berechnen Sie die Kräfte in den Lagern A und B mit ihrer x- und y-Komponente!

Lösung



Gegeben: $F_{G1} = 750\text{ N}$
 $F_{G2} = 50\text{ N}$
 $l_1 = 2\text{ m}$
 $l_2 = 6\text{ m}$
 $l_g = 1/2 l_1 = 1\text{ m}$

Gesucht: $F_A, F_{Ax}, F_{Ay}, \alpha_A$
 $F_B, F_{Bx}, F_{By}, \alpha_B$

$$\text{I} \quad \sum F_x = 0 = F_{Ax} - F_{Bx}$$

$$\text{II} \quad \sum F_y = 0 = F_{Ay} - F_G + F_{By}$$

$$\text{III} \quad \sum M_{(A)} = 0 = -F_G \cdot \frac{l_1}{2} + F_{Bx} \cdot l_2 + F_{By} \cdot l_1$$

$$F_{Bx} = F_B \cdot \cos \alpha_B$$

$$F_{By} = F_B \cdot \sin \alpha_B$$

$$\Rightarrow \text{III:} \quad F_B \cdot \cos \alpha_B \cdot l_2 + F_B \cdot \sin \alpha_B \cdot l_1 = F_G \cdot \frac{l_1}{2}$$

$$F_B \cdot (\cos \alpha_B \cdot l_2 + \sin \alpha_B \cdot l_1) = F_G \cdot \frac{l_1}{2}$$

$$F_B = \frac{F_G \cdot \frac{l_1}{2}}{\cos \alpha_B \cdot l_2 + \sin \alpha_B \cdot l_1}$$

$$F_G = F_{G1} + F_{G2} = 750 \text{ N} + 50 \text{ N} = \underline{800 \text{ N}}$$

$$\alpha_B = \arctan \frac{l_1}{l_2} = \arctan \frac{2 \text{ m}}{6 \text{ m}}$$

$$\alpha_B = \underline{18,4^\circ}$$

$$F_B = \frac{800 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}}{(\cos 18,4^\circ \cdot 6 \text{ m} + \sin 18,4^\circ \cdot 2 \text{ m})} = \underline{\underline{126,5 \text{ N}}}$$

$$F_{Bx} = F_B \cdot \cos \alpha_B = 126,5 \text{ N} \cdot \cos 18,4^\circ = \underline{\underline{120 \text{ N}}}$$

$$F_{By} = F_B \cdot \sin \alpha_B = 126,5 \text{ N} \cdot \sin 18,4^\circ = \underline{\underline{39,9 \text{ N}}}$$

$$\Rightarrow \text{I:} \quad F_{Ay} = F_G - F_{By} = 800 \text{ N} - 39,9 \text{ N} = \underline{\underline{760,1 \text{ N}}}$$

$$\Rightarrow \text{I:} \quad \underline{\underline{F_{Ax} = F_{Bx} = 120 \text{ N}}}$$

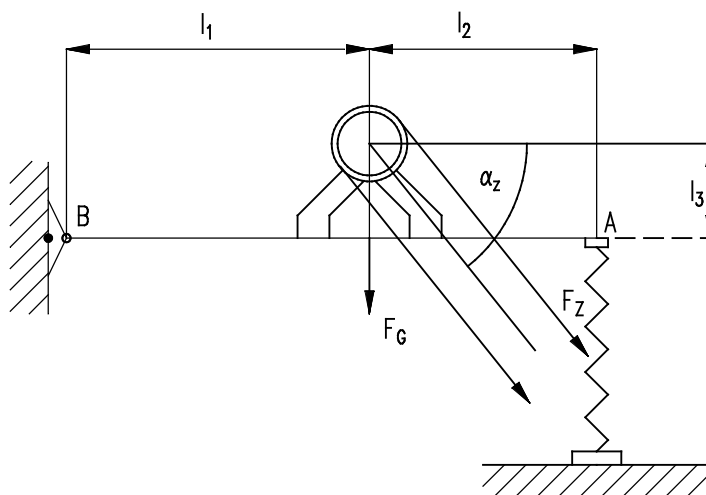
$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{120^2 + 760,1^2} \text{ N} = \underline{\underline{769,5 \text{ N}}}$$

$$\alpha_A = \arctan \frac{F_{Ax}}{F_{Ay}} = \frac{120 \text{ N}}{760,1 \text{ N}} = \underline{\underline{8,9^\circ}}$$

Lehrbeispiel 8

Eine Welle mit der Masse von 30 kg ($g = 10 \text{ m/s}^2$) ist auf einer Schwinge befestigt. Die Druckfeder soll bei waagerechter Schwingenstellung im stillstehenden Riemen die Spannkkräfte $F_Z = 300 \text{ N}$ erzeugen. Die Abmessungen des Systems betragen $l_1 = 0,4 \text{ m}$, $l_2 = 0,3 \text{ m}$, $l_3 = 0,1 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$.

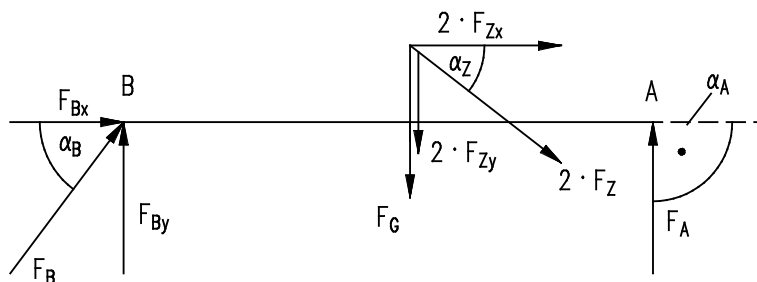
Wie groß sind die Beträge der Kräfte im Federlager A und im Festlager B? Geben Sie den Richtungssinn der Kräfte mit ihren Winkeln zur Waagerechten an!



Lösung

Gegeben: $m = 30 \text{ kg}$ $l_2 = 0,3 \text{ m}$
 $g = 10 \text{ m/s}^2$ $l_3 = 0,1 \text{ m}$
 $F_Z = 300 \text{ N}$ $\alpha_z = 30^\circ$
 $l_1 = 0,4 \text{ m}$

Gesucht: F_A ; α_A
 F_B ; α_B



$$F_G = m \cdot g = 30 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2$$

$$F_G = 300 \text{ N}$$

$$\text{I} \quad \sum F_x = 0 = F_{Bx} + 2 \cdot F_{Zx}$$

$$\text{II} \quad \sum F_y = 0 = F_{By} - F_G - 2 \cdot F_{Zy} + F_A$$

$$\text{III} \quad \sum M(B) = 0 = -F_G \cdot l_1 - 2 \cdot F_{Zy} \cdot l_1 - 2 \cdot F_{Zx} \cdot l_3 + F_A \cdot (l_1 + l_2)$$

$$F_{Zx} = F_Z \cdot \cos \alpha_z$$

$$F_{Zy} = F_Z \cdot \sin \alpha_z$$

$$\text{III} \quad F_A \cdot (l_1 + l_2) = F_G \cdot l_1 + 2 \cdot F_Z \cdot \sin \alpha_z \cdot l_1 + 2 \cdot F_Z \cdot \cos \alpha_z \cdot l_3$$

$$F_A = \frac{F_G \cdot l_1 + 2 \cdot F_Z \cdot \sin \alpha_z \cdot l_1 + 2 \cdot F_Z \cdot \cos \alpha_z \cdot l_3}{l_1 + l_2}$$

$$F_A = \frac{300 \text{ N} \cdot 0,4 \text{ m} + 2 \cdot 300 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ \cdot 0,4 \text{ m} + 2 \cdot 300 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,1 \text{ m}}{0,4 \text{ m} + 0,3 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{F_A = 417,09 \text{ N}}}$$

$$\underline{\underline{\alpha_A = 90^\circ}}$$

$$\text{II} \Rightarrow F_{By} = F_G + 2 \cdot F_Z \cdot \sin \alpha_z - F_A$$

$$F_{By} = 300 \text{ N} + 2 \cdot 300 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ - 417,09 \text{ N}$$

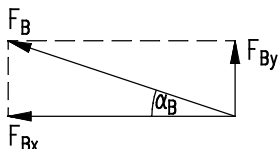
$$\underline{\underline{F_{By} = 182,91 \text{ N}}}$$

$$\text{I} \Rightarrow F_{Bx} = -2 \cdot F_Z \cdot \cos \alpha_z$$

$$F_{Bx} = -2 \cdot 300 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ$$

$$\underline{\underline{F_{Bx} = -519,62 \text{ N}}}$$

\Rightarrow Annahme von F_B war falsch.



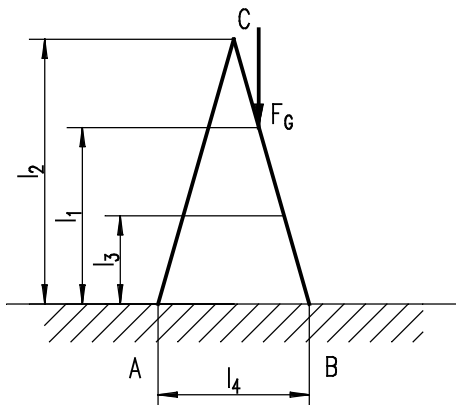
$$\alpha_B = \arctan \frac{F_{By}}{F_{Bx}} = \arctan \frac{182,91 \text{ N}}{-519,62 \text{ N}}$$

$$\underline{\underline{\alpha_B = -19,4^\circ}}$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{(-519,62 \text{ N})^2 + (182,91 \text{ N})^2}$$

$$\underline{\underline{F_B = 550,87 \text{ N}}}$$

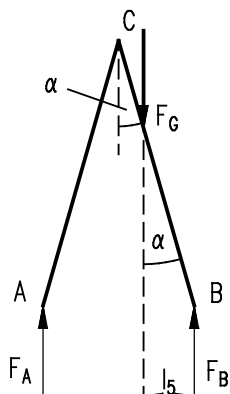
Lehrbeispiel 9



Ein Monteur steht in $l_1 = 2,5 \text{ m}$ Höhe auf einer zweiteiligen Leiter mit einer Gesamthöhe von $l_2 = 3,5 \text{ m}$. Der Monteur hat eine Gewichtskraft von 750 N . Die Kette der Leiter ist in einer Höhe von $l_3 = 1,2 \text{ m}$ befestigt und die Leiter steht $l_4 = 2 \text{ m}$ auseinander.

Berechnen Sie die Kräfte in den Lagern A, B und C mit den zugehörigen Winkeln (bezogen auf die Waagerechte) und die Kraft in der Kette!

Lösung



Gegeben: $F_G = 750 \text{ N}$

$l_1 = 2,5 \text{ m}$

$l_2 = 3,5 \text{ m}$

$l_3 = 1,2 \text{ m}$

$l_4 = 2,0 \text{ m}$

Gesucht: $F_A, F_B, F_K, F_C, \alpha, \beta$

$$\text{I } \sum F_x = 0$$

$$\text{II } \sum F_y = 0 = F_A - F_G + F_B$$

$$\text{III } \sum M_{(B)} = 0 = -F_A \cdot l_4 + F_G \cdot l_5$$

$$\alpha = \arctan \frac{\frac{1}{2} l_4}{l_2} = \arctan \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot 3,5 \text{ m}} = 15,95^\circ$$

$$l_5 = l_1 \cdot \tan \alpha = 2,5 \text{ m} \cdot \tan 15,95^\circ = 0,715 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \text{III } F_A \cdot l_4 = F_G \cdot l_5$$

$$F_A = \frac{F_G \cdot l_5}{l_4} = \frac{750 \text{ N} \cdot 0,715 \text{ m}}{2 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{F_A = 268,1 \text{ N}}}$$

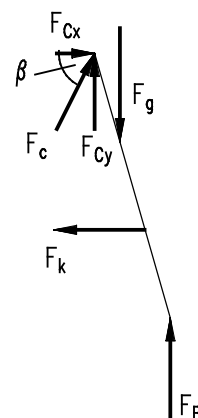
$$\Rightarrow \text{II } F_B = F_G - F_A = 750 \text{ N} - 268,1 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F_B = 481,9 \text{ N}}}$$

$$\text{I } \sum F_x = 0 = F_{Cx} - F_K$$

$$\text{II } \sum F_y = 0 = F_{Cy} - F_G + F_B$$

$$\text{III } \sum M_{(C)} = 0 = -F_G \cdot \left(\frac{1}{2} l_4 - l_5\right) - F_K \cdot (l_2 - l_3) + F_B \cdot \frac{1}{2} l_4$$



$$\Rightarrow \text{III } F_k \cdot (l_2 - l_3) = F_B \cdot \frac{1}{2} l_4 - F_G \left(\frac{1}{2} l_4 - l_5 \right)$$

$$F_k = \frac{F_B \cdot \frac{1}{2} l_4 - F_G \left(\frac{1}{2} l_4 - l_5 \right)}{l_2 - l_3}$$

$$F_k = \frac{481,9 \text{ N} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m} - 750 \text{ N} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m} - 0,715 \text{ m} \right)}{3,5 \text{ m} - 1,2 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{F_k = 116,6 \text{ N}}}$$

$$\Rightarrow \text{II } F_{Cy} = F_G - F_B = 750 \text{ N} - 481,9 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F_{Cy} = 268,1 \text{ N}}}$$

$$\Rightarrow \text{I } F_{Cx} = F_k = \underline{\underline{116,6 \text{ N}}}$$

$$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = \sqrt{116,6^2 + 268,1^2} \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F_C = 292,3 \text{ N}}}$$

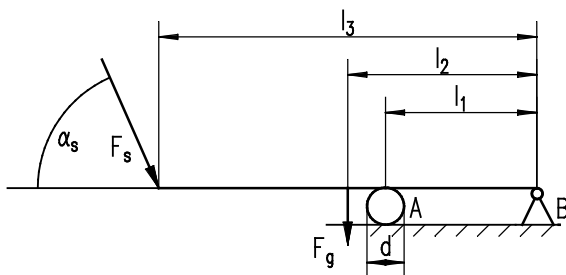
$$\beta = \arctan \frac{F_{Cy}}{F_{Cx}} = \arctan \frac{268,1 \text{ N}}{116,6 \text{ N}}$$

$$\underline{\underline{\beta = 66,5^\circ}}$$

Lehrbeispiel 10

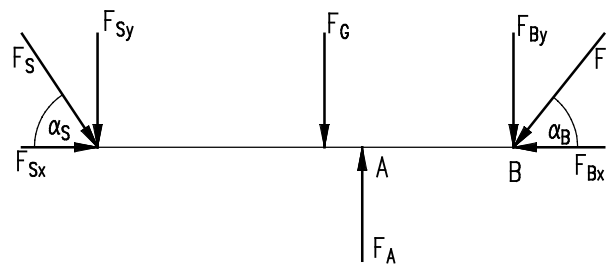
Ein Sprungbrett mit einer Gewichtskraft von 250 N wird beim Absprung mit einer Kraft von 1 kN unter einem Winkel von 65° belastet. Die folgenden Abstände sollen berücksichtigt werden: $l_1 = 2 \text{ m}$, $l_2 = 2,5 \text{ m}$, $l_3 = 5 \text{ m}$, $d = 0,5 \text{ m}$.

Wie groß sind die Beträge der Kräfte in der Walze A und im Festlager? Unter welchem Winkel, bezogen auf die Waagerechte, wirken diese Kräfte?



Lösung

Gegeben:	$F_G = 250 \text{ N}$	$l_2 = 2,5 \text{ m}$
	$F_S = 1 \text{ kN}$	$l_3 = 5 \text{ m}$
	$\alpha_S = 65^\circ$	$d = 0,5 \text{ m}$
	$l_1 = 2 \text{ m}$	



$$\begin{aligned} \text{I} \quad \sum F_X &= 0 = -F_{Bx} + F_{Sx} \\ \text{II} \quad \sum F_y &= 0 = -F_{Sy} - F_G + F_A - F_{By} \\ \text{III} \quad \sum M_{(B)} &= 0 = +F_{Sy} \cdot l_3 + F_G \cdot l_2 - F_A \cdot l_1 \end{aligned}$$

$$F_{Sy} = F_S \cdot \sin \alpha_S$$

$$F_{Sx} = F_S \cdot \cos \alpha_S$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{III} \quad F_A &= \frac{F_S \cdot \sin \alpha_S \cdot l_3 + F_G \cdot l_2}{l_1} \\ F_A &= \frac{1000 \text{ N} \cdot \sin 65^\circ \cdot 5 \text{ m} + 250 \text{ N} \cdot 2,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} \\ F_A &= \underline{\underline{2578,27 \text{ N}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{II} \quad F_{By} &= F_A - F_S \cdot \sin 65^\circ - F_G = 2578,27 \text{ N} - 906,31 \text{ N} - 250 \text{ N} \\ F_{By} &= \underline{\underline{1422 \text{ N}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{I} \quad F_{Bx} &= F_S \cdot \cos \alpha_S = 1000 \text{ N} \cdot \cos 65^\circ \\ F_{Bx} &= \underline{\underline{422,6 \text{ N}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_B &= \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{422,6^2 + 1422^2} \text{ N} \\ F_B &= \underline{\underline{1483,4 \text{ N}}} \end{aligned}$$

$$\alpha_A = 90^\circ \text{ da Walzenlager}$$

$$\begin{aligned} \alpha_B &= \arctan \frac{F_{By}}{F_{Bx}} = \arctan \frac{1422 \text{ N}}{422,6 \text{ N}} \\ \alpha_B &= \underline{\underline{73,4^\circ}} \end{aligned}$$

Wichtig bei der Betrachtung von Körpern ist der **Schwerpunkt**. Muss bei einem statischen Problem die Gewichtskraft eines Körpers beachtet werden, so muss der Betrachter wissen, wo die Wirklinie der Kraft liegt und in welchem Punkt sie greift. In den Lehrbeispielen wurden die Beträge, die Wirklinien und die Wirkrichtung der Gewichtskräfte angegeben. Dies ist aber nicht immer der Fall. Der Betrachter muss sich die Angaben selbst erarbeiten. Der Betrag kann entweder durch eine Kraftmessung oder, wie mehrfach beschrieben, durch die Angabe der Masse des Körpers errechnet werden. Der Richtungssinn ist immer dem Erdmittelpunkt zugewandt. Doch in welchem Punkt greift die Kraft? Dieser Angriffspunkt wird in der Physik als Schwerpunkt bezeichnet.

Aber was ist ein Schwerpunkt? Hierzu ein Beispiel:

Ein rechteckiges Kupferblech mit einer geringen Dicke wird auf die Spitze eines Bleistiftes gestellt. An fast allen Stellen, wo der Stift angesetzt wird, kippt das Blech nach einer Seite weg. Es gibt aber einen Punkt, da bleibt das Blech in der Waage. Dieser Punkt heißt Schwerpunkt.

Definition: Schwerpunkt

Der Schwerpunkt S eines Körpers ist der Punkt, an dem die Gewichtskraft des Körpers greift.

Für komplizierte Körper wird die Lage des Schwerpunkts durch Versuche ermittelt. Für Körper mit einem einfachen Aufbau kann der Punkt mit den Gesetzen der Statik ermittelt werden, zum Beispiel mit dem Momentensatz, oder er ist aus Tabellenbüchern zu entnehmen.

Schwerpunkt eines Rechtecks

Lehrbeispiel 11

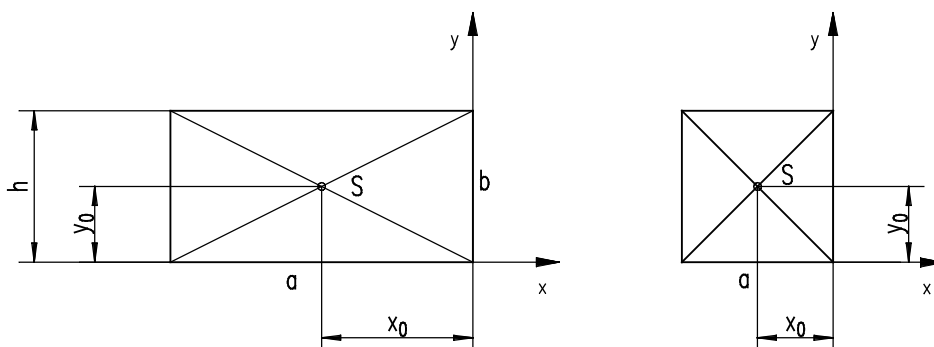
Bestimmen Sie den Flächenschwerpunkt eines Rechtecks mit den Kantenlängen a und b!

Lösung

Der Schwerpunkt wird zeichnerisch ermittelt. Der Schnittpunkt der Diagonalen ist der Schwerpunkt des Rechtecks. Das gleiche gilt für die Sonderform des Rechtecks, das Quadrat. Der Schwerpunkt wird mit den Koordinaten x und y angegeben. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt in der Ecke unten rechts.

$$x_0 = \frac{1}{2}a$$

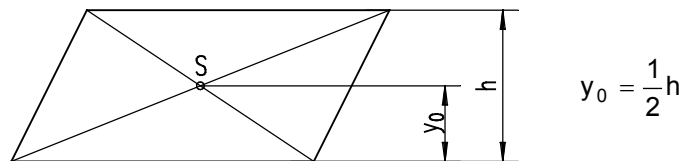
$$y_0 = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}h$$



Nachfolgend sind noch weitere Schwerpunkte einfacher Flächen mit den Formeln zur Berechnung des Schwerpunktabstandes y_0 dargestellt.

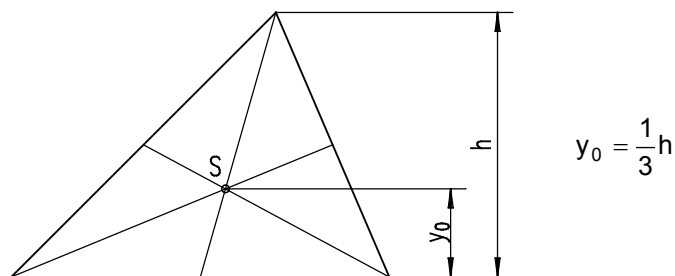
Schwerpunkt eines Parallelogramms

Der Schnittpunkt der Diagonalen ist der Schwerpunkt des Parallelogramms.



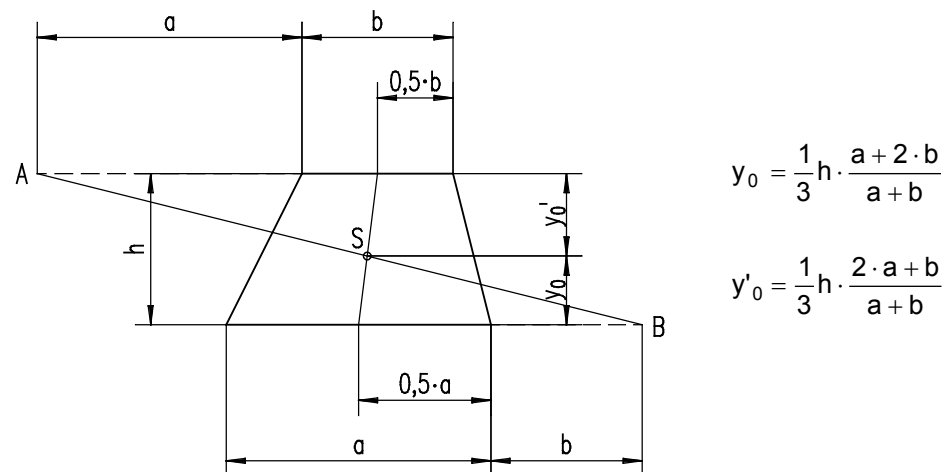
Schwerpunkt eines Dreiecks

Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

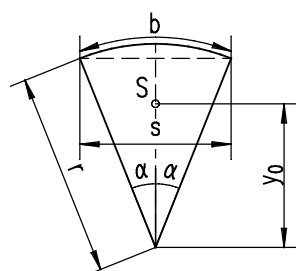


Schwerpunkt eines Trapezes

Es wird die Länge der Seite a an die Seite b angehängt und umgekehrt. Eine Diagonale wird von Punkt A zu Punkt B gezogen. Danach wird die Mitte der Seite a mit der Mitte der Seite b verbunden. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Schwerpunkt des Trapezes.



Schwerpunkt eines Kreisausschnitts



$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b}$$

b: Kreisbogenlänge ($b = 2 \cdot r \cdot \alpha$)

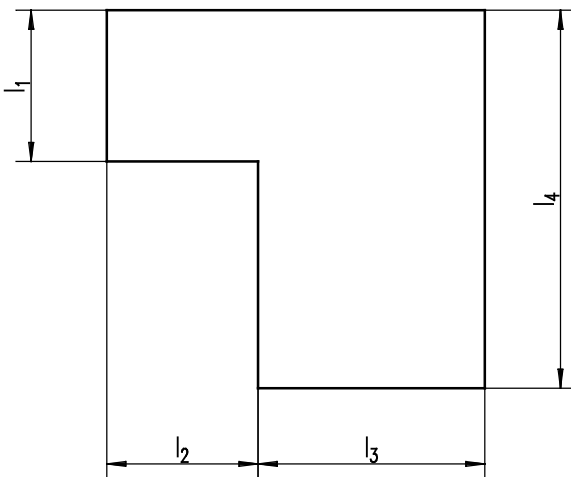
s: Sehnenlänge ($s = 2 \cdot r \cdot \sin \alpha$)

In Lehrbeispiel 12 soll der Schwerpunkt eines zusammengesetzten Körpers berechnet werden. Hierbei muss der beschriebene Arbeitsplan beachtet werden, um mit dem Momentensatz zu einer rechnerischen Lösung zu kommen.

Lehrbeispiel 12

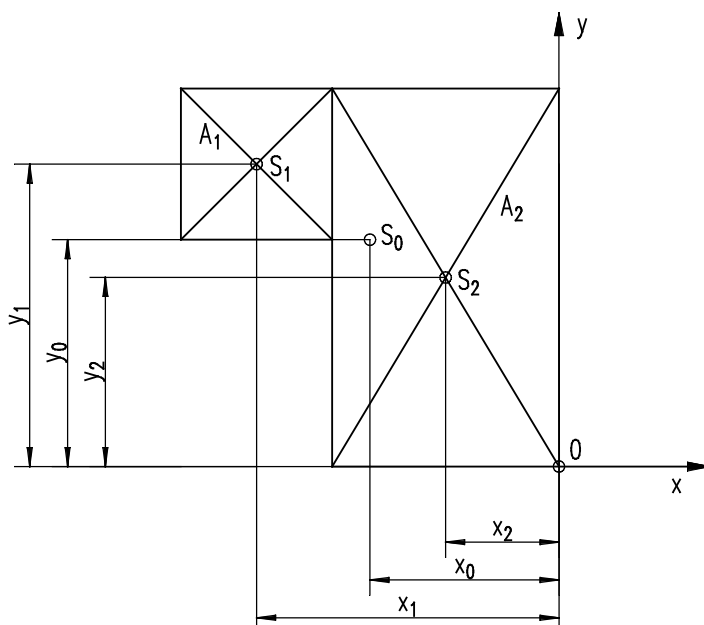
Die Fläche eines Körpers wird in nachfolgender Abbildung beschrieben. Der Körper hat die folgenden Abmaße: $l_1 = 20 \text{ mm}$, $l_2 = 20 \text{ mm}$, $l_3 = 30 \text{ mm}$, $l_4 = 50 \text{ mm}$.

Bestimmen Sie die x- und y-Koordinaten des Schwerpunktes!



Lösung

1. Die Gesamtfläche wird in Teilflächen mit bekanntem Schwerpunkt zerlegt. Momentenbezugspunkt 0 festlegen und Gesamtschwerpunkt mit angenommener Lage sowie Schwerpunktsabstände x_0 und y_0 einzeichnen.



2. Die Koordinaten der bekannten Teilschwerpunkte und die Flächeninhalte inklusive der Gesamtfläche bestimmen.

$$\begin{aligned} x_1 &= 40 \text{ mm} & y_1 &= 40 \text{ mm} \\ x_2 &= 15 \text{ mm} & y_2 &= 25 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$A_1 = l_1 \cdot l_2 = 20 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm} = 400 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = l_3 \cdot l_4 = 30 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm} = 1500 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 400 \text{ mm}^2 + 1500 \text{ mm}^2 = 1900 \text{ mm}^2$$

3. Die Momentensätze für die jeweiligen Achsen aufstellen.

$$\sum M_{(0)} = 0 = x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 - x_0 \cdot A$$

$$\sum M_{(0)} = 0 = y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 - y_0 \cdot A$$

4. Gleichungen nach den Unbekannten x_0 und y_0 umstellen und die Schwerpunktsabstände berechnen.

$$x_0 = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A}$$

$$x_0 = \frac{40 \text{ mm} \cdot 400 \text{ mm}^2 + 15 \text{ mm} \cdot 1500 \text{ mm}^2}{1900 \text{ mm}^2}$$

$$\underline{\underline{x_0 = 20,26 \text{ mm}}}$$

$$y_0 = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A}$$

$$y_0 = \frac{40 \text{ mm} \cdot 400 \text{ mm}^2 + 25 \text{ mm} \cdot 1500 \text{ mm}^2}{1900 \text{ mm}^2}$$

$$\underline{\underline{y_0 = 28,16 \text{ mm}}}$$

2.4 Bewegungen fester Körper

2.4.1 Gleichförmige und ungleichförmige Bewegungen

Nachfolgend werden die Bewegungsformen behandelt, die ein starrer Körper in Bezug auf ein erdgebundenes x -, y -, z -Koordinatensystem (ruhendes System) ausführen kann. Dieses dynamische Verhalten von Körpern wird allgemein als die Bewegungslehre oder auch Kinematik beschrieben. Die Ursache der Bewegung wird in der Kinematik nicht untersucht.

Bei einem dynamischen Körper können Längenabschnitte und Zeitabschnitte gemessen werden. Es sind die so genannten Basisgrößen der Kinematik. Ein Längenabschnitt ist eine Wegstrecke, die ein Körper in Bewegung durchläuft. Das Formelzeichen für die Wegstrecke ist Δs und die physikalische Einheit das Meter (m). Ein Zeitabschnitt gibt an, wie lange eine bestimmte Ortsveränderung gedauert hat. Das Formelzeichen hierfür ist das Δt und die Einheit die Sekunde (s).

Eine wichtige Größe, die die Dynamik eines Körpers beschreibt, lässt sich aus den Basisgrößen herleiten. Es ist die **Geschwindigkeit v** , die jedem sicherlich bekannt ist.

Definition:

Die Geschwindigkeit v eines gleichförmig bewegten Körpers ist der Quotient aus Wegabschnitt Δs pro Zeitabschnitt Δt .

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{ms}^{-1}$$

mit:

Wegabschnitt: $\Delta s = s_2 - s_1$

Zeitabschnitt: $\Delta t = t_2 - t_1$

Ist die Anfangskoordinate des Wegabschnitts s_1 und des Zeitabschnitts t_1 gleich Null, dann ergibt sich hieraus:

$$v = \frac{s}{t}$$

Die Geschwindigkeit ist eine physikalische Größe, die nur durch ihren Betrag und ihren Richtungssinn eindeutig beschrieben werden kann. Sie ist daher ein Vektor und unterliegt den Gesetzmäßigkeiten der Vektoren.

In der Definition zur Geschwindigkeit steht der Ausdruck „gleichförmig bewegter Körper“. Hierzu muss gesagt werden, dass die Bewegung eines Körpers eine räumliche und/oder zeitliche Ordnung haben kann.

Als räumliche Ordnung wird die Bewegungsbahn eines Körpers bezeichnet, die entweder gradlinig oder krummlinig sein kann. Bewegt sich ein Körper gradlinig, bedeutet es, dass er den Weg zwischen zwei Punkten A und B gerade und auf kürzestem Weg zurücklegt (Abbildung 43 ①).

Bewegt sich ein Körper krummlinig, bedeutet es, dass der gewählte Weg zwischen zwei Punkten nicht der kürzeste ist. Der Körper bewegt sich in Kurven oder Ecken (Abbildung 43 ②).

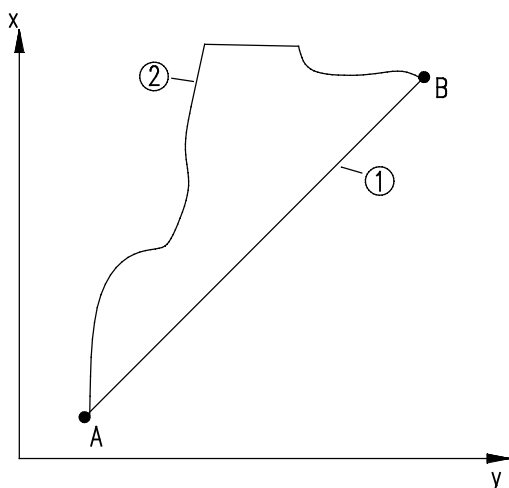


Abbildung 43 Gradlinige und krummlinige Bewegungen von Körpern

Als zeitliche Ordnung wird der Bewegungszustand des Körpers bezeichnet, der entweder gleichförmig oder ungleichförmig sein kann.

Die gleichförmige Bewegung eines Körpers bedeutet, dass sich die Geschwindigkeit, mit der sich ein Körper bewegt, nicht ändert, sie bleibt konstant.

Die ungleichförmige Bewegung eines Körpers bedeutet, dass sich die Geschwindigkeit, mit der sich ein Körper bewegt, vergrößert oder verringert. Der Körper wird beschleunigt oder gebremst.

Die gleichförmige und ungleichförmige Bewegung eines Körpers kann in einem Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm veranschaulicht werden (Abbildung 44). Das Diagramm ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem auf der x-Achse die Zeit t und auf der y-Achse der Weg s bzw. die Geschwindigkeit v aufgetragen ist.

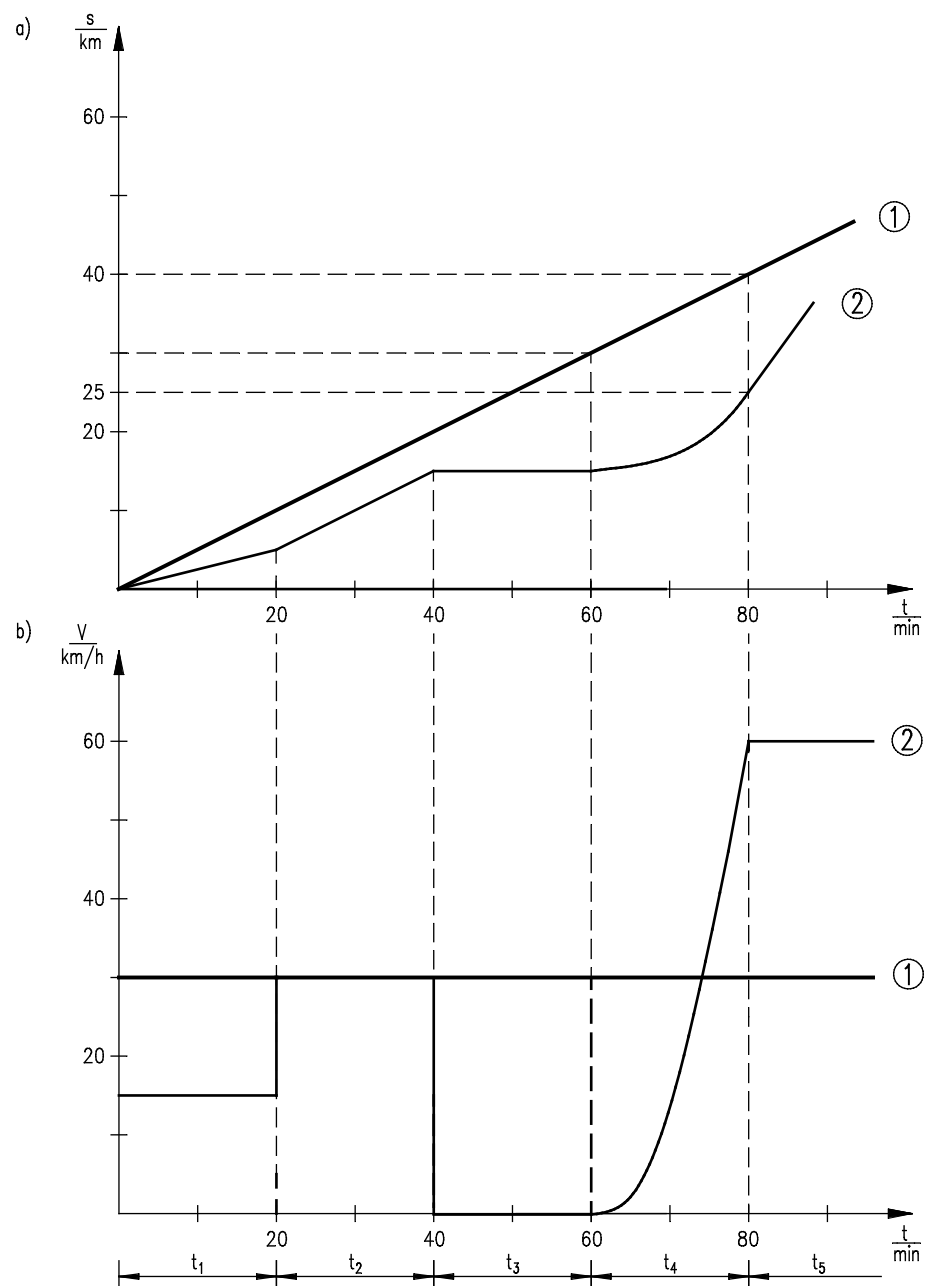


Abbildung 44 a) Weg-Zeit-Diagramm b) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (idealisierte Darstellung)

Definition:

Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Kurve in einem Weg-Zeit-Diagramm. Ist die Steigung über einen Zeitraum konstant, so ist die Geschwindigkeit über diesen Zeitraum ebenfalls konstant, sie ist gleichförmig.

Ist die Steigung über einen Zeitraum nicht konstant, so ist die Geschwindigkeit über diesen Zeitraum ebenfalls nicht konstant, sie ist ungleichförmig.

Kurve 1: Gleichförmige Bewegung (vgl. Abbildung 44)

In der veranschaulichten Zeitspanne von $\Delta t = 80$ min bewegt sich der Körper eine Wegstrecke von $\Delta s = 40$ km (Abbildung 44a). Die Bewegung ist in dem Weg-Zeit-Diagramm als Gerade dargestellt. Die Steigung ist über die gesamte Zeit konstant. Die Steigung der Kurve aus dem Weg-Zeit-Diagramm wird im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm veranschaulicht (siehe Abbildung 44b). Ist die Bewegung des Körpers gleichförmig, so wird die Geschwindigkeit als Gerade abgetragen, die parallel zur Zeitachse verläuft.

In dem gezeigten Beispiel bewegt sich der Körper im betrachteten Zeitraum von 80 min alle 10 min um 5 km weiter. Die Steigung ist somit in jedem Punkt gleich. Damit ist auch die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt gleich ($v = 30$ km/h).

Kurve 2: Ungleichförmige Bewegung (vgl. Abbildung 44)

Entlang einer definierten Zeitspanne ($\Delta t = 80$ min) bewegt sich der Körper eine Wegstrecke von 25 km. Die Bewegung ist in dem Weg-Zeit-Diagramm dargestellt. Die Steigung der Kurve ist aber nicht zu jedem Zeitpunkt konstant.

Die Steigung aus dem Weg-Zeit-Diagramm wird wieder im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellt (Abbildung 44b). Zur Zeit der größten Steigung im Weg-Zeit-Diagramm ist die Geschwindigkeit am Größten (t_5). Zur Zeit der kleinsten Steigung ist auch die Geschwindigkeit am kleinsten (t_1). Ist die Steigung gleich Null, dann ist auch die Geschwindigkeit Null (t_3). Bei ungleichförmigen Bewegungen muss die abgetragene Geschwindigkeit keine Gerade ergeben (t_4).

Abbildung 45 zeigt nochmals ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Die Geschwindigkeit ist im Bereich von $t = 0$ s bis $t = 5$ s gleichförmig, da sie parallel zur Zeitachse verläuft (v ist konstant). Der Inhalt des Rechtecks zwischen den Achsen und den parallelen Geraden ergibt formal $v \cdot t$. Dieses Produkt entspricht auch wegen $s = v \cdot t$ der zurückgelegten Wegstrecke s .

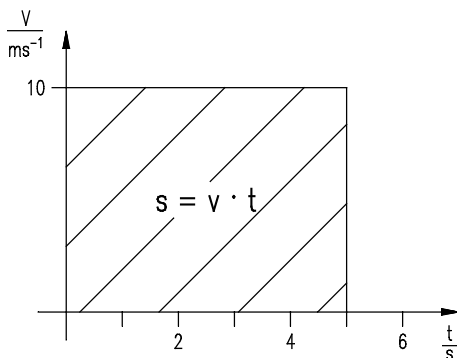


Abbildung 45 v-t-Diagramm

Hieraus wird geschlossen: Der zu erreichende Flächeninhalt unterhalb der Geschwindigkeitslinie lässt sich physikalisch deuten als die Wegstrecke s , die bis zu einer Zeit t mit der Geschwindigkeit v durchlaufen wurde.

$$A \hat{=} v \cdot t$$

$$A \hat{=} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s}$$

$$A \hat{=} 50 \text{ m} \Rightarrow s = 50 \text{ m}$$

Lehrbeispiel 1

Ein Förderband mit einer Länge von 32 m befördert eine Kiste mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von 2 m/s.

Wie viel Zeit benötigt die Kiste für den Transport auf dem Band?

Lösung

Gegeben: $s = 32 \text{ m}$

$$v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Gesucht: t

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} \quad \text{mit } t_1 = 0 \quad \text{und} \quad s_1 = 0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{32 \text{ m}}{2 \text{ m/s}}$$

$$\underline{\underline{t = 16 \text{ s}}}$$

Allgemein legt ein Körper in gleichen Zeitabschnitten unterschiedliche Wegstrecken zurück. Wird bei einer ungleichförmigen Bewegung eines Körpers eine Wegstrecke pro Zeitabschnitt gemessen, so ergibt der Quotient aus beiden die mittlere Geschwindigkeit v . Werden die Geschwindigkeiten des Körpers entlang der Strecke immer wieder gemessen, so stellt man unterschiedliche Momentangeschwindigkeiten fest.

Lehrbeispiel 2

Ein Zug verlässt den Bahnhof um 7.32 Uhr. An seinem Zielbahnhof, der 97 km entfernt ist, kommt er um 8.45 Uhr an.

Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit war der Zug unterwegs?

Lösung

Gegeben: $s = 97 \text{ km}$
 $t_1 = 7.32 \text{ Uhr}$
 $t_2 = 8.45 \text{ Uhr}$

Gesucht: v

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\Delta s = s \quad \Delta t = t_2 - t_1 = 8 \text{ h } 45 \text{ min} - 7 \text{ h } 32 \text{ min} = 73 \text{ min}$$

$$v = \frac{s}{t_2 - t_1} = \frac{97 \text{ km}}{73 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}}$$

$$\underline{\underline{v = 79,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

Lehrbeispiel 3

Zwei Fahrzeuge fahren vom gleichen Ort aus in gleicher Richtung. Fahrzeug 1 fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_1 = 80 \text{ km/h}$ und Fahrzeug 2 mit einer Geschwindigkeit von $v_2 = 90 \text{ km/h}$. Fahrer 1 startet seine Reise um 12.15 Uhr und Fahrer 2 um 12.30 Uhr.

3.1 Welche Wegstrecke haben beide Fahrzeuge um 12.45 Uhr zurückgelegt?

3.2 Nach welcher Zeit hat Fahrzeug zwei das erste eingeholt und welche Wegstrecke haben sie dabei zurückgelegt?

Lösung

Gegeben: $s_0 = 0 \text{ km}$

$$v_1 = 80 \text{ km h}^{-1}$$

$$v_2 = 90 \text{ km h}^{-1}$$

$$t_1 = 12 \text{ h } 15 \text{ min}$$

$$t_2 = 12 \text{ h } 30 \text{ min}$$

Lehrbeispiel 3.1

Gesucht: Δs_1 ; Δs_2

bei $t_a = 12 \text{ h } 45 \text{ min}$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v \cdot \Delta t$$

$$\Delta t_1 = t_a - t_1 = 12 \text{ h } 45 \text{ min} - 12 \text{ h } 15 \text{ min}$$

$$\Delta t_1 = 30 \text{ min}$$

$$\Delta t_2 = t_a - t_2 = 12 \text{ h } 45 \text{ min} - 12 \text{ h } 30 \text{ min}$$

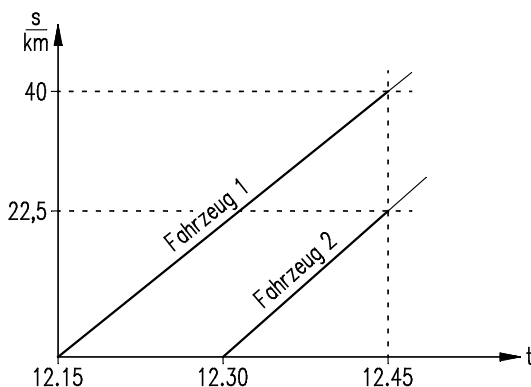
$$\Delta t_2 = 15 \text{ min}$$

$$\Delta s_1 = v_1 \cdot \Delta t_1 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 30 \text{ min} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}$$

$$\Delta s_1 = 40 \text{ km}$$

$$\Delta s_2 = v_2 \cdot \Delta t_2 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 15 \text{ min} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}$$

$$\Delta s_2 = 22,5 \text{ km}$$



Lehrbeispiel 3.2

Gesucht: t_b ; s_b

Beide Fahrzeuge haben im Moment des Überholens dieselbe Strecke gefahren. Fahrzeug 1 benötigte für diese Strecke die Zeit von $t + 15$ min und Fahrzeug 2 die Zeit t .

Fahrzeug 1: $s_{b1} = v_1(t_b + t_{15})$

Fahrzeug 2: $s_{b2} = v_2 \cdot t_b$

$$s_{b1} = s_{b2} = s_b$$

$$v_1 \cdot (t_b + t_{15}) = v_2 \cdot t_b$$

$$v_1 \cdot t_b + v_1 \cdot t_{15} = v_2 \cdot t_b$$

$$v_1 \cdot t_{15} = v_2 \cdot t_b - v_1 \cdot t_b$$

$$v_1 \cdot t_{15} = t_b \cdot (v_2 - v_1)$$

$$\frac{v_1 \cdot t_{15}}{v_2 - v_1} = t_b$$

$$\Rightarrow t_b = \frac{80 \text{ km/h} \cdot 15 \text{ min}}{90 \text{ km/h} - 80 \text{ km/h}}$$

$$t_b = 120 \text{ min} = 2 \text{ h}$$

$$s_{b1} = 80 \text{ km/h} \cdot (120 \text{ min} + 15 \text{ min}) \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}$$

$$s_{b1} = s_b = 180 \text{ km}$$

$$s_{b2} = 90 \text{ km/h} \cdot 2 \text{ h}$$

$$s_{b2} = s_b = 180 \text{ km}$$

Hinweis: Zeichnerische Ergebnisüberprüfung!

Umfangsgeschwindigkeit

Die **Umfangsgeschwindigkeit** v ist ein Sonderfall für die Geschwindigkeit. Sie gibt an, wie schnell sich ein Punkt gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt. Um diesen Begriff zu beschreiben, muss zuerst die physikalische Größe der **Drehzahl** n definiert werden.

Definition:

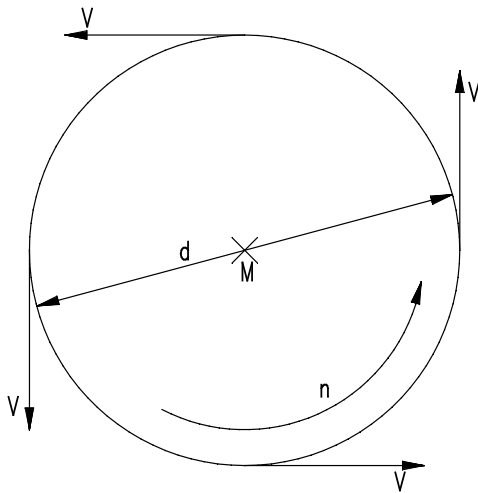
Die **Drehzahl** n (**Drehfrequenz**) gibt an, wie viel volle Umdrehungen u ein Körper um seine Achse in einem definierten Zeitabschnitt t vollbracht hat.

$$n = \frac{u}{t}$$

$$[n] = \frac{1}{s}$$

Definition:

Die **Umfangsgeschwindigkeit** v ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt. Sie ist proportional der Drehzahl n und dem Umfang U .



$$v = U \cdot n$$

$$v = d \cdot \pi \cdot n$$

$$[v] = [d] \cdot \pi \cdot [n] = \text{m} \cdot \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Abbildung 46 Umfangsgeschwindigkeit

Lehrbeispiel 4

Die Riemenscheibe eines Bandschleifers hat den Durchmesser von 200 mm und dreht sich je Minute 1440 mal.

Wie groß ist die Schleifbandgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde?

Lösung

Gegeben: $d = 200 \text{ mm}$

$$n = 1440 \frac{1}{\text{min}}$$

Gesucht: v

$$v = d \cdot \pi \cdot n$$

$$v = 200 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} \cdot \pi \cdot 1440 \frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}$$

$$\underline{\underline{v = 15,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Lehrbeispiel 5

Eine Schleifscheibe zum Messerschleifen hat einen Radius von 70 mm. Die Scheibe ist für eine Umfangsgeschwindigkeit von 20 m/s zugelassen.

Wie schnell darf sich die Scheibe drehen?

Lösung

Gegeben: $r = 70 \text{ mm}$

$$v_{\max} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Gesucht: n_{\max}

$$v = d \cdot \pi \cdot n = 2 r \cdot \pi \cdot n$$

$$n_{\max} = \frac{v_{\max}}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 70 \text{ mm} \cdot \pi} \cdot \frac{1000 \text{ mm}}{1 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{n_{\max} = 45,5 \frac{1}{\text{s}}}}$$

Das Winkelmaß

Die Größe eines Winkels φ lässt sich auf drei Arten eindeutig beschreiben. Diese sind das Grad, das Bogenmaß und das Neugrad. Die Winkel lassen sich jeweils vom Einheitskreis herleiten. Ein Einheitskreis ist ein idealer Kreis mit einem Radius von 1. Eine Umdrehung eines Kreises ergibt den maximalen Winkel, den so genannten Vollwinkel.

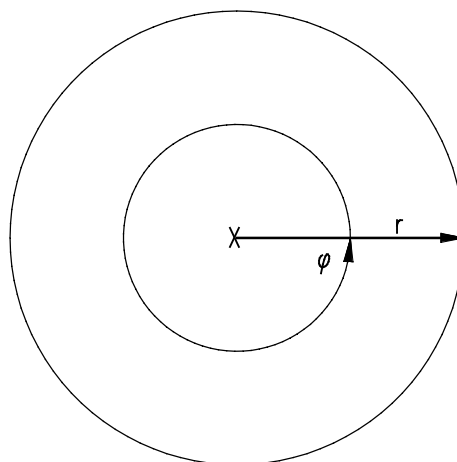


Abbildung 47 Winkel im Einheitskreis

Das Gradmaß hat einen Vollwinkel von 360° . Der Einheitskreis wird in 360 gleich große Teile geteilt.

Das **Bogenmaß** hat einen Vollwinkel von 2π . Es errechnet sich aus dem Quotienten des Kreisbogens b zu dem zugehörigen Radius r . Das Bogenmaß findet seine Anwendung meist in der Physik und in der höheren Mathematik.

$$\varphi = \frac{b}{r} \text{ rad}$$

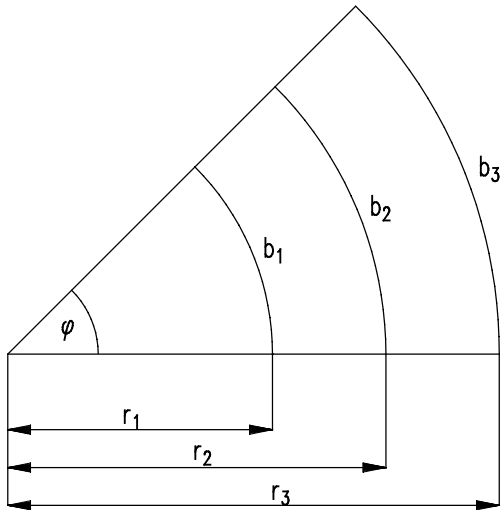


Abbildung 48 Das Bogenmaß

Das **Neugrad** hat der Vollwinkel von 400° . Der Einheitskreis wird in 400 gleich große Teile geteilt. Das Neugrad wird hier nur zur Vollständigkeit erwähnt. In den nachfolgenden Beschreibungen wird es nicht weiter verwandt.

In der nachfolgenden Tabelle sind mehrere Winkel in Grad und dem zugehörigen Bogenmaß angegeben. Die Winkel sind zur Veranschaulichung auf dem Einheitskreis in Abbildung 49 abgetragen.

Winkel φ	Gradmaß	Bogenmaß
φ_0	0°	0 rad
φ_1	90°	$0,5\pi$ rad
φ_2	180°	π rad
φ_3	270°	$1,5\pi$ rad
φ_4	360°	2π rad
φ_5	$57,3^\circ$	1 rad

Tabelle 5 Winkel mit zugehörigem Bogenmaß

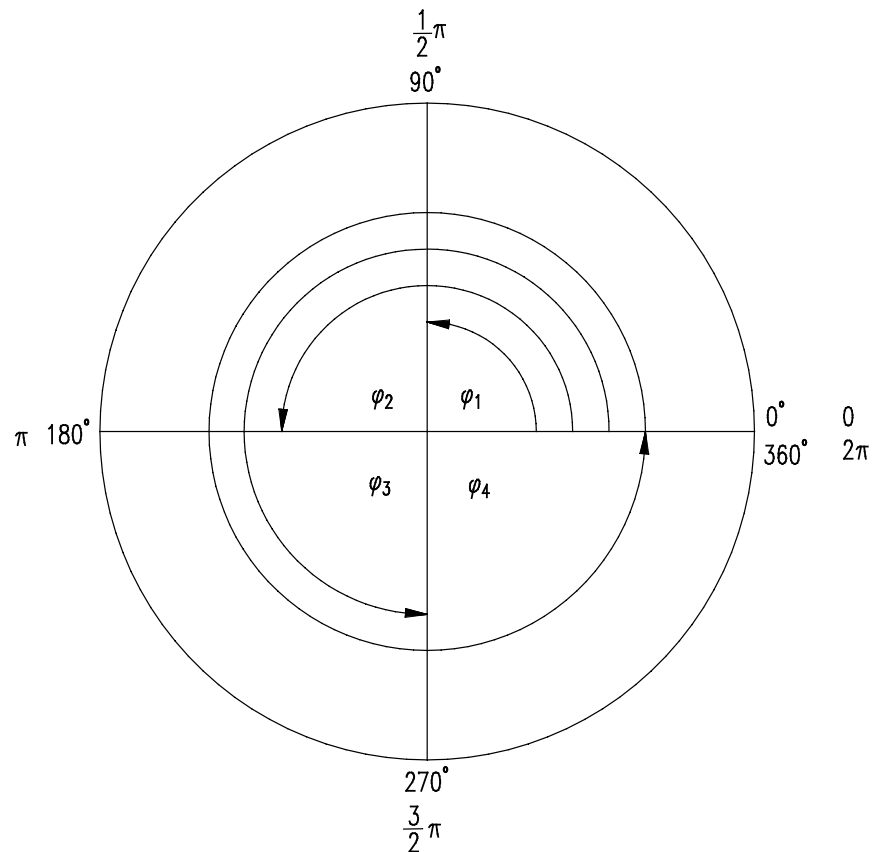


Abbildung 49 Einheitskreis mit Einteilungen in Grad- und Bogenmaß

Mit den folgenden Formeln lassen sich Winkelangaben von Grad in Bogenmaß umrechnen und umgekehrt:

$$\varphi^\circ \hat{=} \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi \text{ rad}$$

$$\varphi \text{ rad} \hat{=} \varphi^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \text{rad}$$

Lehrbeispiel 6

Rechnen Sie den Winkel $\varphi = 40^\circ$ in Bogenmaß um!

Lösung

Gegeben: $\varphi = 40^\circ$

Gesucht: φ in rad

$$\varphi \text{ rad} \hat{=} \varphi^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = 40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} \hat{=} 0,698 \text{ rad}$$

$$\underline{\underline{40^\circ \hat{=} 0,698 \text{ rad}}}$$

Lehrbeispiel 7

Rechnen Sie das Bogenmaß von $\varphi = 0,75 \text{ rad}$ in das entsprechende Gradmaß um!

Lösung

Gegeben: $\varphi = 0,75 \text{ rad}$

Gesucht: φ°

$$\varphi^\circ = \varphi \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 0,75 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 43^\circ$$

$$\underline{\underline{0,75 \text{ rad} \hat{=} 43^\circ}}$$

Gleichförmige Kreisbewegung

Um eine gleichförmige Kreisbewegung beschreiben zu können, müssen einige Definitionen eingeführt werden.

Definition:

Die Umlaufzeit T ist die Zeit, die ein Punkt für eine volle Kreisumdrehung benötigt. Die Umlaufzeit ist umgekehrt proportional der Drehzahl n. Sie wird in Sekunden angegeben.

$$T = \frac{1}{n}$$

$$[T] = \frac{1}{[n]} = \text{s}$$

Frequenz f

Die Frequenz f ist der Quotient aus der Anzahl der vollen Umläufe u und dem zugehörigen Zeitabschnitt t. Betrachtet man nur einen Umlauf u = 1, dann ist der Zeitabschnitt gleich der Umlaufzeit T.

Definition:

Die Frequenz f ist der Kehrwert der Umlaufzeit T. Die Einheit der Frequenz ist das Hertz (Hz).

$$f = \frac{1}{T}$$

$$[f] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

Winkelgeschwindigkeit ω

Allgemein wird die Geschwindigkeit v einer gleichförmigen Bewegung als der Quotient der durchlaufenden Wegstrecke Δs zu dem benötigten Zeitabschnitt Δt definiert.

Bei der Bestimmung der Geschwindigkeit einer Drehbewegung ist es zweckmäßiger nicht die Strecke, sondern eine Beziehung zum Drehwinkel φ zu erarbeiten. Diese Beziehung wird als die Winkelgeschwindigkeit ω bezeichnet.

Definition:

Die Winkelgeschwindigkeit ω einer gleichförmigen Kreisbewegung ist der Quotient aus dem zurückgelegten Drehwinkel φ im Bogenmaß zu dem dazu benötigten Zeitabschnitt t .

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Da es immer etwas kompliziert ist, den Winkel φ genau zu beschreiben, ist es sinnvoll, die Geschwindigkeit bei einer vollen Kreisumdrehung zu bestimmen. Eine volle Kreisumdrehung hat einen Winkel $\varphi = 2 \cdot \pi$. Der Körper benötigt für diese Umdrehung die Umlaufzeit T . Aus diesen physikalischen Größen lassen sich zwei Formeln zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit herleiten:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$[\omega] = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{[T]} = 2 \cdot \pi \cdot [f] = \frac{1}{s}$$

Zwischen der Winkelgeschwindigkeit und der Bahngeschwindigkeit eines Körpers, der sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt, besteht der folgende Zusammenhang:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$v = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot r$$

$$v = \omega \cdot r$$

$$[v] = [\omega] \cdot [r] = \frac{1}{s} \cdot m = \frac{m}{s}$$

Die Bahngeschwindigkeit v eines Punktes auf einer Kreisbahn, bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ω , ist umso größer, je weiter sein Abstand von der Drehachse entfernt ist.

Lehrbeispiel 8

Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h über eine Straße. Die Räder haben einen Durchmesser von 40 cm.

Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit eines Rades sowie die Frequenz und die Drehzahl pro Minute!

Lösung

Gegeben: $v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$d = 40 \text{ cm}$

Gesucht: ω ; f ; n

$$v = \omega \cdot r$$

$$r = \frac{1}{2}d$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2v}{d} = \frac{2 \cdot 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{40 \text{ cm}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}$$

$$\omega = 83,3 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{83,3 \frac{1}{\text{s}}}{2 \cdot \pi}$$

$$f = 13,3 \text{ Hz}$$

$$n = f \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 13,3 \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}$$

$$n = 795,8 \frac{1}{\text{min}}$$

Hinweis: Die angegebene Geschwindigkeit ist gleich der Umfangsgeschwindigkeit des Rades!

Ungleichförmige Bewegung

Bis jetzt wurden nur Bewegungen betrachtet, die gleichförmig waren. Aber was ist eine ungleichförmige Bewegung? Ändert sich die Geschwindigkeit des bewegten Körpers über einen betrachteten Zeitabschnitt Δt , bewegt sich der Körper entweder schneller oder langsamer. Nimmt die Geschwindigkeit eines Körpers zu, so wird dieser **beschleunigt**, nimmt die Geschwindigkeit ab, so wird der Körper **gebremst** oder **verzögert**. In der Physik wird sowohl beim Beschleunigen als auch beim Abbremsen eines Körpers von einer Beschleunigung gesprochen. Vergrößert sich die Geschwindigkeit des Körpers, so ist die Beschleunigung positiv, verringert sich die Geschwindigkeit des Körpers, so ist die Beschleunigung negativ.

Definition:

Die Beschleunigung a ist die Steigung der Kurve in einem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Sie errechnet sich aus dem Quotient der Geschwindigkeitsänderung Δv pro Zeitabschnitt Δt .

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\text{andere Schreibweise: } \text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

Abbildung 50 zeigt den Verlauf der Kurven im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm und Beschleunigung-Zeit-Diagramm bei einer positiven (Geschwindigkeitszuwachs) und negativen Beschleunigung (Verzögerung).

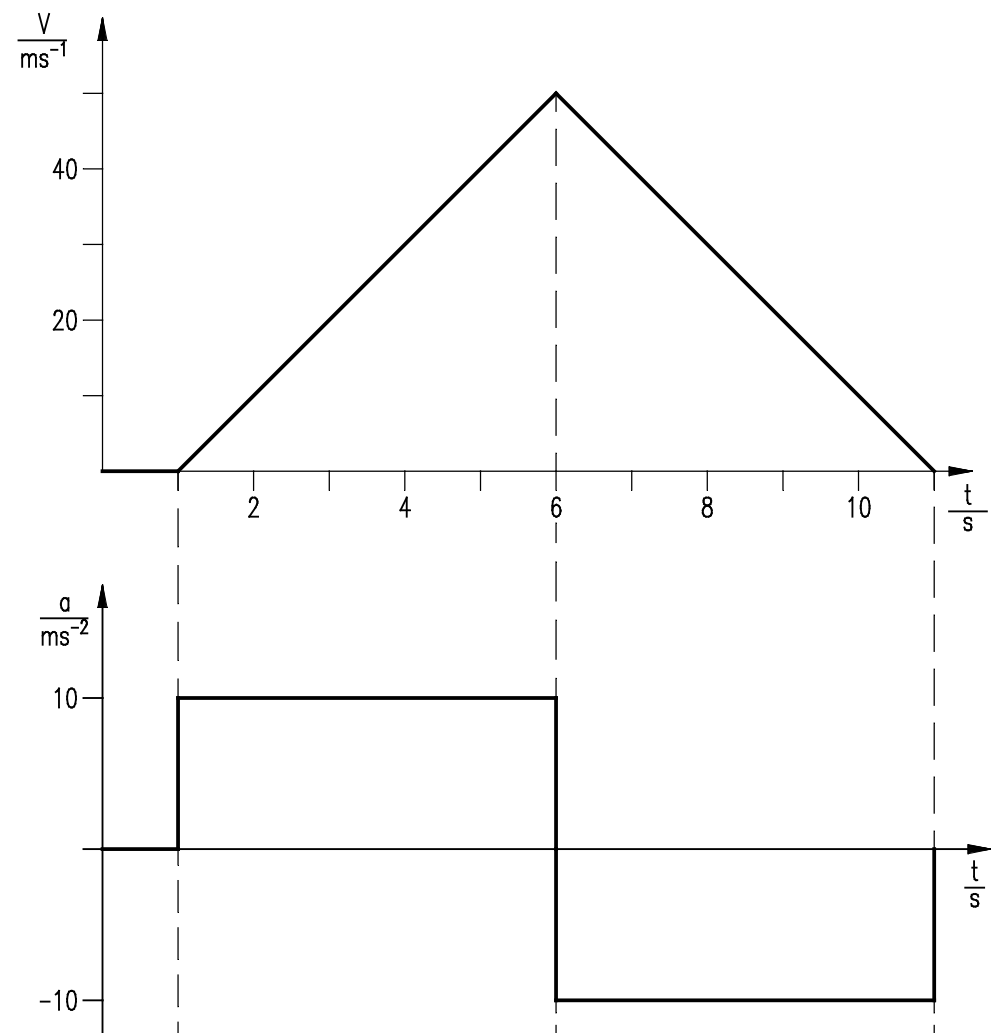
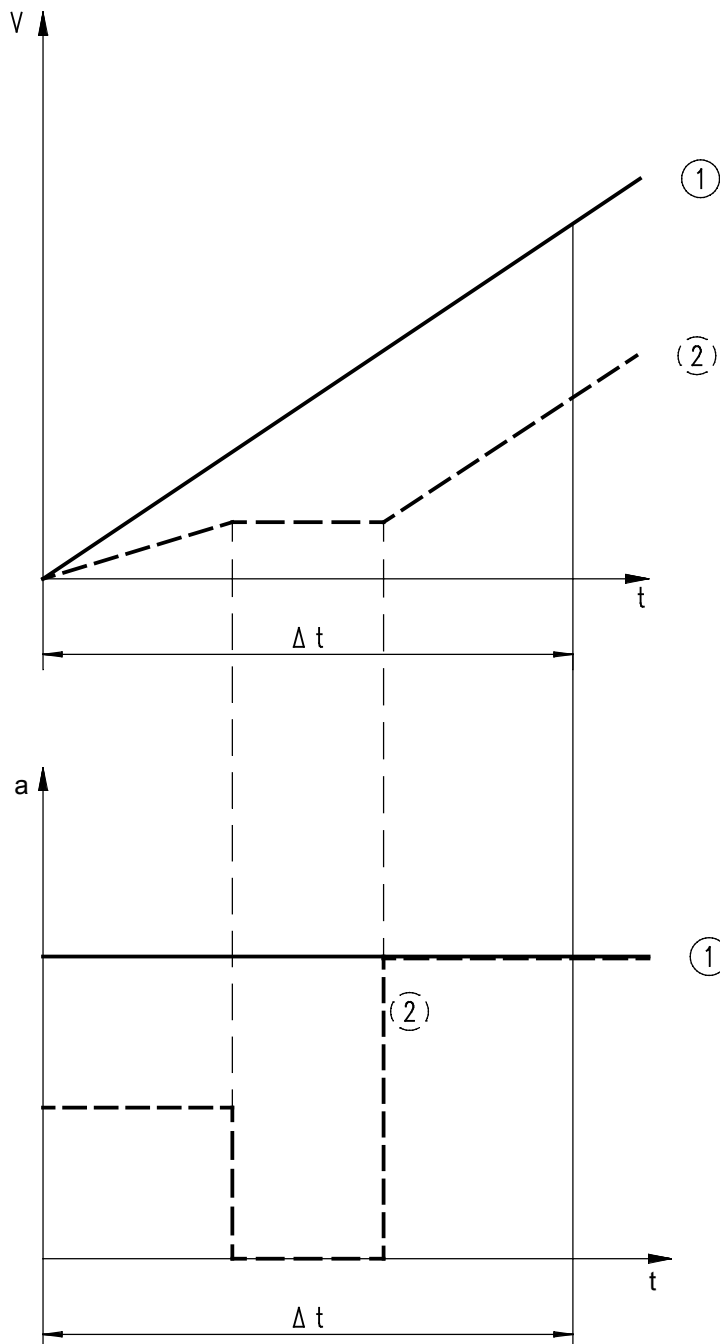


Abbildung 50 a) v-t-Diagramm und b) a-t-Diagramm

Um eine Beschleunigung eindeutig bestimmen zu können, muss die Richtung und der Betrag der Beschleunigung bekannt sein. Daher ist die Beschleunigung ein Vektor und muss mit den Gesetzmäßigkeiten der Vektoren behandelt werden.

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Die Beschleunigung wird unterschieden in eine gleichmäßige oder ungleichmäßige Beschleunigung. Bei einer gleichmäßigen Beschleunigung ist die Geschwindigkeitsänderung pro fest definiertem Zeitabschnitt (z.B. $\Delta t = 60 \text{ s}$) konstant. Ist die Geschwindigkeitsänderung über diesen Zeitabschnitt nicht konstant, dann ist die Beschleunigung ungleichmäßig. In Abbildung 51 sind beide Beschleunigungsarten qualitativ in einem Geschwindigkeit-Zeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm veranschaulicht.



- ① gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit
- ② ungleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit

Abbildung 51 a) v-t-Diagramm und b) a-t-Diagramm

Wie in den Diagrammen veranschaulicht, bestehen Zusammenhänge zwischen den physikalischen Größen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Die Geschwindigkeit wird auch beschrieben als Wegstrecke pro Zeitabschnitte:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Es besteht auch eine Abhängigkeit zwischen der Wegstrecke und der Beschleunigung.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Darüber ergibt sich mithilfe der Differentialrechnung:

$$\Delta s = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$$

Diese Beziehung ist bei einigen Aufgaben sehr nützlich.

Versuch:

Ein Körper erfährt eine gleichmäßige Beschleunigung von $a = 0,2 \text{ m/s}^2$. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt 0 m/s . Es sollen das Weg-Zeit-Diagramm erstellt werden über einen Zeitraum von $\Delta t = 10 \text{ s}$.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$\frac{t}{s}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{s}{m}$	0	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5	3,6	4,9	6,4	8,1	10

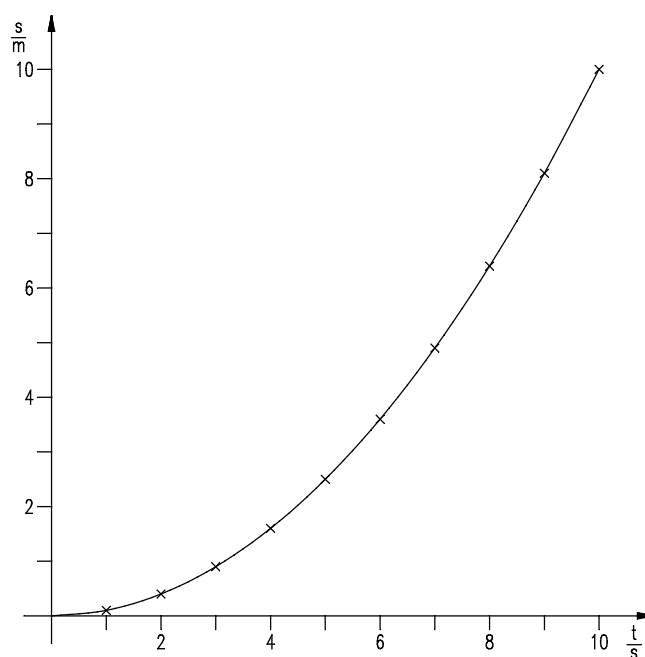


Abbildung 52 Weg-Zeit-Diagramm zum Versuch

Der quadratische Zusammenhang zwischen dem Weg s und der Zeit t bei einer konstanten Beschleunigung a ist am Parabelbogen im Weg-Zeit-Diagramm veranschaulicht.

Gleichmäßige Beschleunigung ohne Anfangsgeschwindigkeit

Allgemein beschrieben ist die Beschleunigung der Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung pro Zeitabschnitt:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Sind die Anfangsgeschwindigkeit v_1 und die Anfangszeit t_1 gleich Null, so ergibt sich:

$$a = \frac{v}{t}$$

Die zurückgelegte Wegstrecke berechnet sich:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man:

Die Fläche, die von der Kennlinie der Geschwindigkeit und der Koordinatenachse im v - t -Diagramm begrenzt ist, entspricht der Größe des zurückgelegten Wegs.

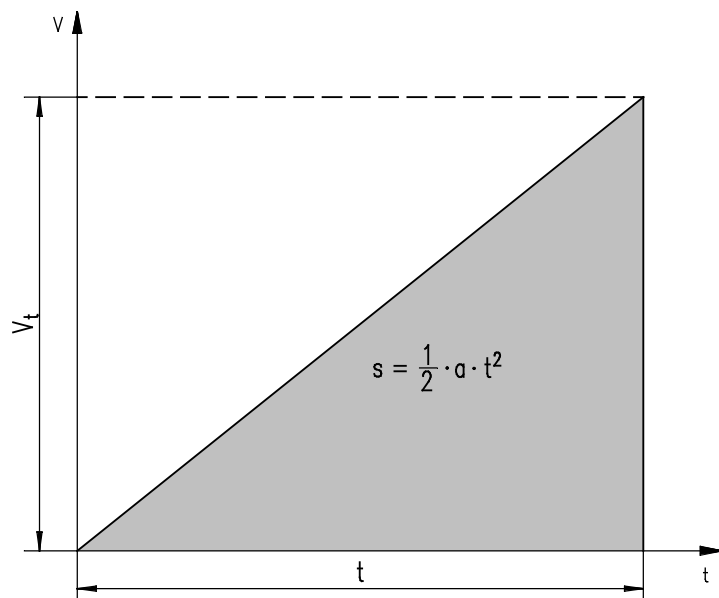


Abbildung 53 v - t -Diagramm ohne Anfangsgeschwindigkeit

Zur mathematischen Behandlung von Problemen im Zusammenhang mit beschleunigten Bewegungen sind bisher zwei Formeln erarbeitet worden:

$$(1) \quad v_t = a \cdot t$$

$$(2) \quad s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Wird die Gleichung (1) nach t gelöst und in Gleichung (2) eingesetzt, so ergibt sich:

$$t = \frac{v_t}{a}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v_t}{a} \right)^2$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{v_t^2}{a^2}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_t^2}{a}$$

$$\Rightarrow v_t^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

$$\underline{\underline{v_t = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}}}$$

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit

Hier lassen sich die Gleichungen nicht vereinfachen. Die Endgeschwindigkeit setzt sich zusammen aus der Anfangsgeschwindigkeit und der Geschwindigkeitsänderung.

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$v_t = v_0 + \Delta v$$

$$v_t = v_0 + a \cdot t$$

Der zurückgelegte Wegabschnitt berechnet sich aus dem

Weg-Zeit-Gesetz

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man folgendermaßen:

Die Fläche, die von der Kennlinie der Geschwindigkeit und der Koordinatenachse im v - t -Diagramm begrenzt ist, entspricht dem Maß für den zurückgelegten Weg.

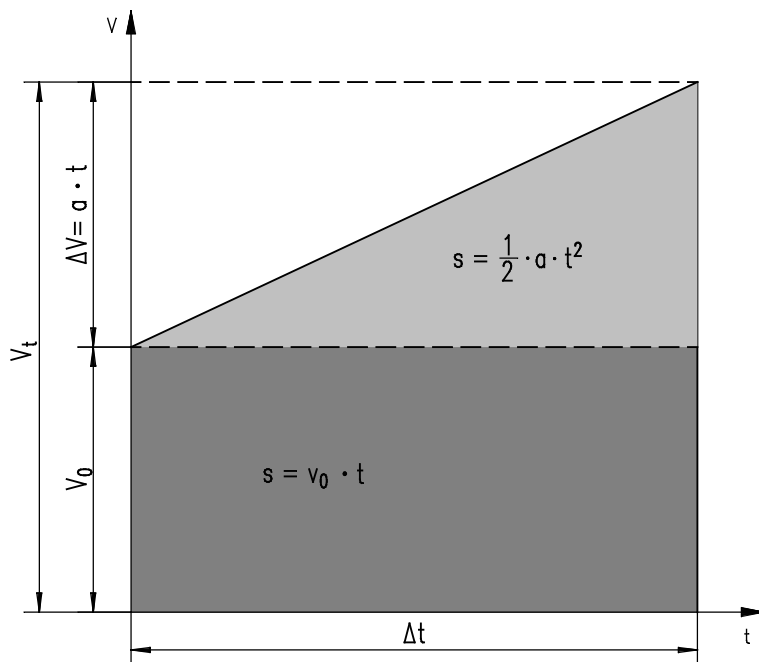


Abbildung 54 v-t-Diagramm mit Anfangsgeschwindigkeit

Aus den erarbeiteten Gesetzen lässt sich eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der Wegstrecke und der Beschleunigung herleiten.

$$v_t = v_0 + a \cdot t$$

$$a \cdot t = v_t - v_0$$

$$t = \frac{v_t - v_0}{a}$$

Setzt man diese Formel in das Weg-Zeit-Gesetz ein, dann ergibt sich:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$s = v_0 \cdot \left(\frac{v_t - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v_t - v_0}{a} \right)^2$$

$$s = \frac{v_0 \cdot (v_t - v_0)}{a} + \frac{a \cdot (v_t^2 - 2 \cdot v_t \cdot v_0 + v_0^2)}{2 \cdot a^2}$$

$$s = \frac{2(v_0 \cdot v_t - v_0^2) + (v_t^2 - 2 \cdot v_t \cdot v_0 + v_0^2)}{2a}$$

$$s = \frac{2 \cdot v_t \cdot v_0 - 2 \cdot v_0^2 + v_t^2 - 2 \cdot v_t \cdot v_0 + v_0^2}{2a}$$

$$s = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2a}$$

$$2 \cdot a \cdot s = v_t^2 - v_0^2$$

$$v_t^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s$$

$$\underline{\underline{v_t = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s}}}$$

Zusammenfassung der Bewegungsarten

Allgemeine Definition der Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Die Anfangsbedingungen sind: $s_0; v_0; t_0$

Die Endbedingungen sind: $s_t; v_t; t$

Beschleunigte Bewegung

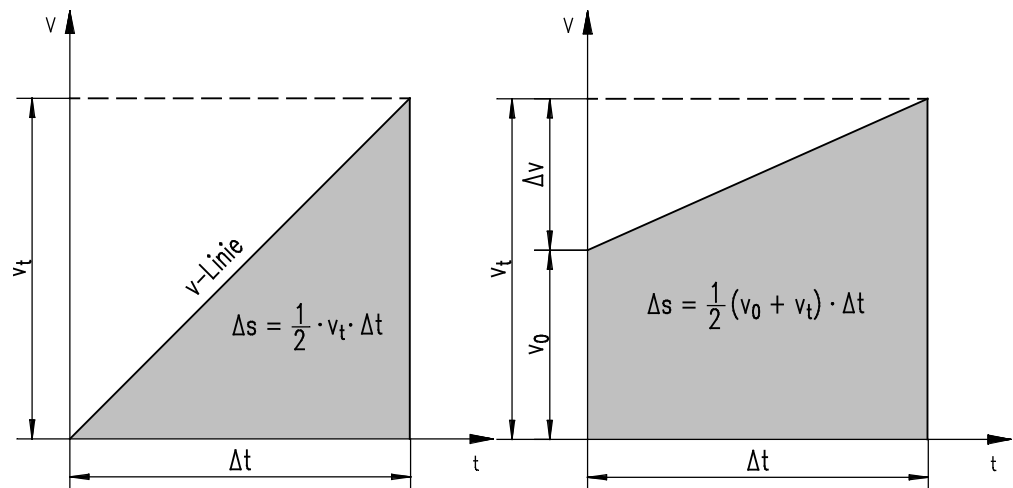


Abbildung 55 Beschleunigte Bewegung ohne und mit Anfangsgeschwindigkeit

Beschleunigung a bei $v_0 = 0$:
$$a = \frac{v_t}{\Delta t} = \frac{v_t^2}{2 \cdot \Delta s} = \frac{2 \cdot \Delta s}{(\Delta t)^2}$$

Beschleunigung a bei $v_0 \neq 0$:
$$a = \frac{v_t - v_0}{\Delta t} = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta s}$$

Endgeschwindigkeit v_t bei $v_0 = 0$:
$$v_t = a \cdot \Delta t = \sqrt{2 \cdot a \cdot \Delta s}$$

Endgeschwindigkeit v_t bei $v_0 \neq 0$:
$$v_t = v_0 + \Delta v = v_0 + a \cdot \Delta t = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s}$$

Wegabschnitt Δs bei $v_0 = 0$:
$$\Delta s = \frac{v_t \cdot \Delta t}{2} = \frac{a \cdot (\Delta t)^2}{2} = \frac{v_t^2}{2 \cdot a}$$

Wegabschnitt Δs bei $v_0 \neq 0$:
$$\Delta s = \frac{v_0 + v_t}{2} \cdot \Delta t = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2 \cdot a}$$

Zeitabschnitt Δt bei $v_0 = 0$:
$$\Delta t = \frac{v_t}{a} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta s}{a}}$$

Zeitabschnitt Δt bei $v_0 \neq 0$:
$$\Delta t = \frac{v_t - v_0}{a} = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2 \cdot \Delta s}{a}}$$

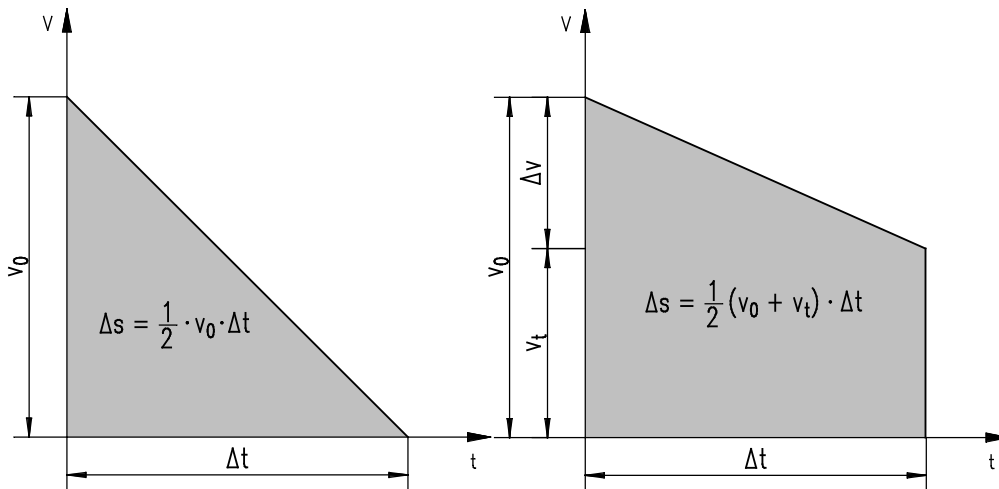
Verzögerte Bewegung

Abbildung 56 Verzögerte Bewegung ohne und mit Endgeschwindigkeit

Bei der verzögerten Bewegung (Verzögerung = negative Beschleunigung) besitzt a einen negativen Zahlenwert. Die Geschwindigkeit v nimmt ab ($v_t < v_0$), evtl. bis zur Ruhe.

Mit diesen Voraussetzungen können die gleichen Berechnungsformeln wie bei der beschleunigten Bewegung auf die verzögerte Bewegung angewendet werden.

Lehrbeispiel 9

Ein Geschützrohr hat eine Länge von 10 m. Die abgeschossene Kanonenkugel hat beim Austritt aus dem Rohr eine Geschwindigkeit von 500 m/s.

Wie groß ist die Beschleunigung, die das Geschoss im Geschützrohr erfährt?

Lösung

Gegeben: $s = 10 \text{ m}$

$$v = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Gesucht: a

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$$

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

$$a = \frac{v^2}{2 \cdot s} = \frac{\left(500 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \text{ m}}$$

$$a = 12,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Lehrbeispiel 10

Ein Zug hat eine Anfahrbeschleunigung von $a = 0,2 \text{ m/s}^2$. Nach 60 s hat er seine normale Fahrgeschwindigkeit erreicht.

Wie groß ist die Fahrgeschwindigkeit und der Wegabschnitt, der während der Anfahrt zurückgelegt wird?

Lösung

Gegeben: $a = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$t = 60 \text{ s}$$

Gesucht: $v; s$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

$$\text{mit } v_1 = 0 \quad t_1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$v = a \cdot t = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 60 \text{ s}$$

$$v = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (60 \text{ s})^2$$

$$s = 360 \text{ m}$$

Lehrbeispiel 11

Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h eine Straße entlang. Durch einen Gegenstand auf der Straße ist der Fahrer zu einer Vollbremsung gezwungen. Der Bremsvorgang beginnt nach einer Reaktionszeit von einer Sekunde. Die mittlere Bremsverzögerung beträgt $a = -6 \text{ m/s}^2$.

Berechnen Sie die Bremszeit und den Bremsweg bis zum Stillstand und zeichnen Sie das v-t-Diagramm!

Lösung

Gegeben: $v_0 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $a = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $t_R = 1 \text{ s}$

Gesucht: Δs , Δt ; v-t-Diagramm

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2$$

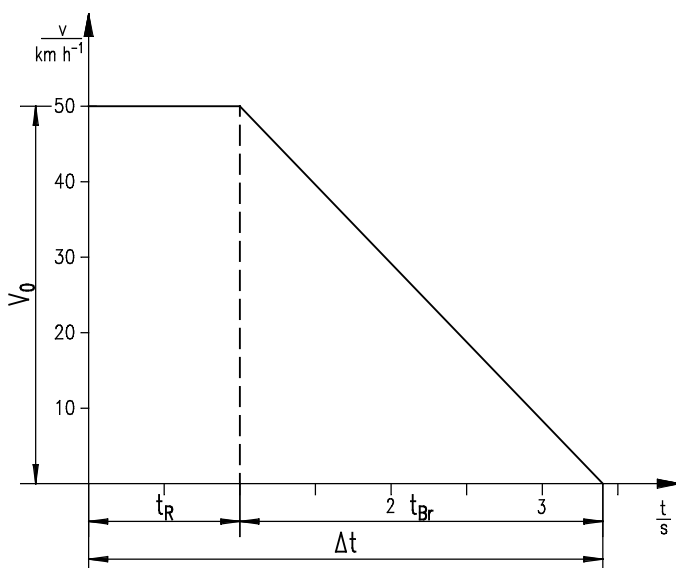
$$\Delta s_1 = v_0 \cdot t_R = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot 1 \text{ s} = 13,9 \text{ m}$$

$$\Delta s_2 = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2 \cdot a} \quad \text{mit } v_t = 0 \text{ (Stillstand) gilt:}$$

$$\Delta s_2 = \frac{-v_0^2}{2 \cdot a} = - \frac{\left(50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right)^2}{2 \cdot \left(-6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)} = 16,1 \text{ m}$$

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 13,9 \text{ m} + 16,1 \text{ m} = \underline{\underline{30 \text{ m}}}$$

$$\Delta t = t_R + t_{Br} = t_R + \frac{v_0}{a} = 1 \text{ s} + \frac{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = \underline{\underline{3,31 \text{ s}}}$$



Wird die Geschwindigkeit des PKW verdoppelt, so erhält man folgendes Ergebnis:

$$\Delta s_1 = v_0 \cdot t = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot 1 \text{ s} = 27,8 \text{ m} \quad (\text{Weg in der Reaktionszeit})$$

$$\Delta s_2 = -\frac{v_0^2}{2 \cdot a} = -\frac{\left(100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right)^2}{2 \cdot \left(-6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 64,3 \text{ m} \quad (\text{Weg in der Bremszeit})$$

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 27,8 \text{ m} + 64,3 \text{ m} = \underline{\underline{92,1 \text{ m}}}$$

$$\Delta t = t_R + t_{Br} = 1 \text{ s} + \frac{100 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = \underline{\underline{5,63 \text{ s}}}$$

An diesem Beispiel ist zu erkennen, dass bei konstanter negativer Beschleunigung der Bremsweg direkt proportional zum Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit ist. Dies bedeutet, dass ein Körper mit doppelter Anfangsgeschwindigkeit den vierfachen Bremsweg benötigt.

Lehrbeispiel 12

Ein PKW muss vor einer Kurve seine Geschwindigkeit von $v_0 = 78 \text{ km/h}$ auf $v_1 = 52 \text{ km/h}$ verlangsamen. Das Fahrzeug wird mit einer mittleren Bremsverzögerung von $a = -4 \text{ m/s}^2$ abgebremst.

12.1 Wie viel Meter vor der Kurve muss der Bremsvorgang eingeleitet werden?

12.2 Welche Beschleunigung erfährt das Auto, wenn es nach der Kurve in 3 s auf $v_2 = 80 \text{ km/h}$ beschleunigt?

Lösung

Gegeben: $v_0 = 78 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 $v_1 = 52 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 $a = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Lehrbeispiel 12.1

Gesucht: s

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s}$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

$$s = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2 \cdot a}$$

$$s = \frac{\left(52 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right)^2 - \left(78 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right)^2}{2 \left(-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}$$

$$\underline{\underline{s = 32,6 \text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 12.2

Gesucht: a bei $t = 3 \text{ s}$ $v_2 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$a = \frac{v_2 - v_0}{\Delta t}$$

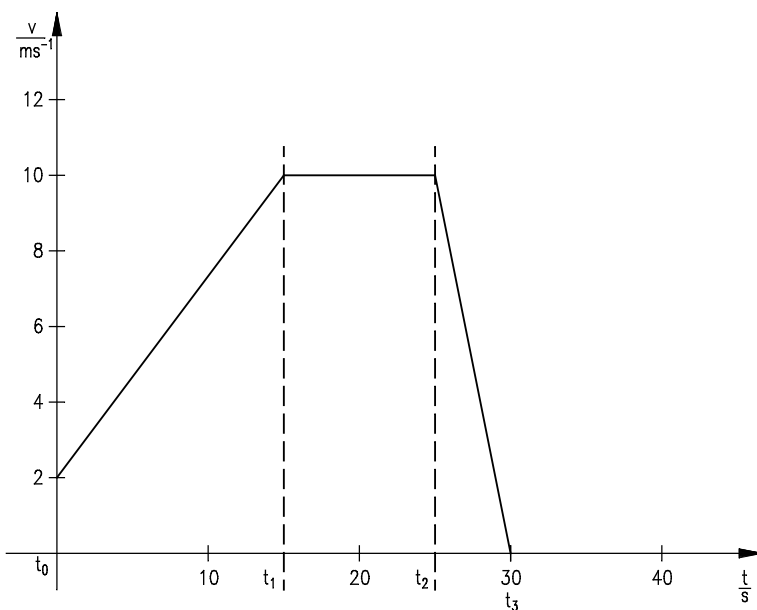
$$\Delta t = 3 \text{ s}$$

$$a = \frac{\left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 52 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}}{3 \text{ s}}$$

$$\underline{\underline{a = 2,59 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Lehrbeispiel 13

Für einen Bewegungsvorgang ist das folgende v-t-Diagramm ermittelt worden.



13.1 Beschreiben Sie den Bewegungsablauf des Körpers, der in dem v- t- Diagramm dargestellt ist!

13.2 Berechnen Sie den Weg, den der Körper während des Beobachtungszeitraumes zurückgelegt hat!

13.3 Mit welcher mittleren Geschwindigkeit \bar{v} hat sich der Körper während $t_3 = 30 \text{ s}$ bewegt?

13.4 Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit nach 28 s!

Lösung

Lehrbeispiel 13.1

In den ersten 15 s wird der Körper von der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2 \text{ m/s}$ auf die maximale Geschwindigkeit von $v_1 = 10 \text{ m/s}$ gleichförmig beschleunigt. Von Sekunde 15 bis 25 bewegt sich der Körper gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Von Sekunde 25 bis 30 erfährt der Körper eine negative Beschleunigung. Er wird bis auf die Endgeschwindigkeit von $v_2 = 0 \text{ m/s}$ verzögert.

Lehrbeispiel 13.2

Gesucht: Δs

$$v_0 = 2 \text{ ms}^{-1}; \quad v_1 = 10 \text{ ms}^{-1}; \quad v_2 = 0 \text{ ms}^{-1}$$

$$t_0 = 0 \text{ s}; \quad t_1 = 15 \text{ s}; \quad t_2 = 25 \text{ s}; \quad t_3 = 30 \text{ s}$$

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3$$

$$\Delta s_1 = v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2$$

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t_1} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{15 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 0,533 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Delta s_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 0,533 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (15 \text{ s})^2$$

$$\underline{\Delta s_1 = 90 \text{ m}}$$

$$\Delta s_2 = v_1 \cdot \Delta t_2 = v_1 \cdot (t_2 - t_1) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} (25 \text{ s} - 15 \text{ s})$$

$$\underline{\Delta s_2 = 100 \text{ m}}$$

$$\Delta s_3 = v_1 \cdot \Delta t_3 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot (\Delta t_3)^2$$

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t_3} = \frac{v_2 - v_1}{t_3 - t_2} = \frac{0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{30 \text{ s} - 25 \text{ s}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Delta s_3 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (30 \text{ s} - 25 \text{ s}) + \frac{1}{2} \cdot \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (30 \text{ s} - 25 \text{ s})^2$$

$$\underline{\Delta s_3 = 25 \text{ m}}$$

$$\Delta s = 90 \text{ m} + 100 \text{ m} + 25 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{\Delta s = 215 \text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 13.3Gesucht: \bar{v} bei $t = 30 \text{ s}$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{t} = \frac{215 \text{ m}}{30 \text{ s}}$$

$$\bar{v} = 7,17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Lehrbeispiel 13.4Gesucht: v_t bei $t_x = 28 \text{ s}$

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_t - v_1}{t_x - t_2}$$

$$v_t - v_1 = a_2 \cdot (t_x - t_2)$$

$$v_t = a_2 \cdot (t_2 - t_x) + v_1$$

$$v_t = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (28 \text{ s} - 25 \text{ s}) + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_t = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.4.2 Bewegungen unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung**Freier Fall**

Ein Körper fällt, ohne äußere Krafteinwirkung, aus einer Höhe h in Richtung Erdboden. Die Ursache für den beschriebenen **freien Fall** ist die Massenanziehungskraft der Erde. Durch Versuche, die im 17. Jahrhundert der Physiker Galilei durchführte, wurde festgestellt, dass die Fallbeschleunigung eines Körpers im Vakuum nicht abhängig von seinem Gewicht und von seinem Volumen ist.

Alle Körper erfahren beim freien Fall im Vakuum eine gleichmäßige Beschleunigung. Beim freien Fall eines Körpers in Luft wirkt sich der Strömungswiderstand störend aus. Dieser kann aber in vielen Fällen des freien Falls vernachlässigt werden.

Der genaue Wert der Erdbeschleunigung hängt von der geografischen Lage des Versuchsortes ab. Am Äquator zum Beispiel beträgt die Erdbeschleunigung $g_{\text{Äqu}} = 9,78 \text{ m/s}^2$ und an den Polen $g_{\text{Pole}} = 9,83 \text{ m/s}^2$. Die Gesetze des freien Falls sind gleich den Gesetzen der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit. Es muss nur die Beschleunigung a durch die Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) ersetzt werden. Die Wegstrecke Δs ist die Höhe h , aus der ein Körper den freien Fall beginnt.

Physikalische Gesetze des freien Falls

$$v = g \cdot t$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

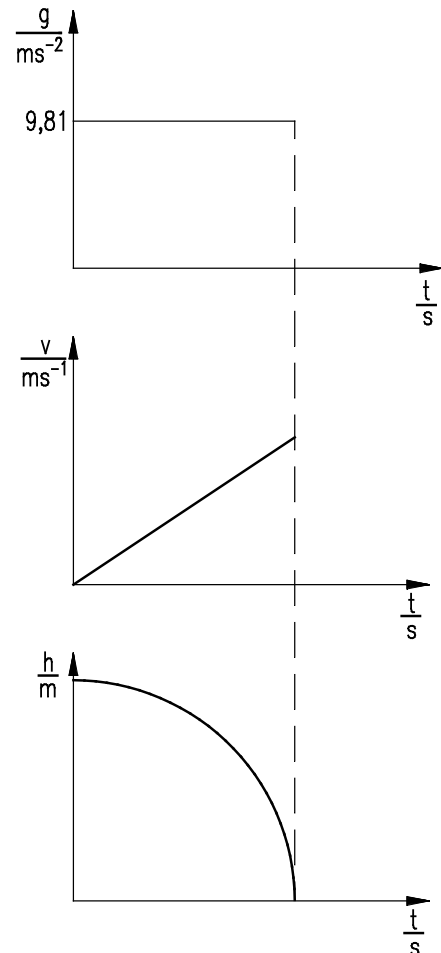
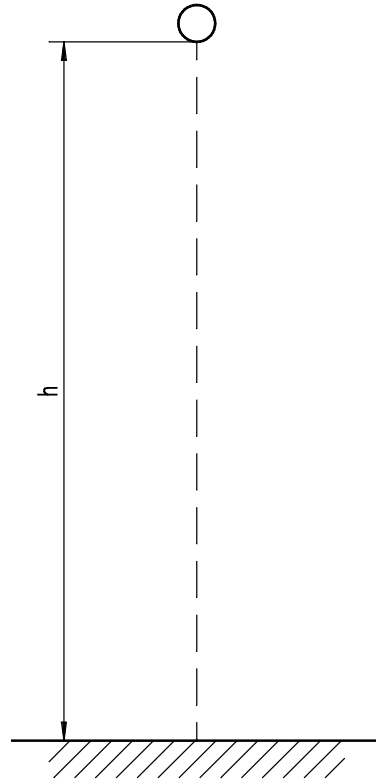


Abbildung 57 Der freie Fall

Lehrbeispiel 1

Die Fallzeit eines Körpers im freien Fall beträgt 4 s.

Aus welcher Höhe fällt der Körper zur Erde?

Lösung

Gegeben: $t = 4 \text{ s}$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gesucht: h

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (4 \text{ s})^2 = \underline{\underline{78,5 \text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 2

Aus welcher Höhe muss ein Körper mit einer Masse von $m = 500 \text{ kg}$ auf die Erde fallen, um eine Aufprallgeschwindigkeit von $v = 50 \text{ km/h}$ zu erreichen?

Lösung

Gegeben: $m = 500 \text{ kg}$

$$v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gesucht: h

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{9,83 \text{ m}}}$$

Senkrechter Wurf nach oben

Ein Körper wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht in die Luft geworfen. Nach dem Abwurf wird die Bewegung des Körpers verzögert. Diese negative Beschleunigung tritt aufgrund der Erdanziehungskraft auf. Die Geschwindigkeit des Körpers wird bei der Aufwärtsbewegung verlangsamt, bis sie gleich Null ist. Ist die Geschwindigkeit gleich Null, dann hat der Körper den höchsten Punkt h_{max} seiner Flugbahn erreicht. Vom höchsten Punkt fällt er dann im freien Fall zur Erde. Die Beschleunigung, die der Körper bis zum Aufprall gleichmäßig erfährt, ist die Erdbeschleunigung g . Der Körper hat im Augenblick des Auftreffens auf dem Boden seine höchste Fallgeschwindigkeit (v_{Fmax}) erreicht.

Während des Anstiegs eines Körpers, der senkrecht hoch geworfen wurde, verhält sich dieser nach den Gesetzen der gleichmäßig verzögerten Bewegung mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Beschleunigung von $a = -g$. Während der Abwärtsbewegung verhält sich der Körper nach den Gesetzen des freien Falls.

Physikalische Gesetze des senkrechten Wurfs nach oben:**Aufwärtsbewegung**

$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = +\sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot (h - h_0)}$$

Abwärtsbewegung

$$v = g \cdot t$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h_0$$

$$v = -\sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot (h - h_0)}$$

Ein senkrecht nach oben geworfener Körper steigt so lange, bis seine Geschwindigkeit Null ist. Der Körper hat seine Maximalhöhe h_{\max} erreicht. Der Zeitabschnitt vom Abwurf bis zum Erreichen der Maximalhöhe ist die Steigzeit t_s .

$$v = v_0 - g \cdot t \quad \text{mit } v = 0$$

$$0 = v_0 - g \cdot t$$

$$\underline{\underline{t_s = \frac{v_0}{g}}}$$

$$h_{\max} = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$h_{\max} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g}$$

$$\underline{\underline{h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}}}$$

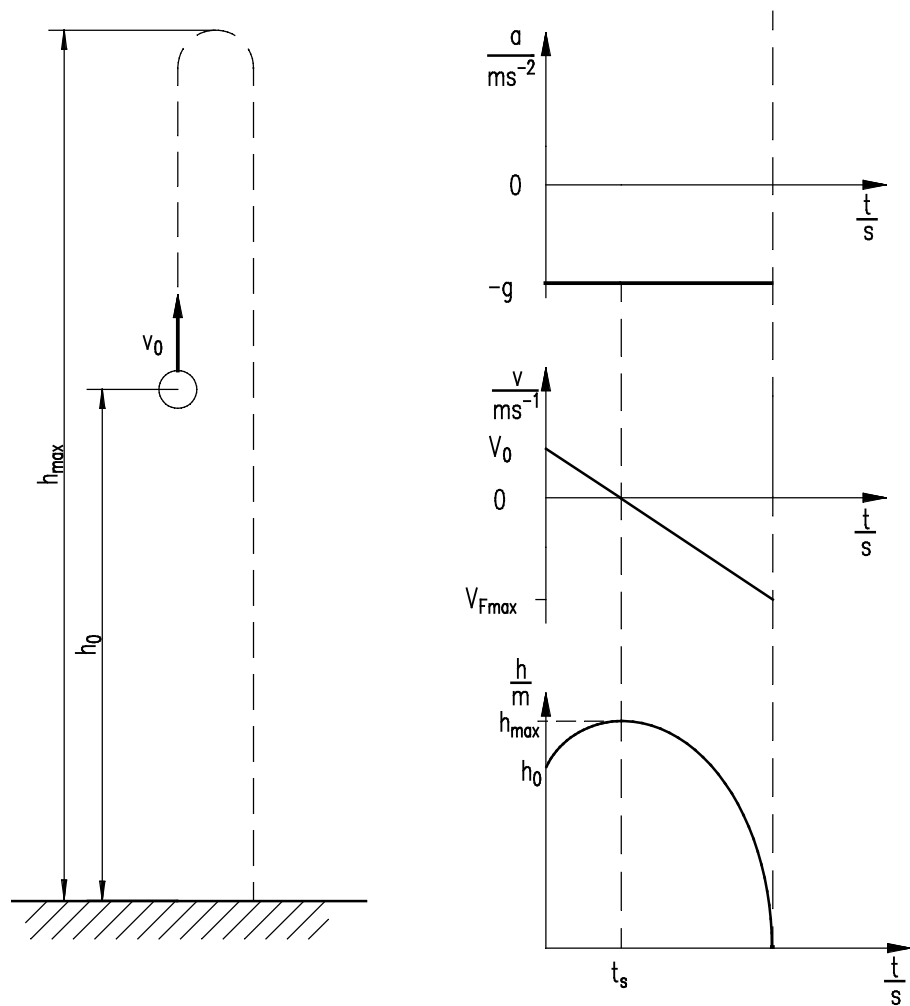


Abbildung 58 Senkrechter Wurf nach oben

Lehrbeispiel 3

Eine Stahlkugel mit einer Masse $m = 1 \text{ kg}$ wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 20 \text{ m/s}$ senkrecht in die Höhe geworfen. Der Vorgang soll als reibungslos betrachtet werden.

3.1 Wie hoch ist die maximale Steighöhe und die Steigzeit?

3.2 Mit welcher Geschwindigkeit trifft die Kugel auf dem Boden auf, wenn sie in $1,6 \text{ m}$ Höhe abgeworfen wurde?

3.3 Wie lang ist die gesamte Flugzeit?

Lösung

Gegeben: $v_0 = 20 \text{ m/s}$
 $h_0 = 1,6 \text{ m}$
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Lehrbeispiel 3.1

Gesucht: h_{\max}

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 20,4 \text{ m}$$

$$t_s = \frac{v_0}{g} = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{2,04 \text{ s}}}$$

Lehrbeispiel 3.2

Gesucht: v_F

$$v_F = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_g}$$

$$h_g = h_{\max} + h_0$$

$$v_{F \max} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_{\max} + h_0)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (20,4 \text{ m} + 1,6 \text{ m})} = \underline{\underline{20,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Lehrbeispiel 3.3

Gesucht: t_g

$$t_g = t_s + t_F$$

$$v_{F \max} = g \cdot t_F$$

$$t_F = \frac{v_{F \max}}{g} = \frac{20,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2,12 \text{ s}$$

$$t_g = 2,04 \text{ s} + 2,12 \text{ s} = \underline{\underline{4,16 \text{ s}}}$$

Lehrbeispiel 4

Eine Stahlkugel fällt aus einer Höhe von 1,5 m auf eine Stahlplatte. Bei jedem Aufprall verringert sich die Geschwindigkeit auf das 0,55-fache.

4.1 Welche Höhe erreicht die Kugel nach dem ersten Aufschlag?

4.2 Welche Höhe erreicht die Kugel nach dem zweiten Aufschlag?

4.3 Welche Zeit verstreicht vom Anfang der Bewegung bis zum zweiten Aufschlag?

Lösung

Gegeben: $h_0 = 1,5 \text{ m}$

$$v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 0,55 \cdot v_1$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Lehrbeispiel 4.1

Gesucht: $h_{\max 1}$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,5 \text{ m}}$$

$$v_1 = 5,42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 0,55 \cdot v_1 = 0,55 \cdot 5,42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 2,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$h_{\max 1} = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(2,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{0,453 \text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 4.2

Die Geschwindigkeit beim 2. Aufprall ist v_2 .

Gesucht: $h_{\max 2}$

$$v_3 = 0,55 \cdot v_2 = 0,55 \cdot 2,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_3 = 1,64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$h_{\max 2} = \frac{v_3^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(1,64 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{0,137 \text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 4.3

Gesucht: t_g

$$t_{g2} = t_{F0} + t_{S1} + t_{F1}$$

$$h_F = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$t_F = \sqrt{\frac{2 \cdot h_F}{g}}$$

$$t_{F0} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0,553 \text{ s}$$

$$t_{F1} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_{\max 1}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,453 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0,304 \text{ s}$$

$$t_s = \frac{v_2}{g} = \frac{2,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,304 \text{ s}$$

$$t_g = 0,553 \text{ s} + 0,304 \text{ s} + 0,304 \text{ s} = \underline{\underline{1,161 \text{ s}}}$$

Senkrechter Wurf nach unten

Wird ein Körper senkrecht nach unten geworfen, ist sein Flug wie im freien Fall zu betrachten, nur zusätzlich mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Es haben somit alle Gesetze einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit einer Anfangsgeschwindigkeit ihre Gültigkeit.

Physikalische Gesetze des senkrechten Wurfs nach unten

$$v = v_0 + g \cdot t$$

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}$$

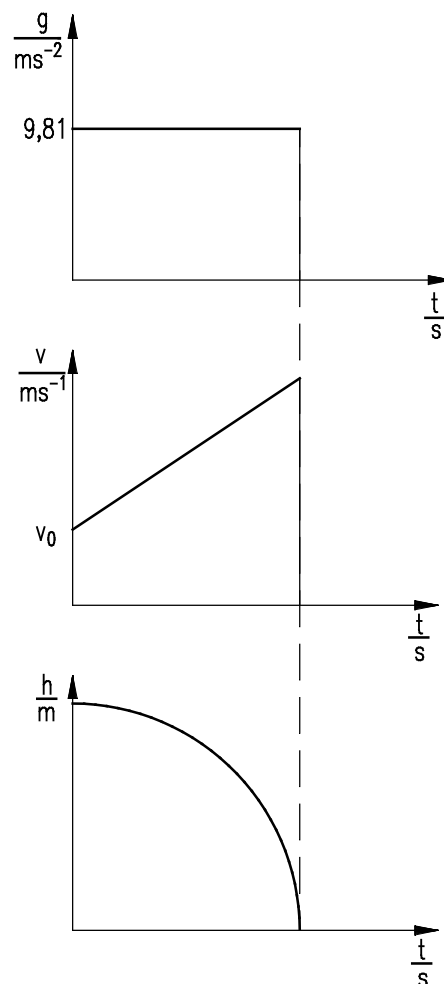
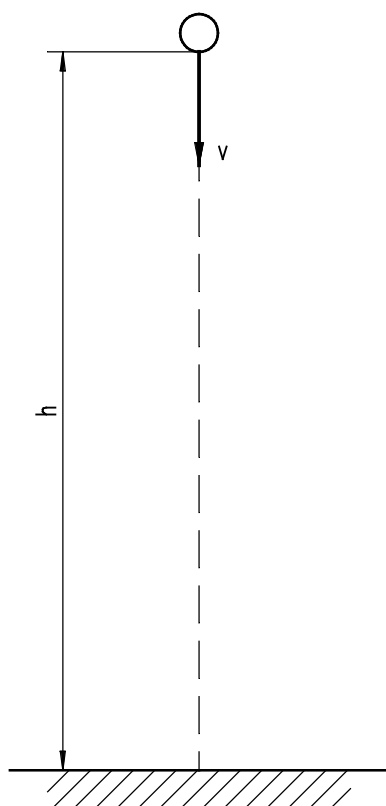


Abbildung 59 Senkrechter Wurf nach unten

Lehrbeispiel 5

Ein Körper wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5 \text{ m/s}$ senkrecht in einen Schacht hinuntergeworfen. Nach $t = 4 \text{ s}$ wird der Aufprall festgestellt. Der Luftwiderstand ist zu vernachlässigen.

Berechnen Sie die Aufprallgeschwindigkeit und die zurückgelegte Wegstrecke!

Lösung

Gegeben: $v_0 = 5 \text{ m/s}$
 $t = 4 \text{ s}$
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Gesucht: v ; h

$$v = v_0 + g \cdot t = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ s} = \underline{\underline{44,2 \text{ m/s}}}$$

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$h = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (4 \text{ s})^2 = \underline{\underline{98,5 \text{ m}}}$$

Waagerechter Wurf

Ein Körper bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 entlang einer horizontalen Unterlage in x-Richtung. Sobald der Körper die Unterlage verlässt, fällt er in y-Richtung zu Boden. Der Körper unterliegt dann den Gesetzen des freien Falls. Der gleichförmigen Bewegung in x-Richtung überlagert sich eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung in y-Richtung. Zur rechnerischen Behandlung dieses Problems werden die bis jetzt erarbeiteten Erkenntnisse angewendet.

Nach Verlassen der Unterlage bewegt sich der Körper gleichmäßig in x-Richtung weiter, bis er aufprallt ($v_x = \text{konstant}$). Die Geschwindigkeit in dieser Richtung ändert sich bei Vernachlässigung des Strömungswiderstandes nicht. Der Wegabschnitt des bewegten Körpers in x-Richtung errechnet sich aus:

$$s = v_x \cdot \Delta t$$

Im gleichen Zeitabschnitt, in dem sich der Körper in x-Richtung bewegt, fällt er im freien Fall in y-Richtung zu Boden. Die Fallgeschwindigkeit errechnet sich aus:

$$v_y = g \cdot \Delta t$$

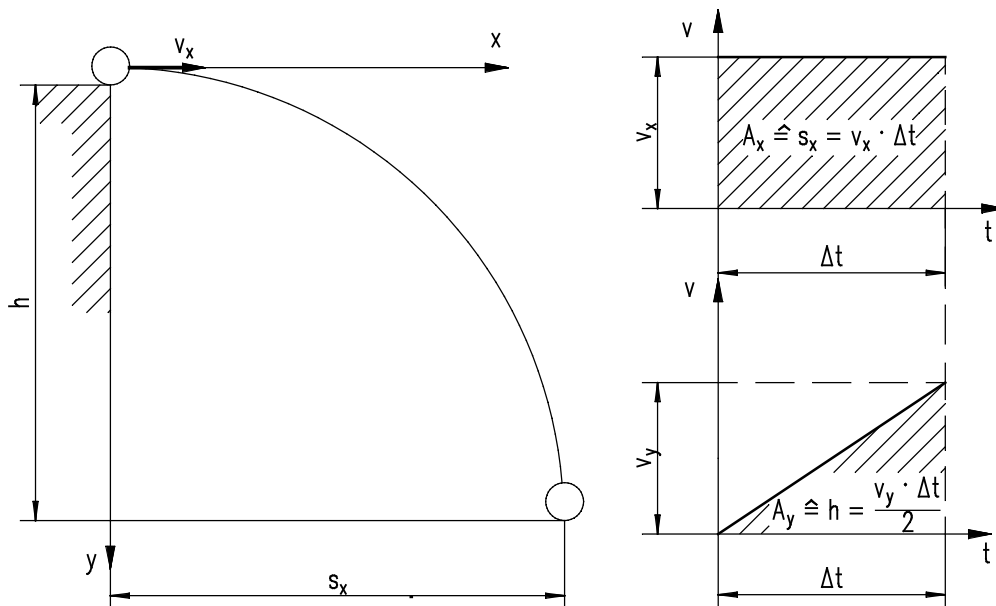


Abbildung 60 Waagerechter Wurf

Physikalische Gesetze des waagerechten Wurfs

Horizontale Bewegung

$$s = v_x \cdot \Delta t$$

Vertikale Bewegung

$$h = \frac{g \cdot (\Delta t)^2}{2}$$

Wird die vertikale Bedingung nach Δt umgestellt und in die horizontale eingesetzt, so erhält man die folgende Beziehung:

$$s = v_x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

oder

$$h = \frac{g}{2 \cdot v_x^2} \cdot s_x^2$$

Die Fallbeschleunigung g und die Geschwindigkeit in x -Richtung v_x sind konstante Größen. Der Quotient aus den beiden Größen ist die Konstante k .

$$k = \frac{g}{2 \cdot v_x^2}$$

Wird die Konstante in die Gleichung oben eingesetzt, so erhält man die Gleichung der Wurfbahn. An der Art der Gleichung ist zu erkennen, dass es sich hierbei um eine Wurfparabel handelt.

$$h = k \cdot s^2$$

Lehrbeispiel 6

Ein Körper mit der Masse von $m = 1 \text{ kg}$ wird in waagerechter Richtung mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5 \text{ m/s}$ geworfen. Die Abwurfhöhe ist in 10 m .

Wie weit fliegt der Körper und wie lange dauert der Flug?

Lösung

Gegeben: $v_x = 5 \text{ m/s}$
 $m = 1 \text{ kg}$
 $h = 10 \text{ m}$
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Gesucht: s ; Δt

$$s = v_x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \underline{\underline{7,14 \text{ m}}}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \underline{\underline{1,43 \text{ s}}}$$

Schräger Wurf

Ein Körper wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einen Steigungswinkel α nach oben abgeworfen. Um hier Gesetzmäßigkeiten aufstellen zu können, muss die Anfangsgeschwindigkeit in ihre x- und y-Komponenten zerlegt werden.

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

Auch hier betrachten wir wieder den idealen Fall ohne Luftwiderstand. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit in x-Richtung konstant bleibt. Die Geschwindigkeit in y-Richtung verhält sich wie beim senkrechten Wurf nach oben. Der Körper bewegt sich nach oben, bis die Geschwindigkeit Null und die Maximalhöhe des Wurfes erreicht ist. Dann fällt er in Richtung Boden. Die negative und positive Beschleunigung hat jeweils den gleichen Betrag ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

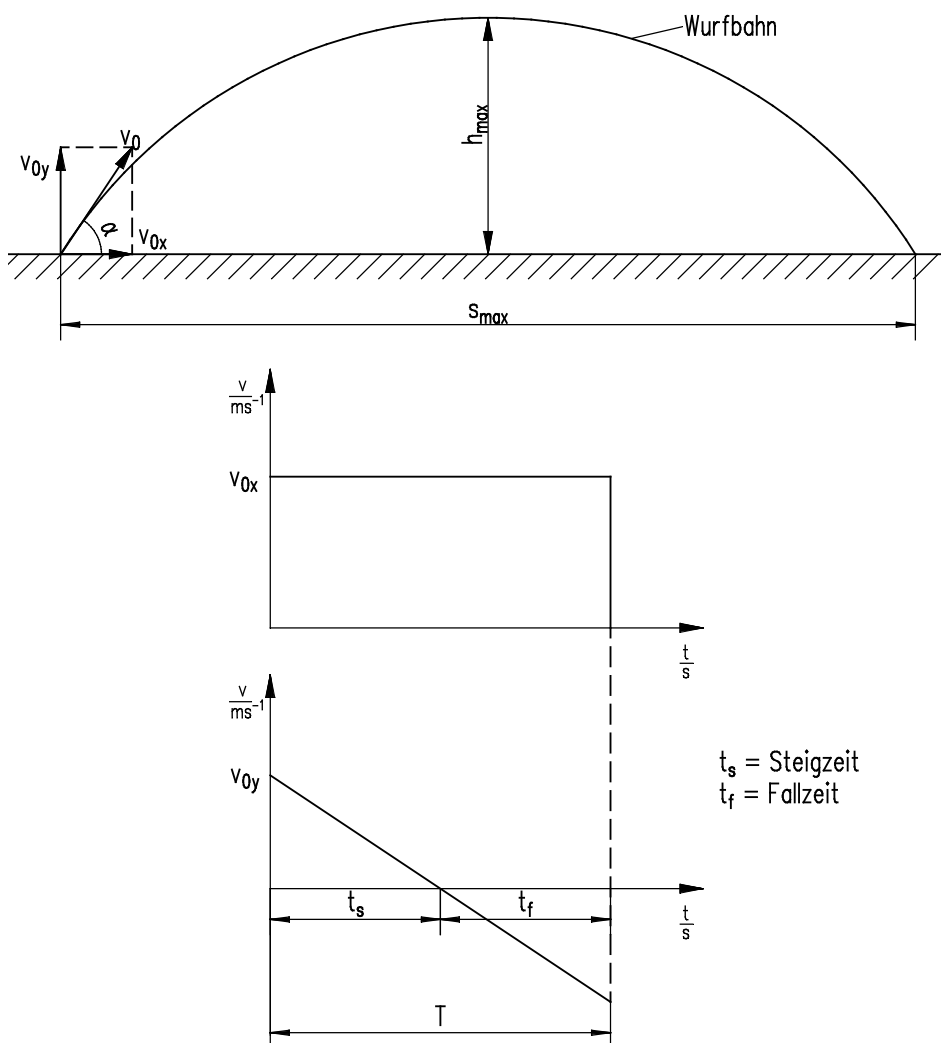


Abbildung 61 Schräger Wurf

Physikalische Gesetze des schrägen Wurfs

Wurfweite: $s = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot T$

Grundgleichung: $g = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$

Wurfhöhe: $h = \frac{1}{2} \cdot \Delta v_y \cdot t_s$
 $h = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_s - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_s)^2$

Steigzeit: $t_s = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$

Scheitelhöhe: $h_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}$

Wurfzeit: $T = 2 \cdot t_s = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$

$(t_s = t_f)$

Lehrbeispiel 7

Ein Körper wird unter einem Winkel $\alpha = 25^\circ$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 10 \text{ m/s}$ schräg nach oben geworfen.

Wie weit und wie hoch fliegt der Körper im idealen Fall (ohne Luftwiderstand), wenn die Aufprallhöhe gleich der Abwurfhöhe ist?

Lösung

Gegeben: $v_0 = 10 \text{ m/s}$
 $\alpha = 25^\circ$

Gesucht: s ; h_{\max}

$$s = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$s = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$s = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 25^\circ \cdot \frac{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 25^\circ}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{7,81 \text{ m}}}$$

$$h_{\max} = \frac{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 25^\circ\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{0,91 \text{ m}}}$$

2.5 Kräfte und Bewegung

Der italienische Physiker Galileo Galilei leitete im 17. Jahrhundert, nach den Gesetzen des freien Falls und der Bewegung der Körper auf der schiefen Ebene, das Trägheitsgesetz ab. Er fand heraus, dass ein Körper, der eine schiefe Ebene (AO) reibungsfrei aus der Höhe h hinunter rutscht, im Punkt O eine bestimmte Geschwindigkeit hat ($v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$). Wird der Körper auf verschiedenen gradlinig ansteigenden Bahnen geleitet (OB, OC), so steigt der Körper diese Bahnen auf, bis seine Geschwindigkeit Null ist. Die Höhe, die der Körper erklommen hat, ist wiederum die Anfangshöhe h . Ist die Bahn nicht ansteigend, sondern waagrecht, so bewegt sich der Körper mit der Geschwindigkeit, die er im Punkt O erreicht hat, entlang der Bahn konstant fort.

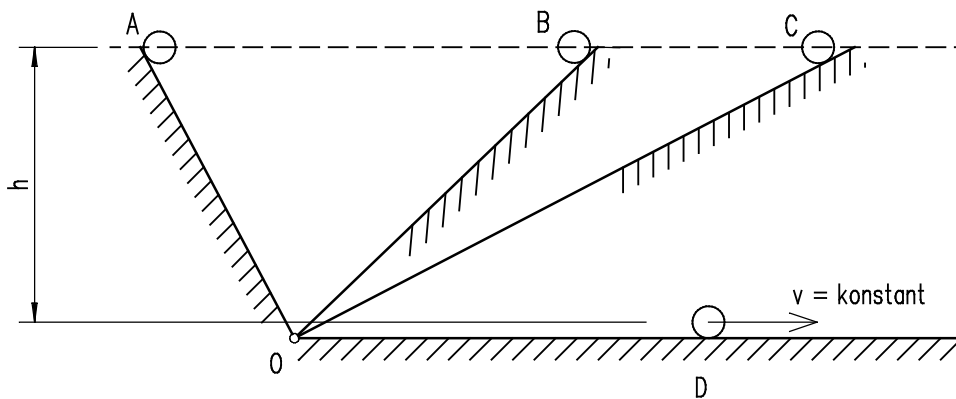


Abbildung 62 Trägheitsgesetz

Im Jahr 1687 veröffentlichte der englische Physiker Isaac Newton die so genannten **Newtonschen Axiome**. In diesen Axiomen formulierte er auch das von Galileo Galilei entwickelte Trägheitsgesetz. Die Newtonschen Axiome beschreiben exakt die makroskopische Welt der klassischen Physik. Die Axiome verlieren aber ihre Richtigkeit in der Mikrophysik (Relativitätstheorie).

Das erste Gesetz definiert das Bezugssystem, in dem die Axiome ihre Gültigkeit haben. Die physikalischen Gesetze der Mechanik sind am einfachsten zu bestimmen, wenn beim betrachteten Bezugssystem die Geschwindigkeit eines Körpers ohne Beeinflussung äußerer Kräfte konstant bleibt. Ein solches Bezugssystem wird **Inertialsystem** genannt. Ein Inertialsystem wird zum Beispiel beschrieben durch ein im Fixsternhimmel verankertes rechtwinkliges kartesisches x -, y -, z -Koordinatensystem. Näherungsweise ist auch ein mit der Erde verbundenes Bezugssystem ein Inertialsystem (z.B. ein Raum, bei dem eine Ecke als Nullpunkt definiert ist. Die Kanten des Raumes, vom Nullpunkt gesehen, sind die x -, y -, z -Koordinaten.).

Erstes Newtonsches Axiom (Trägheitsgesetz):

Jeder Körper bleibt solange in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, wie er nicht durch eine äußere Kraft gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

Der Satz gilt auch, wenn zwar äußere Kräfte auf den Körper wirken, aber ihre Resultierende Null ist. Der Satz gilt insbesondere, wenn sich der Körper im Weltall befindet, und die äußeren Krafteinflüsse zu vernachlässigen sind. Auf der Erde finden wir keine Möglichkeit einen gleichmäßig bewegten Körper zu betrachten, auf den keine äußeren Kräfte wirken. Die Bewegung des Körpers wird durch Reibungskräfte (Luft, Wasser, Unterlage) beeinflusst und zwingt ihn früher oder später zur Ruhe.

Beispiel:

Ein Fahrgast steht in Ruhe in einer Bahn in Fahrtrichtung. Das physikalische Verhalten des Körpers soll während der Beschleunigung und der Verzögerung der Bahn beobachtet werden.

Beschleunigt die Bahn mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0 \text{ km/h}$, so kippt der Oberkörper des Fahrgastes entgegen der Beschleunigungsrichtung. Der Kippvorgang basiert auf der Trägheit der Masse des Fahrgastes. Im Moment der Beschleunigung versucht der Körper an seinem Ursprungspunkt zu verweilen. Verursacht durch die Haftreibung bleiben die Füße mit dem Wagen fest verbunden und bewegen sich in Fahrtrichtung. Der Oberkörper, der keinen Halt zum Wagen hat, bewegt sich seiner Ursache entgegen zum Startpunkt. Hält sich der Gast nicht fest, dann fällt er bei stärkerer Beschleunigung um.

Ähnlich verhält sich der Körper des Fahrgastes auch beim Bremsvorgang. Der Wagen und der Körper des Gastes bewegen sich mit einer Geschwindigkeit v_a in Fahrtrichtung. Wird der Wagen abgebremst, so ist das Bestreben des Körpers sich mit der Anfangsgeschwindigkeit weiterzubewegen. Da die Füße des Fahrgastes durch die Haftreibung mit dem Wagen fest verbunden sind, werden diese abgebremst. Der Oberkörper, der keine feste Verbindung hat, kippt in Fahrtrichtung.

Nach dem Trägheitsgesetz wird ein Körper beschleunigt, verzögert oder zu einer Richtungsänderung gezwungen, wenn eine resultierende Kraft auf ihn wirkt. Newton entdeckte weiter bei seinen Forschungen, dass der Betrag der resultierenden Kraft von der Masse des Körpers und der Beschleunigung abhängig ist. Hieraus entwickelte er das Gesetz der Dynamik.

Zweites Newtonsches Axiom (dynamische Grundregel):

Die auf einen Körper mit der Masse m einwirkende konstante resultierende Kraft F_R ist gleich dem Produkt der Masse m und der Beschleunigung a des Körpers.

$$F = m \cdot a$$

$$[F] = [m] \cdot [a] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$

Es ist zu sehen, dass das Trägheitsgesetz in der dynamischen Grundregel enthalten ist. Die resultierende Kraft F_R ist Null, wenn auch die Beschleunigung Null ist. Beim freien Fall eines Körpers erfährt dieser eine Beschleunigung von $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$, die zum Erdmittelpunkt gerichtet ist. Diese Beschleunigung ist die Erdbeschleunigung. Die Kraft des freien Falls ohne Berücksichtigung der Reibung ist gleich der Gewichtskraft F_G , da sie ebenfalls durch die Masse m und die Erdbeschleunigung g bestimmt wird.

$$F_G = m \cdot g$$

Ferner fand Newton heraus, dass es keine einzelne isolierte Kraft gibt. Es wirkt immer ein Körper oder ein System von Kräften auf einen zweiten Körper oder ein zweites Kräftesystem. Diesen Zusammenhang fasste er in seinem dritten Axiom zusammen.

Drittes Newtonsches Axiom (actio = reactio)

Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, haben den gleichen Betrag, aber einen entgegengesetzten Richtungssinn.

$$F_{12} = -F_{21} \quad \text{oder} \quad F_A = -F_B$$

Beispiel:

Eine Leiter steht gegen einen Baum gelehnt. Die Leiter drückt gegen den Baum mit der Kraft F_{12} . Die Leiter fällt aber nicht um, da eine Gegenkraft $-F_{21}$ des Baumes mit gleichem Betrag, aber entgegengesetzter Richtung auf die Leiter wirkt (**actio = reactio**).

Lehrbeispiel 1

Auf einen ruhenden Körper mit der Masse $m = 10 \text{ kg}$ wirkt in der Zeit $t = 10 \text{ s}$ eine Kraft von $F = 10 \text{ N}$.

- 1.1 Welche Beschleunigung erfährt der Körper und mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich nach der angegebenen Zeit?
- 1.2 Berechnen Sie die Wegstrecke, die der Körper nach $t = 10 \text{ s}$ zurückgelegt hat!
- 1.3 Wie bewegt sich der Körper nach der Zeit t weiter, wenn keine Kraft mehr auf ihn wirkt und die Reibung zu vernachlässigen ist?

Lösung

Gegeben: $m = 10 \text{ kg}$
 $t = 10 \text{ s}$
 $F = 10 \text{ N}$

Lehrbeispiel 1.1

Gesucht: a, v

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = \frac{10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}{10 \text{ kg}} = \underline{\underline{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

$$v = a \cdot t = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s} = \underline{\underline{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Lehrbeispiel 1.2

Gesucht: s

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10 \text{ s})^2 = \underline{\underline{50 \text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 1.3

Gesucht: v

Der Körper bewegt sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit von $v = 10 \text{ m/s}$ weiter.

Lehrbeispiel 2

An einem Haken hängt ein Körper mit einer Masse $m = 1000 \text{ kg}$. Der Körper soll mit einer Beschleunigung $a = 0,3 \text{ m/s}^2$ von Punkt A aus nach oben gezogen werden.

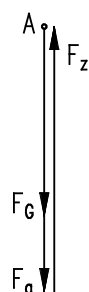
Welche Zugkraft hat das Seil aufzunehmen?

Lösung

Gegeben: $m = 1000 \text{ kg}$

$$a = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gesucht: F_Z



$$F_Z = F_G + F_a$$

$$F_G = m \cdot g$$

$$F_a = m \cdot a$$

$$\Rightarrow F_Z = m \cdot g + m \cdot a = m \cdot (g + a)$$

$$F_Z = 1000 \text{ kg} \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$F_Z = 10110 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F_Z = 10,11 \text{ kN}}}$$

Nach den Newtonschen Axiomen wirkt die Zugkraft zum einen entgegen der Gewichtskraft des Körpers und zum anderen muss sie die Trägheit der Masse des Körpers überwinden, um ihn zu beschleunigen. Der Betrag der Zugkraft ist gleich der Summe der Einzelkräfte.

Lehrbeispiel 3

An einem Haken hängt ein Körper mit einer Masse $m = 1000 \text{ kg}$. Der Körper soll mit einer Beschleunigung $a = 0,3 \text{ m/s}^2$ von Punkt A aus nach unten abgelassen werden.

Mit welcher Zugkraft muss das Seil gegenwirken, damit der Körper nicht schneller beschleunigt wird?

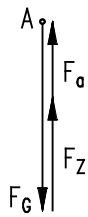
Lösung

Gegeben: $m = 1000 \text{ kg}$

$$a = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gesucht: F_Z



$$F_Z = F_G - F_a$$

$$F_Z = m \cdot g - m \cdot a = m \cdot (g - a)$$

$$F_Z = 1000 \text{ kg} \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$F_Z = 9510 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F_Z = 9,51 \text{ kN}}}$$

Lehrbeispiel 4

Ein PKW mit einer Masse von $m = 800 \text{ kg}$ soll aus einer Geschwindigkeit von $v_0 = 50 \text{ km/h}$ auf einer Bremsstrecke von $s = 20 \text{ m}$ zum Stehen gebracht werden.

Bestimmen Sie die erforderliche Bremskraft und die Bremszeit!

Lösung

Gegeben: $m = 800 \text{ kg}$

$$v_0 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\Delta s = 20 \text{ m}$$

$$v_1 = 0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Gesucht: F_B ; t_B

$$F = m \cdot a$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s}$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta s} = a$$

mit $v_1 = 0$

$$\Rightarrow a = -\frac{v_0^2}{2 \cdot \Delta s} = -\frac{\left(50 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{2 \cdot 20 \text{ m}} \cdot \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right)^2$$

$$a = -4,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Für den **Betrag** der Bremskraft wird mit einem positiven a weitergerechnet.

$$F_B = m \cdot a = 800 \text{ kg} \cdot 4,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_B = 3858 \text{ N} = \underline{\underline{3,858 \text{ kN}}}$$

$$\Delta t = t_B = \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{-v_0}{a} = \frac{-50 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{-4,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = \underline{\underline{2,88 \text{ s}}}$$

Lehrbeispiel 5

Welche Zugkraft braucht die Lokomotive einer Eisenbahn, wenn ein Güterzug mit einer Gesamtmasse von $m = 250 \cdot 10^3 \text{ kg}$ auf einer waagerechten Wegstrecke aus dem Stand in der Zeit von $t = 60 \text{ s}$ auf $v_1 = 60 \text{ km/h}$ gleichmäßig beschleunigt werden soll?

Der gesamte Fahrwiderstand beträgt $\mu = 0,02$.

Lösung

Gegeben: $m = 250 \cdot 10^3 \text{ kg}$

$t = 60 \text{ s}$

$v_0 = 0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$\mu = 0,02$

$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Gesucht: F_Z

$$F_Z = F_a + F_R$$

$$F_a = m \cdot a$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{v_1}{t}$$

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

$$F_N = F_G = m \cdot g$$

$$\Rightarrow F_Z = m \cdot \frac{v_1}{t} + \mu \cdot m \cdot g$$

$$F_Z = m \cdot \left(\frac{v_1}{t} + \mu \cdot g \right)$$

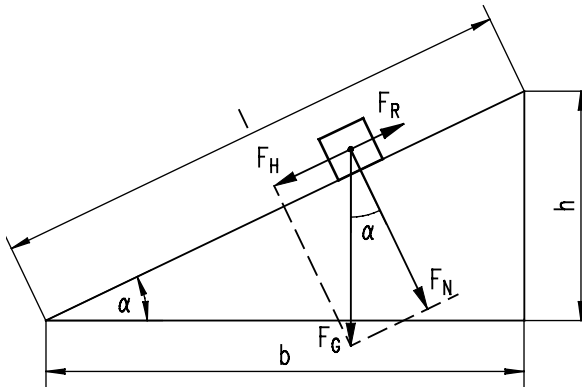
$$F_Z = 250 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \left(\frac{60 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} + 0,02 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$F_Z = 118,5 \cdot 10^3 \text{ N} = \underline{\underline{118,5 \text{ kN}}}$$

Lehrbeispiel 6

Auf einer schiefen Ebene mit den Maßen von $h = 1 \text{ m}$ und $l = 5 \text{ m}$ liegt ein Körper mit einer Masse von 50 kg .

- 6.1 Welche Größe hat die Abtriebskraft bei einer Gleitreibungszahl von $\mu = 0,2$?
- 6.2 Wie groß ist die Beschleunigung, die auf den Körper wirkt?
- 6.3 Welche Wegstrecke ist der Körper nach $t = 2 \text{ s}$ gerutscht?
- 6.4 Bei welcher Gleitreibungszahl würde der Körper mit einer konstanten Geschwindigkeit rutschen?

Lösung

Gegeben: $h = 1 \text{ m}$
 $l = 5 \text{ m}$
 $m = 50 \text{ kg}$
 $\mu = 0,2$
 $t = 2 \text{ s}$

Lehrbeispiel 6.1

Gesucht: F_A

$$F_A = F_H - F_R$$

$$\frac{F_H}{F_G} = \frac{h}{l} \Rightarrow F_H = F_G \cdot \frac{h}{l} = m \cdot g \cdot \frac{h}{l}$$

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

$$\frac{F_N}{F_G} = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} \Rightarrow F_N = F_G \cdot \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$$

$$F_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$$

$$F_A = m \cdot g \cdot \frac{h}{l} - \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = m \cdot g \cdot \frac{1}{l} (h - \mu \sqrt{l^2 - h^2})$$

$$F_A = 50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{5 \text{ m}} \cdot (1 \text{ m} - 0,2 \cdot \sqrt{5^2 - 1^2} \text{ m}) = \underline{\underline{1,982 \text{ N}}}$$

Lehrbeispiel 6.2

Gesucht: a

$$F_A = m \cdot a$$

$$a = \frac{F_A}{m} = \frac{1,982 \text{ N}}{50 \text{ kg}} = \underline{\underline{0,0396 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Lehrbeispiel 6.3

Gesucht: s

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,0396 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2 = \underline{\underline{0,0792 \text{ m} = 7,92 \text{ cm}}}$$

Lehrbeispiel 6.4

Gesucht: μ

$$\begin{aligned} F_A = 0 & \Rightarrow F_H = F_R \Rightarrow m \cdot g \cdot \frac{h}{l} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} \\ \Rightarrow \mu &= \frac{m \cdot g \cdot h \cdot l}{l \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{l^2 - h^2}} = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}} = \frac{1 \text{ m}}{\sqrt{5^2 - 1^2} \text{ m}} = \underline{\underline{0,204}} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 7

Ein Fahrzeug mit einer Masse von 500 kg soll auf einer waagerechten Wegstrecke von einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30 \text{ km/h}$ auf $v_1 = 10 \text{ km/h}$ verlangsamt werden. Der Wagen wird nicht gebremst, sondern verlangsamt sich nur durch die Rollreibungszahl $\mu = 0,02$.

Berechnen Sie die Wegstrecke, die das Fahrzeug vom Anfangspunkt bis zum Erreichen der Endgeschwindigkeit durchläuft!

Lösung

Gegeben: $m = 500 \text{ kg}$
 $v_0 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}, v_1 = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 $\mu = 0,02$

Gesucht: Δs

$$\Delta s = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

$$F_R = m \cdot a = \mu \cdot F_N$$

$$F_N = F_G = m \cdot g$$

$$\Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g$$

$$\Rightarrow a = \mu \cdot g$$

$$\Delta t = \frac{v_1 - v_0}{\mu \cdot g}$$

$$\Delta s = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \frac{v_1 - v_0}{\mu \cdot g} = \frac{(30 + 10) \frac{\text{km}}{\text{h}}}{2} \cdot \frac{(30 - 10) \frac{\text{km}}{\text{h}}}{(0,02 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})} \cdot \left(\frac{1000 \text{ m} \cdot 1 \text{ h}}{1 \text{ km} \cdot 3600 \text{ s}} \right)^2 = \underline{\underline{157 \text{ m}}}$$

Zentripetalbeschleunigung und Zentripetalkraft

Das erste Newtonsche Axiom beschreibt die Trägheit eines Körpers. Dieses Trägheitsgesetz lässt sich auch bei einer Kreisbewegung anwenden. Bewegt sich ein Körper mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn, ohne dass eine äußere Kraft auf ihn wirkt, so ist die Umfangsgeschwindigkeit v_u konstant. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändert sich aber ständig.

Die konstante Beschleunigung eines Körpers während einer gleichförmigen Kreisbewegung heißt Zentripetalbeschleunigung. Sie berechnet sich aus:

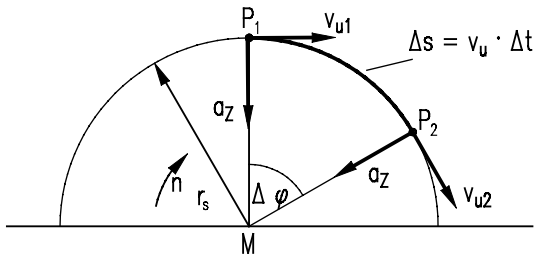


Abbildung 63 Gleichförmige Kreisbewegung

(zentrifugal: vom Mittelpunkt wegstrebend)
(zentripetal: zum Mittelpunkt hinstrebend)

$$a_z = \frac{v_u^2}{r_s} = r_s \cdot \omega^2$$

$$= r_s \cdot \frac{\varphi^2}{t^2} = \frac{s \cdot \varphi}{t^2}$$

Die Ursache einer jeden Beschleunigung ist nach dem zweiten Newtonschen Axiom die resultierende Kraft.

$$F = m \cdot a$$

Bei einem rotierenden System wird diese Kraft als Zentripetalkraft F_z bezeichnet. Die Kraft steht im Gleichgewicht mit der Trägheitskraft des rotierenden Körpers. Wird beim dynamischen Grundgesetz für die Beschleunigung die Zentripetalbeschleunigung eingesetzt, so ergibt sich hieraus:

$$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \frac{v_u^2}{r_s} = m \cdot r_s \cdot \omega^2$$

$$[F_z] = [m] \cdot [a_z] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$

Die Zentripetalkraft spielt bei der Projektierung von Maschinen und bei der Berechnung von Kurven in der Verkehrsplanung eine wichtige Rolle. So werden z.B. bei Zentrifugen Stoffe oder Körper mit unterschiedlich schweren Bestandteilen voneinander getrennt (bei der Wäscheschleuder wird mittels der Zentrifugalkraft das Wasser von der Wäsche getrennt). Bei der Planung von Straßen und Eisenbahnstrecken muss bei den Kurven die Einwirkung der Zentripetalkraft bzw. der entgegengesetzt gerichteten, gleich großen Fliehkraft F_F (Zentrifugalkraft) berücksichtigt werden. Die Fahrbahn oder Fahrstrecke wird schräg zum Kurvenmittelpunkt gerichtet gebaut.

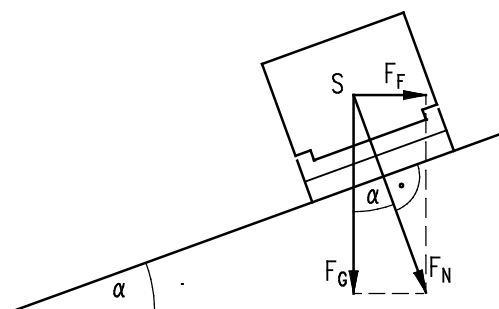


Abbildung 64 Fliehkraft in einer schrägen Kurve

Der Winkel ist so zu wählen, dass bei maximaler Geschwindigkeit die Fliehkraft und die Gewichtskraft des Fahrzeuges die resultierende Kraft F_N ergeben.

$$\tan \alpha = \frac{F_F}{F_G} = \frac{m \cdot \frac{v_u^2}{r_s}}{m \cdot g}$$

$$\text{mit } v_u = v : \quad \tan \alpha = \frac{v^2}{g \cdot r_s}$$

Lehrbeispiel 8

Welche Kraft muss eine Person aufbringen, damit eine Kugel, die am Ende eines 1 m langen Fadens befestigt ist, mit der Drehzahl von 100 min^{-1} in einer horizontalen Kreisbahn schwingt?

Die Gewichtskraft der Kugel mit Faden beträgt 10 N.

Lösung

Gegeben: $r_s = 1 \text{ m}$

$$n = 100 \frac{1}{\text{min}}$$

$$F_G = 10 \text{ N}$$

Gesucht: F_Z

$$F_Z = m \cdot r_s \cdot \omega^2$$

$$F_G = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{F_G}{g}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \text{ mit } f = n$$

$$F_Z = \frac{F_G}{g} \cdot r_s (2 \cdot \pi \cdot n)^2$$

$$F_Z = \frac{10 \text{ N}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot 1 \text{ m} \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot 100 \frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)^2 = \underline{\underline{112 \text{ N}}}$$

Lehrbeispiel 9

Eine Fahrbahn soll in einer Kurve mit einem Radius von 400 m bei einem PKW mit der Masse von 800 kg eine Geschwindigkeit von 150 km/h ermöglichen, ohne dass auf das Fahrwerk des Fahrzeugs seitliche Kräfte wirken.

9.1 Welche Größe hat die Zentripetalkraft?

9.2 Unter welchem Winkel muss die Straße gebaut werden, damit die Zentripetalkraft aufgebracht wird?

9.3 Mit welcher maximalen Geschwindigkeit darf das Fahrzeug bei horizontaler Fahrbahn fahren, damit es bei einer Haftreibung von $\mu_0 = 0,4$ nicht zu rutschen beginnt?

Lösung

Gegeben: $m = 800 \text{ kg}$

$$r_s = 400 \text{ m}$$

$$v = 150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Lehrbeispiel 9.1

Gesucht: F_Z

$$F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r_s} = 800 \text{ kg} \cdot \frac{\left(150 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right)^2}{400 \text{ m}} \cdot \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right)^2 = \underline{\underline{3472 \text{ N}}}$$

Lehrbeispiel 9.2Gesucht: α

$$\alpha = \arctan \frac{F_z}{F_G} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r_s}}{m \cdot g}$$

$$\alpha = \arctan \frac{v^2}{g \cdot r_s} = \arctan \frac{\left(150 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right)^2}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 400 \text{ m}} = \underline{\underline{23,9^\circ}}$$

Lehrbeispiel 9.3Gesucht: v_{\max} ; $\mu_0 = 0,4$

$$F_z = \mu_0 \cdot F_N$$

$$\frac{m \cdot v^2}{r_s} = \mu_0 \cdot m \cdot g$$

$$v^2 = \mu_0 \cdot g \cdot r_s$$

$$v = \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot r_s} = \sqrt{0,4 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 400 \text{ m}} = 39,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{143 \frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

Impuls

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom ändert sich der Bewegungszustand eines Körpers unter dem Einfluss einer Kraft. Wird in der Formel die Beschleunigung durch den Ausdruck der Geschwindigkeitsänderung pro Zeitabschnitt ersetzt, so erhält man:

$$F = m \cdot a$$

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Durch die Multiplikation der Formel mit Δt entsteht eine Gleichung aus dem Produkt von der äußeren Kraft und dem Zeitabschnitt, die gleich dem Produkt aus der Masse des Körpers und der Geschwindigkeitsänderung ist. Dieses Produkt Kraft mal Zeitabschnitt wird als **Kraftstoß** bezeichnet und das Produkt der Masse und der Geschwindigkeitsänderung als **Impuls**.

Die Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich dem Kraftstoß der äußeren Kraft während des betrachteten Zeitabschnitts. Der Impuls ist ein Vektor.

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot (v_2 - v_1)$$

Ist die resultierende Kraft aller äußeren Kräfte eines Systems gleich Null, dann ist auch der Kraftstoß gleich Null. In diesem Fall bleibt der Impuls eines Körpers konstant. Dieser physikalische Zusammenhang wird als **Impulserhaltungssatz** bezeichnet.

$$0 = m_1 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_1$$

$$m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v_2$$

2.6 Arbeit, Energie und Leistung

2.6.1 Mechanische Arbeit

Wird ein Körper durch die Einwirkung einer äußeren Kraft F um eine Wegstrecke Δs verschoben, so hat die Kraft eine Arbeit verrichtet (Abbildung 65a).

Definition:

Die mechanische Arbeit W einer konstanten Kraft F ist das Produkt aus der Kraft F und dem Verschiebeweg s . Die Arbeit wird in Newtonmeter (Nm) oder Joule (J) angegeben.

$$W = F \cdot s$$

$$[W] = [F] \cdot [s] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{Nm} = \text{J}$$

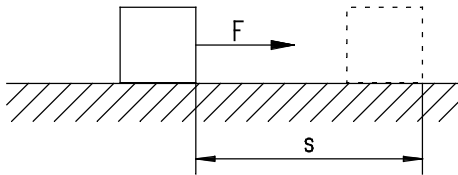
Die Einheit der Arbeit trägt den Namen des Physikers J.P. Joule (1818-1889).

Zur Beschreibung der Dimensionen: Die Arbeit von einem Joule wird verrichtet, wenn eine Kraft von einem Newton einen Körper um einen Meter in Richtung der Kraft verschiebt.

Greift eine Kraft einen Körper schräg an, so kann sie in zwei Komponenten zerlegt werden. Dies ist zum einen der x-Anteil, der in Richtung der zu verschiebenden Wegstrecke wirkt, und der y-Anteil, der entweder als Zug- oder Druckkraft in Richtung der Gewichtskraft wirkt. Wie in der Definition beschrieben, wird durch die Kraft, die eine Lageänderung eines Körpers verursacht, eine Arbeit verrichtet. Dies ist in dem beschriebenen Fall der x-Anteil der Kraft (Abbildung 65b).

$$W = F \cdot \cos \alpha \cdot s$$

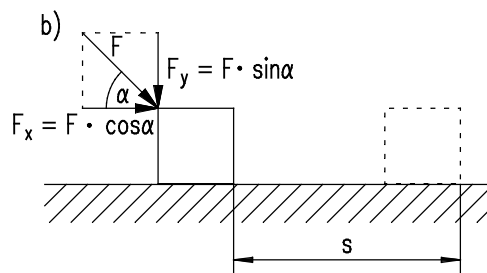
a)



Arbeit W einer längs des Weges angreifenden Kraft

Abbildung 65 Mechanische Arbeit

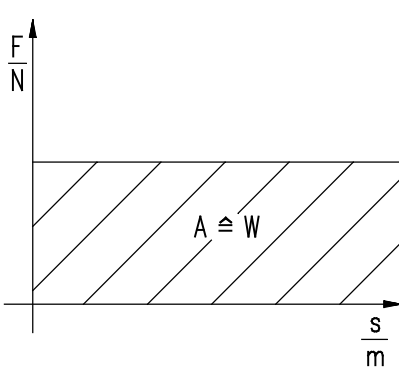
b)



Arbeit W einer schräg angreifenden Kraft

Die Arbeit wird zeichnerisch im Kraft-Weg-Diagramm (F-s-Diagramm) dargestellt. Bei abgetragener Wegstrecke auf der x-Achse und Kraft auf der y-Achse, entspricht die Fläche unter der Kraftlinie der aufgebrauchten Arbeit. Abbildung 66a zeigt das Kraft-Weg-Diagramm mit einer konstant angreifenden Kraft und Abbildung 66b das Diagramm mit einer veränderlichen Kraft.

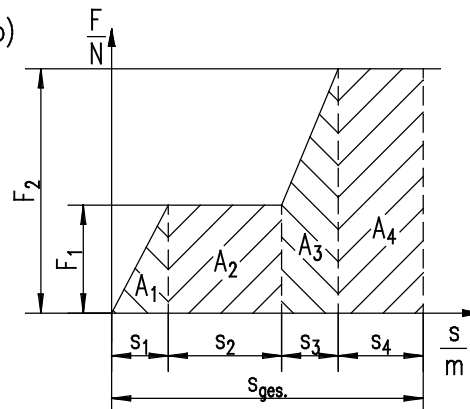
a)



F-s-Diagramm bei konstanter Kraft F

Abbildung 66 Kraft-Weg-Diagramm

b)

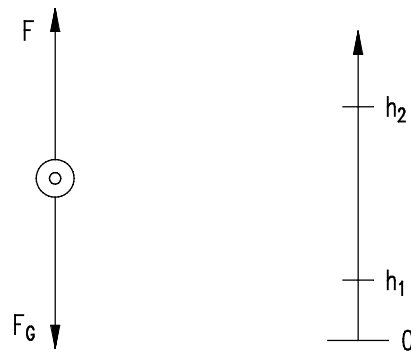


F-s-Diagramm bei einer veränderlichen Kraft

In der Physik werden verschiedene Arten der mechanischen Arbeit unterschieden. Es wurde bis jetzt die allgemeine Bedingung der Arbeit erläutert. Sie heißt: Ein Körper, der durch das Einwirken einer Kraft F seine Lage verändert, wurde entlang einer Wegstrecke verschoben. Die Arbeit ist somit als das Produkt aus der Kraft und dem zurückgelegten Weg definiert.

Potenzielle Arbeit (W_{pot})

Betrachten wir nun einen Körper, der angehoben werden soll. Um die Lage des Körpers zu ändern, muss eine Kraft auf ihn wirken, die gegen die Gewichtskraft des Körpers gerichtet ist. Die hierbei verrichtete Arbeit wird als **potenzielle Arbeit** oder **Hubarbeit** bezeichnet.



$$W = F \cdot s$$

$$F_G = m \cdot g$$

$$s = h_2 - h_1 = h$$

$$\Rightarrow W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

Abbildung 67 Potenzielle Arbeit

Soll ein Körper auf einer reibungsfreien schiefen Ebene entlang des Weges s auf eine Höhe h geschoben werden (siehe folgende Abbildung), so ist die zu verrichtende Arbeit genauso groß, als wenn man den Körper senkrecht auf die Höhe h anhebt.

Entlang der schiefen Ebene ist die aufzuwendende Schubkraft F_{Sch} jedoch geringer als die Gewichtskraft F_G , dafür ist aber der Weg s länger als die Höhe h .

Der gesamte Sachverhalt lässt sich wie folgt zeigen:

Die aufzuwendende Schubkraft F_{Sch} , die man benötigt, um den Körper die schiefe Ebene hinaufzuschieben, muss die Hangabtriebskraft überwinden:

$$F_{\text{Sch}} = F_H = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

Die Schubarbeit ergibt sich somit zu: $W_{\text{Sch}} = F_{\text{Sch}} \cdot s = m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha$

und weiter mit $\sin \alpha = \frac{h}{s}$ folgt $W_{\text{Sch}} = m \cdot g \cdot s \cdot \frac{h}{s} = m \cdot g \cdot h$.

Dies entspricht genau der potenziellen Arbeit $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$, die aufgebracht werden muss, um den Körper senkrecht auf die Höhe h zu heben.

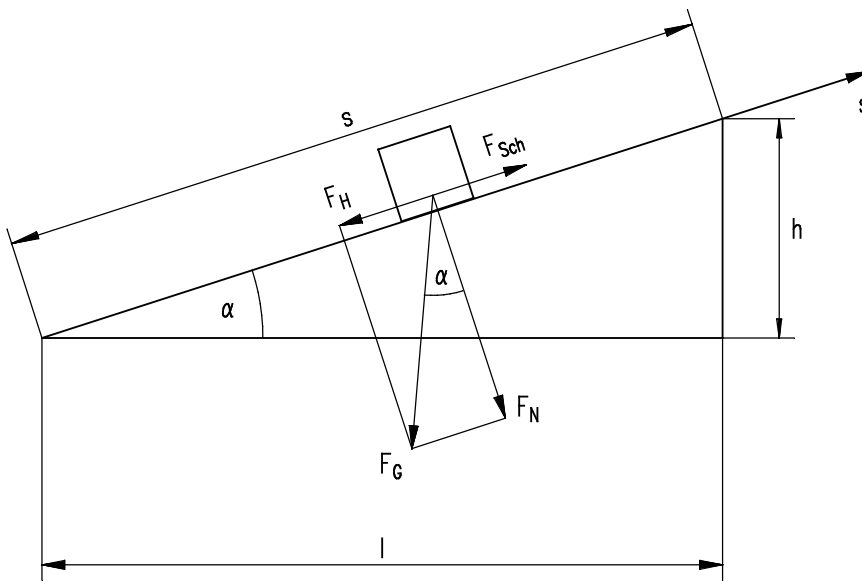


Abbildung 68 Arbeit auf reibungsfreier schiefer Ebene

Reibungsarbeit

Soll ein Körper auf einer waagerechten Ebene bewegt werden, die nicht als reibungsfrei zu betrachten ist, wirkt die Arbeit gegen die Reibungskraft F_R . Zur Ermittlung dieser so genannten Reibungsarbeit muss die Reibungszahl μ bei der Berechnung der Normalkraft F_N mit eingebracht werden.

$$F = F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot m \cdot g$$

$$s = s_2 - s_1$$

$$W_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

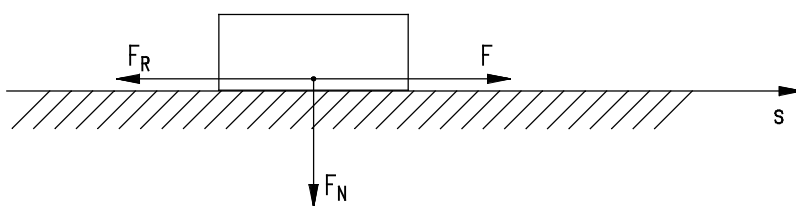


Abbildung 69 Reibungsarbeit

Kinetische Arbeit (W_{kin})

Zur Beschleunigung eines Körpers, ohne Berücksichtigung der Reibung, wird eine **Beschleunigungsarbeit** verrichtet. Die Arbeit wirkt gegen die Trägheitskraft des Körpers. Sie ist nur abhängig von der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit. Die Beschleunigungsarbeit ist proportional der Differenz der quadrierten Geschwindigkeiten.

$$W = F \cdot s$$

$$F = m \cdot a \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 \cdot a \cdot s}$$

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a}$$

$$\Rightarrow W_{\text{kin}} = F \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

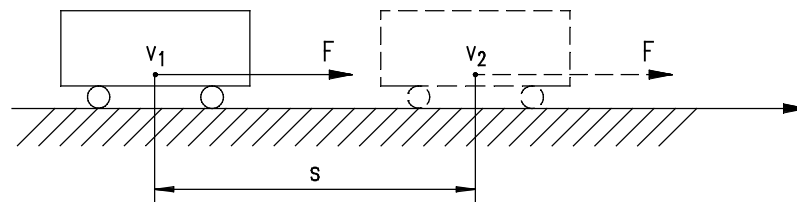


Abbildung 70 Beschleunigungsarbeit

Verformungsarbeit (W_{elast})

Zur Verformung eines Feder-Masse-Systems muss eine Kraft auf das System wirken. Die Kraft verursacht das Dehnen und Strecken einer Feder und wird beeinflusst durch die Federsteifigkeit c und die Verformung x . Die Arbeit, die das System verrichtet, wird **Verformungsarbeit** genannt. Sie entspricht der Fläche der nicht konstanten Kraftkurve und der Wegachse. Für den Augenblick $x = 0$ (Augenblick der Entspannung der Feder) ist die Arbeit gleich Null. Die aufzuwendende Verformungsarbeit nimmt quadratisch mit der Auslenkung x zu.

$$c = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{F_1}{s_1} = \frac{F_2}{s_2} = \dots$$

$$F_{\text{Rück}} = -c \cdot s$$

$$W_{12} = \frac{1}{2} c \cdot (s_2^2 - s_1^2)$$

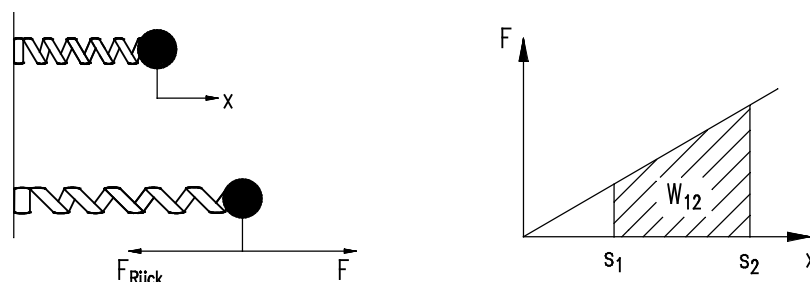
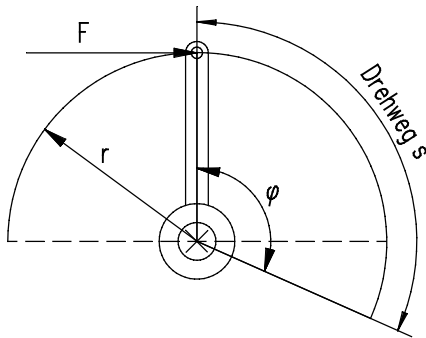


Abbildung 71 Verformungsarbeit

Rotationsarbeit (W_{rot})

Auch rotierende Körper verrichten Arbeit. Wirkt z.B. bei einer Kurbel eine konstante Kraft F in tangentialer Richtung zur Drehachse, so bewirkt diese Kraft eine Drehbewegung. Sie verrichtet entlang des Drehwegs s eine **Drehtarbeit** oder auch **Rotationsarbeit**.



$$W_{\text{rot}} = F \cdot s$$

$$W_{\text{rot}} = F \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot u$$

$$W_{\text{rot}} = F \cdot d \cdot \pi \cdot u$$

$$W_{\text{rot}} = M \cdot \varphi$$

u : Anzahl der Umdrehungen

Abbildung 72 Rotationsarbeit

In jedem M - φ -Diagramm entspricht die Fläche unter der Momentenlinie der Rotationsarbeit W_{rot} des Drehmoments M .

Ist das Drehmoment nicht konstant, sondern linear ansteigend, dann gelten die Diagramme und Gleichungen in Abbildung 73b.

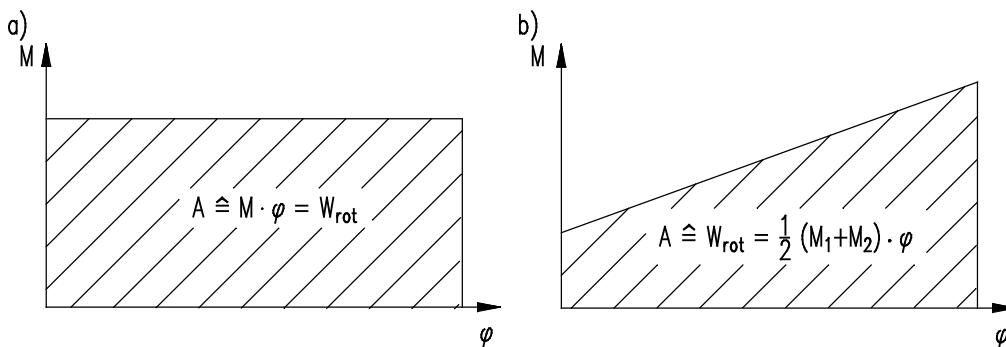


Abbildung 73 a) Arbeitsdiagramm für ein konstantes Drehmoment
b) Arbeitsdiagramm für ein linear ansteigendes Drehmoment

Lehrbeispiel 1

Ein Wagen mit einer Masse von 100 kg wird auf einer Rampe auf die Höhe von 3 m gezogen. Die Rampe hat eine Steigung von $\alpha = 30^\circ$.

Berechnen Sie die Hubarbeit, die eine Winde verrichten muss, wenn der Wagen die Höhe erreicht hat!

Lösung

Gegeben: $m = 100 \text{ kg}$
 $h = 3 \text{ m}$
 $\alpha = 30^\circ$

Gesucht: W_{pot}

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h = 100 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ m} = \underline{\underline{2943 \text{ J}}}$$

Lehrbeispiel 2

Ein PKW mit der Masse $m = 600 \text{ kg}$ soll aus dem Stand auf $v = 100 \text{ km/h}$ in 10 s beschleunigt werden.

Berechnen Sie die Arbeit, die der Wagen bis zum Erreichen der Endgeschwindigkeit zu verrichten hat!

Lösung

Gegeben: $m = 600 \text{ kg}$
 $v_1 = 0 \text{ km/h}$
 $v_2 = 100 \text{ km/h}$
 $t = 10 \text{ s}$

Gesucht: W_{kin}

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 600 \text{ kg} \cdot \left(100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right)^2 = 231481,5 \text{ Nm} = \underline{\underline{231,5 \text{ kJ}}}$$

Lehrbeispiel 3

Eine Feder mit einer Federsteifigkeit von $c = 80 \text{ N/mm}$ soll mit einer Kraft von 500 N gestaucht werden. Während des Betriebs soll die Feder um weitere 12 mm zusammengedrückt werden.

Berechnen Sie den Vorspannweg s_1 , die maximale Federkraft F_2 im Betrieb und die gesamte Federarbeit im Betrieb!

Lösung

Gegeben: $F_1 = 500 \text{ N}$
 $c = 80 \text{ N/mm}$
 $\Delta s = 12 \text{ mm}$

Gesucht: $s_1; s_2; W_F$

$$c = \frac{F_1}{s_1} = \frac{F_2}{s_2} \Rightarrow s_1 = \frac{F_1}{c} = \frac{500 \text{ N}}{80 \frac{\text{N}}{\text{mm}}} = \underline{\underline{6,25 \text{ mm}}}$$

$$F_2 = c \cdot (s_1 + \Delta s) = 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot (6,25 \text{ mm} + 12 \text{ mm}) = \underline{\underline{1460 \text{ N}}}$$

$$W_{\text{elast}} = \frac{1}{2} c \cdot (s_2^2 - s_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot (18,25^2 - 6,25^2) \text{ mm}^2 = 11760 \text{ Nmm}$$

$$= \underline{\underline{11,76 \text{ Nm}}}$$

Lehrbeispiel 4

Eine Seilwinde soll einen Körper mit der Masse von $m = 100 \text{ kg}$ anheben. Um die Höhe von $h = 5 \text{ m}$ zu erreichen, muss die Kurbelwelle 120 vollständige Umdrehungen

machen. Die Welle hat einen Radius von $r = 30 \text{ cm}$. Sie wird von einer Person betrieben, die eine gleichförmige Tangentialkraft von $F = 500 \text{ N}$ auf die Welle wirken lässt.

Berechnen Sie die Rotationsarbeit!

Lösung

Gegeben: $m = 100 \text{ kg}$
 $u = 120$
 $r = 30 \text{ cm}$
 $F = 500 \text{ N}$

Gesucht: W_{rot}

$$W_{\text{rot}} = F \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot u = 500 \text{ N} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 120 = \underline{\underline{113097 \text{ Nm}}}$$

2.6.2 Formen der Energie

Jeder Körper, unabhängig von dem Aggregatzustand (fest, flüssig oder gasförmig), ist unter bestimmten Voraussetzungen in der Lage Arbeit zu verrichten. Dies ist immer dann der Fall, wenn an dem Körper vorab selbst eine Arbeit verrichtet wurde. Der Körper speichert die an ihm verrichtete Arbeit und kann sie von Fall zu Fall wieder abgeben. Die Arbeit wird in Form von Energie im Körper gespeichert.

Definition:

Die im Körper gespeicherte Arbeitsfähigkeit heißt Energie E des Körpers. Durch Zufuhr oder Abgabe von Arbeit wird die Energie eines Körpers oder die Gesamtenergie eines Systems erhöht oder erniedrigt. Die Energie wird mit der gleichen Maßeinheit wie die Arbeit angegeben, dem Joule (J).

$$\Delta E = E_{\text{nachher}} - E_{\text{vorher}} = \Delta W$$

In der Mechanik wird zwischen drei Energiearten unterschieden. Diese sind:

- potenzielle Energie
- kinetische Energie
- Spannungsenergie

Potenzielle Energie E_{pot}

Es werden allgemein die Energieanteile eines Körpers durch die Arbeit beschrieben, die sie erzeugt haben. Wird also ein Körper mit der Masse m um die Höhe h gegenüber der Bezugsebene angehoben, so ist Hubarbeit an ihm verrichtet worden. Diese Arbeit ist in dem Körper als Energie gespeichert, die er ganz oder teilweise an andere Körper in Form von Arbeit weitergeben kann.

$$E_{\text{pot}} = W_{\text{hub}} = m \cdot g \cdot h$$

Hat ein Körper schon potenzielle Energie in Form von Hubarbeit aufgenommen, so muss für das weitere Anheben des Körpers wiederum Hubarbeit aufgewendet werden. Diese zusätzliche Arbeit wird in dem Körper ebenfalls als potenzielle Energie gespeichert.

$$E_{\text{pot}2} = E_{\text{pot}1} + \Delta E_{\text{pot}}$$

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}2} - E_{\text{pot}1}$$

$$\Delta E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

Kinetische Energie E_{kin}

Um einen Körper mit der Masse m zu beschleunigen, ist nach dem dynamischen Grundgesetz (zweites Newtonsches Axiom) eine resultierende äußere Kraft notwendig.

$$F = m \cdot a$$

Die Kraft wirkt in der Beschleunigungsrichtung der Wegstrecke s . Der Körper erfährt während der Beschleunigung eine Beschleunigungsarbeit. Diese Arbeit wird in dem Körper als kinetische Energie gespeichert, die er ganz oder teilweise an andere Körper in Form von Arbeit weitergeben kann.

$$E_{\text{kin}} = W_{\text{kin}} = F \cdot s$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Hat ein Körper schon kinetische Energie in Form von Beschleunigungsarbeit aufgenommen, so muss für weitere Beschleunigung des Körpers wiederum Beschleunigungsarbeit aufgewendet werden. Diese zusätzliche Arbeit wird in dem Körper ebenfalls als kinetische Energie gespeichert.

$$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}2} - E_{\text{kin}1}$$

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

Rotationsenergie E_{rot}

Die Rotationsenergie ist auch eine Form der kinetischen Energie. Es wird ein Körper aus dem Stillstand heraus auf eine Winkelgeschwindigkeit ω gebracht. Hierzu ist nach dem dynamischen Grundgesetz ein Drehmoment erforderlich, das das Trägheitsmoment J überwindet. Das Moment M dreht den Körper um den Drehwinkel $\Delta\varphi$ und verrichtet dabei Beschleunigungsarbeit.

$$M = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\text{mit } \Delta\omega = \omega$$

$$M \cdot \Delta\varphi = J \cdot \frac{\omega}{\Delta t} \cdot \Delta\varphi = J \cdot \frac{\omega}{\Delta t} \cdot \frac{\omega \cdot \Delta t}{2}$$

$$E_{\text{rot}} = W_{\text{rot}} = M \cdot \Delta\varphi$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Besitzt der Körper schon eine Anfangsgeschwindigkeit, so errechnet sich die Rotationsenergie aus:

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Spannungsenergie E_{elast}

Wird eine unverformte Feder gespannt, so muss für das Spannen eine Verformungsarbeit aufgewendet werden. Diese Arbeit wird in der Feder als Spannungsenergie gespeichert, die sie ganz oder teilweise an andere Körper in Form von Arbeit weitergeben kann.

$$E_{\text{elast}} = \frac{1}{2} c \cdot s^2$$

Hat eine Feder schon Spannungsenergie in Form von elastischer Arbeit aufgenommen, so muss für die weitere Spannung der Feder wiederum Spannarbeit aufgewendet werden. Diese zusätzliche Arbeit wird in dem Körper ebenfalls als Spannungsenergie gespeichert.

$$\Delta E_{\text{elast}} = E_{\text{elast}2} - E_{\text{elast}1}$$

$$\Delta E_{\text{elast}} = \frac{1}{2} c \cdot (s_2^2 - s_1^2)$$

Die drei bis hier beschriebenen Energiearten dienen ausschließlich zur Speicherung der am Körper verrichteten mechanischen Arbeit. Doch es gibt noch weitere Energiearten, die in diesem Abschnitt kurz beschrieben werden sollen.

Elektrische Energie

Die für die Trennung elektrischer Ladungen erforderliche Arbeit ist in den Ladungen auf Grund ihres Ausgleichbestrebens in Form von potenzieller Energie enthalten.

Thermische Energie (Wärmeenergie)

Wärmeenergie ist in der Materie auf Grund der Bewegung ihrer Elementarteilchen enthalten.

Chemische Energie

Chemische Energie ist in vielen Stoffen auf Grund ihrer Bindungsfähigkeit zum Sauerstoff enthalten.

Atomenergie

In den Atomkernen ist Bindungsenergie (Kernenergie) enthalten, die mit der chemischen Bindungsenergie in den Molekülen vergleichbar ist. Die Kernenergie ist jedoch im Verhältnis zur Masse wesentlich größer als die chemische Energie.

Energieerhaltungssatz

Die in einem Körper gespeicherte Energie muss nicht vollständig in Form von Arbeit an andere Körper abgegeben werden. Jeder Körper ist in der Lage, Arbeit in Form von Energie zu speichern und diese dann gegebenenfalls abzurufen.

Definition:

In einem abgeschlossenen System bleibt der Energieinhalt konstant. Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden, sie kann nur in andere Energieformen umgewandelt oder zwischen verschiedenen Teilen des Systems ausgetauscht werden.

Die Energie E_E am Ende eines Vorgangs ist gleich der Energie E_A am Anfang des Vorgangs, vermehrt um die während des Vorgangs zugeführte Arbeit W_{zu} und vermindert um die während des Vorgangs abgeführte Arbeit W_{ab} .

$$E_E = E_A + W_{zu} - W_{ab}$$

Wird der Energieerhaltungssatz ausschließlich für einen technischen Vorgang der Mechanik bezogen, so kann bei Vernachlässigung der Reibung vereinfacht gesagt werden:

Die Summe der kinetischen Energie und der potenziellen Energie ist konstant.

$$E_{kin} + E_{pot} = \text{konst.}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h = \text{konst.}$$

Bei realen Bedingungen ist dieses natürlich nicht der Fall, da auf der Erde kein physikalischer Vorgang ohne Reibung abläuft. Durch die Reibung wird ein Teil der kinetischen Energie in thermische Energie umgewandelt.

Technische Vorgänge zum Energieerhaltungssatz

Beispiel 1:

In einer als Halbkreis geformten Mulde wird am oberen Rand eine Kugel mit der Masse m gehalten (siehe Abbildung 74). In der Kugel ist auf Grund der Höhe h eine potenzielle Energie gespeichert. Es ist die maximale potenzielle Energie, die von der Kugel in dieser Mulde gespeichert werden kann. Die kinetische Energie ist zu diesem Augenblick gleich Null.

$$E_{pot} = E_{pot\max} = m \cdot g \cdot h_{\max}$$

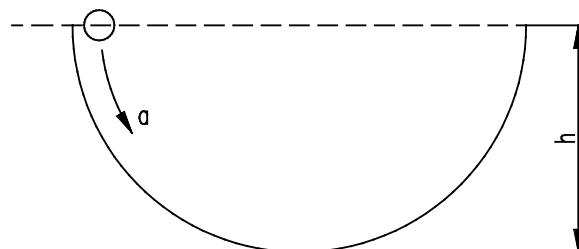


Abbildung 74 Energie der Kugel in einer Mulde

Nach dem Loslassen der Kugel beschleunigt sie entlang der Wegstrecke bis zur Höhe $h = 0$. Die Rollreibung soll bei dieser Betrachtung vernachlässigt werden. Durch die Abnahme der Höhe verringert sich die potenzielle Energie der Kugel. Im gleichen Zeitraum, wie die potenzielle Energie abnimmt, nimmt die kinetische Energie mit gleichem Betrag zu. Diese erklärt sich aus dem Energieerhaltungssatz.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{konst.}$$

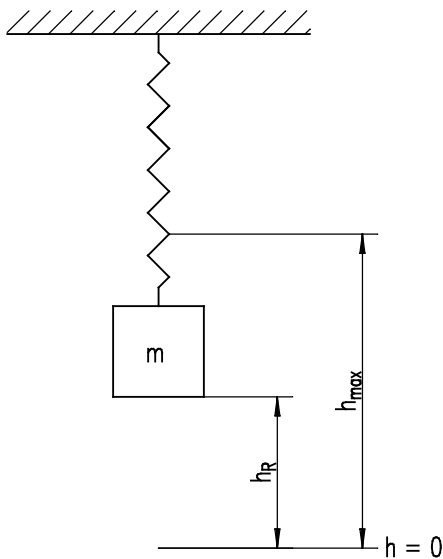
Bei der Höhe $h = 0$ ist die Geschwindigkeit der Kugel am größten und somit auch die kinetische Energie. Die potenzielle Energie ist an dieser Stelle gleich Null.

$$0 + E_{\text{kin max}} = 0 + \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{max}}^2 = \text{konst.}$$

Rollt die Kugel weiter, gewinnt sie wieder an Höhe und die Geschwindigkeit nimmt, verursacht durch die negative Beschleunigung (Verzögerung), ab. Hieraus folgt, dass die potenzielle Energie wieder zunimmt und die kinetische abnimmt. Hat die Kugel die Höhe h_{max} erreicht, so ist die Geschwindigkeit $v = 0$ und das System hat die Anfangsbedingung der Energie wieder angenommen.

$$E_{\text{pot max}} + 0 = m \cdot g \cdot h_{\text{max}} + 0 = \text{konst.}$$

Beispiel 2:



Ein Feder-Massesystem hängt unter der Decke. Die Bezugshöhe des Systems ist bei $h = 0$ (Bild).

h_R – Höhe, die der Körper in Ruhe einnehmen würde

Abbildung 75 Energie eines Feder-Massesystems

Bei diesem System treten drei verschiedene Energiearten auf. Dies ist zum einen die potenzielle Energie und die kinetische Energie des Körpers und zum anderen die Verformungsenergie der Feder. Aus den Energiearten lässt sich der folgende Energieerhaltungssatz des schwingenden Systems bilden.

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{elast}} = \text{konst.}$$

$$m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot s^2 = \text{konst.}$$

Jede Energieart hat sein Maximum an einem unterschiedlichen Punkt der Höhe. Die potenzielle Energie hat ihren höchsten Wert, wenn der schwingende Körper die größte Höhe h_{max} erreicht hat. Der Körper hat die maximale kinetische Energie gespeichert,

wenn der Körper die größte Geschwindigkeit v_{\max} erreicht hat. Dieser Punkt liegt in der Höhe, in dem sich die entspannte Feder ohne angehängte Masse ausrichten würde (Ruhelage). Das Maximum der elastischen Energie liegt in der Höhe, bei der die Feder die größte Dehnung x_{\max} erfährt. Hier ist die Geschwindigkeit des Körpers gleich Null. Dieser Punkt ist gleichzeitig auch der Bezugspunkt der Höhe, was bedeutet, dass die potenzielle Energie in diesem Punkt ebenfalls Null ist. Die gesamte Energie des Körpers ist zur Feder übergegangen. Die Energie des Systems wird also nicht nur im Körper gespeichert und umgesetzt, sondern auch an die Feder übertragen.

$$0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot s^2_{\max} = \text{konst.}$$

Hat die Feder ihre größte Dehnung erreicht, beschleunigt die Federkraft den Körper wieder nach oben. Seine kinetische und potenzielle Energie steigen wieder an. Die kinetische Energie hat ihr Maximum wieder bei Entspannung der Feder. Danach verringert sie sich wieder auf Grund der Schwerkraft. Hat der Körper seine Ausgangslage wieder erreicht, ist die kinetische Energie gleich Null und die potenzielle Energie hat ihr Maximum.

Beispiel 3:

Auf einer schiefen Ebene werden zwei gleichwertige Federn an den Punkten A und B mit dem Abstand s befestigt. Die Feder A wird gestaucht und durch eine Sperre in Ruhe gehalten. Es wird ein Körper mit einer Masse m in die Feder A gespannt, der ebenfalls in Ruhe gehalten wird. Die Feder B ist in einem entspannten Zustand. Die Oberfläche der Ebene soll bei diesem Beispiel als reibungsfrei betrachtet werden.

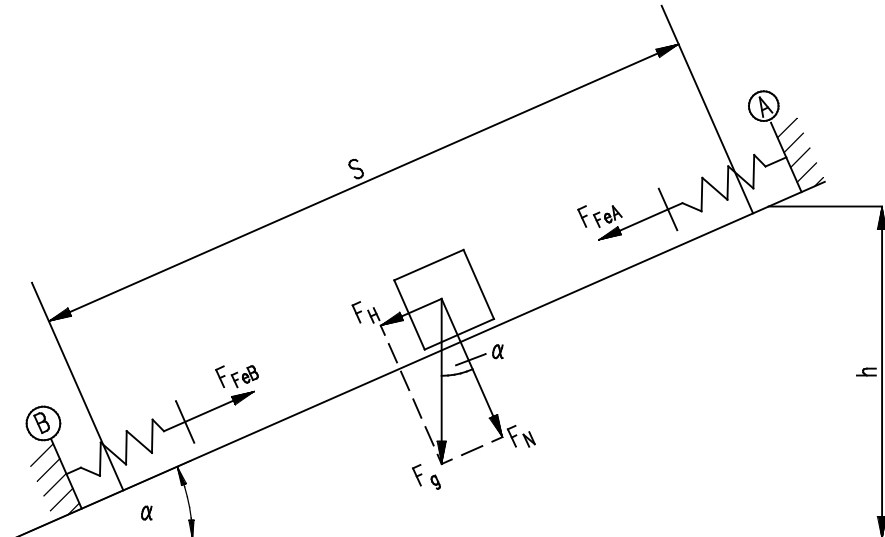


Abbildung 76 Beschleunigung eines Körpers auf einer schiefen Ebene durch ein Federsystem

Das System besitzt im Punkt A eine Anfangsenergie E_{sy} , die sich aus der potenziellen Energie des Körpers und der Verformungsenergie der Feder zusammensetzt.

$$E_{sy} = E_{\text{pot}} + E_{\text{elast}} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} c_A \cdot s_A^2$$

Die maximale potenzielle Energie des Systems speichert der Körper in Punkt A, da er hier die größte Höhe zur Bezugshöhe in Punkt B hat.

Nach Lösen der Sperre wird der Körper durch die Federkraft der Feder A beschleunigt. Die in der Feder gespeicherte Verformungsenergie wird vollständig durch die Beschleunigungsarbeit in kinetische Energie umgewandelt und dem Körper zugeführt. Zusätzlich erfährt der Körper auf Grund der schiefen Ebene eine weitere Beschleunigung und die Geschwindigkeit erhöht sich entlang der Wegstrecke s . Im Moment des Auftreffens des Körpers auf die Feder im Punkt B ist die kinetische Energie des Systems am größten, da die Geschwindigkeit am höchsten ist. Entlang der Wegstrecke s ist in dem System sowohl potenzielle als auch kinetische Energie gespeichert. Der Betrag der Energie ist gleich der Anfangsenergie.

$$E_{\text{sy}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Trifft der Körper nun auf die Feder B, so wird er gebremst bis zum Stillstand. Im Augenblick der Ruhe ist die kinetische Energie gleich Null ($E_{\text{kin}} = 0$), da die Geschwindigkeit $v = 0$ ist. Ebenso die potenzielle Energie ($E_{\text{pot}} = 0$), da die Höhe $h = 0$ ist. Die gesamte Energie des Systems ist durch die geleistete Arbeit zum Spannen der Feder B in Verformungsenergie umgewandelt worden.

$$E_{\text{sy}} = E_{\text{elast}} = \frac{1}{2} c_B \cdot s_B^2$$

Die Verformungsenergie der Feder B im Punkt $h = 0$ ist um den Betrag der potenziellen Energie im Punkt $h = \text{max}$ größer als die maximale Verformungsenergie der Feder A. Es kann aber auch gesagt werden, dass sie sich um den Betrag der kinetischen Energie vergrößert, die der Körper durch die Beschleunigung, verursacht durch die schiefen Ebenen, aufgenommen hat.

$$E_{\text{sy}} = m \cdot g \cdot h_{\text{max}} + \frac{1}{2} c_A \cdot s_A^2$$

Die gesamte Verformungsenergie beim Entspannen der Feder B wird in kinetische Energie umgewandelt. Den größten Betrag der kinetischen Energie hat der Körper im Augenblick des Verlassens von der Feder aufgenommen. Beim gleichzeitigen Beschleunigen des Körpers wächst aber auch die potenzielle Energie wieder an, da er an Höhe gewinnt. Sie wächst so weit, bis das Maximum in Punkt A erreicht ist.

Es wird aber nicht die gesamte kinetische Energie in potenzielle Energie umgewandelt. Gleichzeitig muss der Körper beim Auftreffen auf die Feder A Arbeit verrichten, um diese zu spannen. Im Moment des Stillstandes ist das Maximum der potenziellen Energie im Körper gespeichert und ebenfalls das Maximum der Spannungsenergie in der Feder. Die Anfangsbedingung ist wieder erreicht.

$$E_{\text{sy}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{elast}} = m \cdot g \cdot h_{\text{max}} + \frac{1}{2} c_A \cdot s_A^2$$

Dieser Vorgang wiederholt sich bei reibungsfreier Betrachtung des Systems fortlaufend.

Läuft der gesamte Vorgang nicht reibungsfrei ab, so wird ein Teil der Energie in Wärme umgesetzt, die durch Reibung (Bewegung des Körpers auf einer Oberfläche) entsteht. Die Geschwindigkeit des Körpers nimmt nach und nach ab, die Federn werden nicht mehr so stark gespannt, und das System kommt nach einer Zeit zur Ruhe.

Lehrbeispiel 1

Zum Zerschlagen einer Stahlbetondecke wird beim Abbruch eines Hauses eine Fallbirne mit einer Masse von $m = 1200 \text{ kg}$ verwendet. Die Arbeit, die von der Fallbirne verrichtet wird, beträgt 65 kJ .

Berechnen Sie die Aufschlagsgeschwindigkeit und die erforderliche Fallhöhe der Fallbirne!

Lösung

Gegeben: $m = 1200 \text{ kg}$

$W_{\text{pot}} = 65 \text{ kJ}$

Gesucht: v ; h

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

$$\Rightarrow h = \frac{W_{\text{pot}}}{m \cdot g} = \frac{65000 \text{ J}}{1200 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}$$

$$\underline{\underline{h = 5,52 \text{ m}}}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5,52 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{v = 10,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Lehrbeispiel 2

Eine Lore mit einer Masse $m = 1000 \text{ kg}$ rollt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v = 2 \text{ m/s}$ auf einer waagerechten Fahrstrecke aus. Aus dem Rollwiderstand und der Luftströmung ergibt sich ein Fahrwiderstand von $F_R = 200 \text{ N}$.

Wie lang ist die Wegstrecke, die die Lore zum Ausrollen benötigt?

Lösung

Gegeben: $m = 1000 \text{ kg}$

$v_1 = 2 \text{ m/s}$

$v_2 = 0 \text{ m/s}$

$F_R = 200 \text{ N}$

Gesucht: Δs

$$E_E = E_A - W_{\text{ab}}$$

$$E_E = 0$$

$$E_A = W_{\text{ab}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad \text{mit } v = v_1$$

$$W_{\text{ab}} = F \cdot s$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 - F \cdot s$$

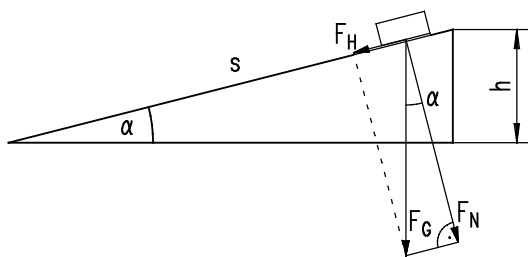
$$\Rightarrow s = \frac{m \cdot v_1^2}{2 \cdot F} = \frac{1000 \text{ kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 200 \text{ N}} \quad (\text{mit } 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$\underline{\underline{s = 10 \text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 3

Eine Kiste steht auf einer schiefen Ebene in einer Höhe von 3 m. Der Steigungswinkel der Ebenen beträgt $\alpha = 30^\circ$. Die Reibung zwischen Kiste und Ebene beträgt konstant $\mu = 0,2$.

Welche Geschwindigkeit hat die Kiste beim Herunterrutschen am Ende der schiefen Ebene?

Lösung

Gegeben: $h = 3 \text{ m}$
 $\alpha = 30^\circ$
 $\mu = 0,2$
 $v_1 = 0 \text{ m/s}$

Gesucht: v

$$E_E = E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} - W_{\text{ab}} = E_{\text{pot}} - W_R$$

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$W_R = F_R \cdot s = F_N \cdot \mu \cdot s = F_G \cdot \cos \alpha \cdot \mu \cdot s$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \mu \cdot \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1}{2} v^2 = g \left(h - \cos \alpha \cdot \mu \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \right)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(h - \cos \alpha \cdot \mu \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \right)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(3 \text{ m} - \cos 30^\circ \cdot 0,2 \cdot \frac{3 \text{ m}}{\sin 30^\circ} \right)}$$

$$\underline{\underline{v = 6,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Lehrbeispiel 4

Ein Eisenbahnwagen fährt zum Bremsen gegen einen ungefederten Prellbock. Der starre Bock drückt die zwei Puffer des Wagens, die eine Federsteifigkeit von $c = 0,2 \text{ kN/mm}$ haben, um 90 mm zusammen.

Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Wagens, der eine Masse von $m = 20 \text{ t}$ hat!

Lösung

Gegeben: $c = 0,2 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$
 $m = 20 \text{ t}$
 $s = 90 \text{ mm}$

Gesucht: v

$$E_E = E_A - W_{ab}$$

$$E_E = 0$$

$$E_A = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$W_{ab} = 2 \cdot W_{Fe} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c (s_2^2 - s_1^2)$$

$$s_1 = 0$$

$$\Rightarrow W_{ab} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot s^2 = c \cdot s^2$$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - c \cdot s^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = c \cdot s^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot c \cdot s^2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,09 \text{ m})^2}{20000 \text{ kg}}} \quad (\text{mit } 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$\underline{\underline{v = 0,402 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Lehrbeispiel 5

Ein Schwungrad mit einem Trägheitsmoment von $J = 120 \text{ kgm}^2$ wird mit einer Drehzahl von $n = 1200 \frac{1}{\text{min}}$ betrieben. Durch Entnahme von Arbeit verringert sich die Drehzahl um $\Delta n = 60 \frac{1}{\text{min}}$.

Berechnen Sie die Arbeit, die dem Schwungrad entnommen wurde!

LösungGegeben: $J = 120 \text{ kg m}^2$

$$n_1 = 1200 \frac{1}{\text{min}}$$

$$\Delta n = 60 \frac{1}{\text{min}}$$

Gesucht: W_{rot}

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$\Rightarrow W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot [(2 \cdot \pi \cdot n_1)^2 - (2 \cdot \pi \cdot n_2)^2]$$

$$n_2 = n_1 - \Delta n = 1200 \cdot \frac{1}{\text{min}} - 60 \frac{1}{\text{min}} = 1140 \frac{1}{\text{min}}$$

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot 120 \text{ kg m}^2 \cdot \left[\left(2 \cdot \pi \cdot 1200 \frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \right)^2 - \left(2 \cdot \pi \cdot 1140 \frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \right)^2 \right]$$

$$\text{mit } 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$= 92379,5 \text{ N} = \underline{\underline{92,38 \text{ kJ}}}$$

2.6.3 Leistung und Wirkungsgrad**Leistung**

Bei einer Lageänderung eines Körpers verrichtet dieser mechanische Arbeit. Die Arbeit sagt aber nichts über die Zeit aus, die für ihre Verrichtung benötigt wird. Wird die Arbeit mit der Zeit, die der Körper zur Lageänderung benötigt, ins Verhältnis gebracht, so ergibt sich hieraus die Leistung.

Definition:

Die Leistung P ist der Quotient aus der verrichteten Arbeit W und der dazu erforderlichen Zeit t . Die Einheit der Leistung ist Newtonmeter pro Sekunde oder Watt (W).

$$P = \frac{W}{t}$$

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = W$$

Die Einheit trägt den Namen des englischen Erfinders J. Watt (1736-1819). Eine Leistung der Größe von einem Watt sagt aus, dass eine Arbeit von einem Joule in einer Sekunde verrichtet wurde.

Mit der oben genannten Gleichung $P = W/t$ lässt sich die Momentanleistung während eines Zeitabschnitts berechnen. Die mittlere Leistung eines dafür benötigten Vorgangs wird aus dem Verhältnis der gesamten verrichteten Arbeit zur Gesamtzeit errechnet.

$$P_m = \frac{W_g}{t_g}$$

Wird für die Arbeit das Produkt aus der Kraft mit der Wegstrecke eingesetzt, so kann die Leistung auch aus dem Produkt der Kraft und der Geschwindigkeit errechnet werden.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \frac{s}{t}$$

$$P = F \cdot v$$

Jede Art der physikalischen Arbeit lässt sich im Verhältnis zu der benötigten Zeit als Leistung angeben. Bei der mechanischen Arbeit wird zwischen potenzieller, kinetischer und elastischer Arbeit unterschieden. Werden die zugehörigen Formeln für die genannten Arten der Arbeit in die allgemeine Formel zur Berechnung der Leistung eingesetzt, so ergibt sich:

$$P = \frac{W_{\text{pot}}}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$$

$$P = \frac{W_{\text{kin}}}{t} = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot t}$$

$$P = \frac{W_{\text{elast}}}{t} = \frac{c \cdot s^2}{2 \cdot t}$$

Wirkungsgrad

In der Technik gibt es keine Anwendung, bei der die aufgebrachte Arbeit oder Leistung voll in die Nutzarbeit oder Nutzleistung umgewandelt wird. Ein Teil der Arbeit oder Leistung geht z.B. bei der Reibung von Maschinenteilen und Lagern oder anderen Verursachern verloren. Sie werden somit nicht für die eigentliche Nutzung verwendet. Diese sogenannten Verluste werden durch den Wirkungsgrad η beschrieben.

Definition:

Der Wirkungsgrad η ist das Verhältnis der nutzbaren abgegebenen Arbeit W_{ab} oder Leistung P_{ab} zur aufgewendeten zugeführten Arbeit W_{zu} oder Leistung P_{zu} . Diese physikalische Größe wird ohne Einheiten beschrieben. Der Wirkungsgrad liegt in einem Bereich von $0 \leq \eta < 1$.

$$\eta = \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}} = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

Sind in einer Anlage mehrere Maschinen eingebunden, so errechnet sich der Gesamtwirkungsgrad aus dem Produkt der einzelnen Wirkungsgrade.

$$\eta_{\text{ges}} = \frac{W_{\text{ab1}}}{W_{\text{zu1}}} \cdot \frac{W_{\text{ab2}}}{W_{\text{zu2}}} \cdot \dots \cdot \frac{W_{\text{abn}}}{W_{\text{zun}}} = \frac{W_{\text{abn}}}{W_{\text{zu1}}}$$

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n$$

Lehrbeispiel 1

Ein Junge mit einer Masse von $m = 40 \text{ kg}$ läuft eine Treppe vom Erdgeschoss bis in die 4. Etage ($\Delta h = 12 \text{ m}$) in $t = 35 \text{ s}$ hinauf.

Wie groß ist die Arbeit, die der Junge verrichtet und die Leistung, die er erbracht hat?

Lösung

Gegeben: $m = 40 \text{ kg}$
 $h = 12 \text{ m}$
 $t = 35 \text{ s}$

Gesucht: W ; P

$$W = m \cdot g \cdot h = 40 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{W = 4709 \text{ J}}}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{4709 \text{ J}}{35 \text{ s}}$$

$$\underline{\underline{P = 134,5 \text{ W}}}$$

Zur Wiederholung:

$$\text{Kraft } F \text{ in Newton: } 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Arbeit } W \text{ in Joule: } 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{Leistung } P \text{ in Watt: } 1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Lehrbeispiel 2

Ein Kran hebt einen Körper von der Masse $m = 600 \text{ kg}$ auf eine Höhe $h = 5 \text{ m}$. Der Hubvorgang dauert 10 s . Während dieser Zeit ändert sich die Geschwindigkeit ständig.

Berechnen Sie die Hubarbeit, die mittlere Hubleistung und den Wirkungsgrad, wenn der Motor des Krans eine Eingangsleistung von $3,5 \text{ kW}$ hat!

Lösung

Gegeben: $m = 600 \text{ kg}$
 $h = 5 \text{ m}$
 $t = 10 \text{ s}$
 $P_{\text{zu}} = 3,5 \text{ kW}$
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Gesucht: W ; P_{ab} ; η

$$W = m \cdot g \cdot h = 600 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{W = 29430 \text{ J} = 29,43 \text{ kJ}}}$$

$$P_{\text{ab}} = \frac{W}{t} = \frac{29430 \text{ J}}{10 \text{ s}}$$

$$\underline{\underline{P_{\text{ab}} = 2943 \text{ W} = 2,943 \text{ kW}}}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} = \frac{2,943 \text{ kW}}{3,5 \text{ kW}}$$

$$\underline{\underline{\eta = 0,84}}$$

Lehrbeispiel 3

Auf einer Streckbank kann ein Stahlrohr in einer Zeit von $t = 30 \text{ s}$ um $l = 10 \text{ m}$ verlängert werden. Hierbei muss eine Zugkraft von $F = 50 \text{ kN}$ aufgewendet werden.

3.1 Wie groß ist die Arbeit, die zum Ziehen des Rohres aufgebracht werden muss?

3.2 Welche Leistung muss in die Streckbank eingebracht werden, bei einem Wirkungsgrad der gesamten Anlage von $\eta = 0,75$?

Lösung

Gegeben: $t = 30 \text{ s}$
 $s = 10 \text{ m}$
 $F_z = 50 \text{ kN}$
 $\eta = 0,75$

Lehrbeispiel 3.1

Gesucht: W_{zug}

$$W_{\text{zug}} = F \cdot s = 50 \text{ kN} \cdot 10 \text{ m}$$

$$W_{\text{zug}} = 500 \text{ kNm} = 500 \text{ kJ}$$

Lehrbeispiel 3.2

Gesucht: P_{zu}

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} \Rightarrow P_{\text{zu}} = \frac{P_{\text{ab}}}{\eta}$$

$$P_{\text{ab}} = \frac{W_{\text{zug}}}{t}$$

$$\Rightarrow P_{\text{zu}} = \frac{W_{\text{zug}}}{t \cdot \eta} = \frac{500 \text{ kNm}}{30 \text{ s} \cdot 0,75}$$

$$P_{\text{zu}} = 22,2 \text{ kW}$$

Lehrbeispiel 4

Eine Wasserpumpe fördert eine Wassermenge von 8000 l in 15 min . Der Höhenunterschied des Wasserspiegels beträgt $h = 8 \text{ m}$. Der Wirkungsgrad der Pumpe liegt bei $\eta = 0,8$.

4.1 Berechnen Sie die Abgabeleistung der Pumpe!

4.2 Berechnen Sie die elektrische Aufnahmeleistung der Pumpe!

Lösung

Gegeben: $V = 8000 \text{ dm}^3$
 $t = 15 \text{ min}$
 $h = 8 \text{ m}$
 $\eta = 0,8$

Lehrbeispiel 4.1

Gesucht: P_{ab}

$$P_{ab} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$$

mit $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 \hat{=} 1 \text{ kg}$

$$\Rightarrow m_w = 8000 \text{ kg}$$

$$P_{ab} = \frac{8000 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8 \text{ m}}{15 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}$$

$$\underline{\underline{P_{ab} = 697,6 \text{ W}}}$$

Lehrbeispiel 4.2

Gesucht: P_{zu}

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

$$\Rightarrow P_{zu} = \frac{P_{ab}}{\eta} = \frac{697,6 \text{ W}}{0,8}$$

$$\underline{\underline{P_{zu} = 872 \text{ W}}}$$

Lehrbeispiel 5

Ein Welle mit einem Durchmesser von $d = 40 \text{ mm}$ wird mit einer Drehzahl von $n = 500 \text{ 1/min}$ betrieben. Am Umfang der Welle soll tangential eine Leistung von $P = 2 \text{ kW}$ übertragen werden.

Wie groß ist die Tangentialkraft am Umfang der Welle?

Lösung

Gegeben: $d = 40 \text{ mm}$
 $n = 500 \text{ 1/min}$
 $P = 2 \text{ kW}$

Gesucht: F_u

$$P = F \cdot v$$

$$v = d \cdot \pi \cdot n$$

$$F = \frac{P}{\pi \cdot d \cdot n} = \frac{2000 \text{ W} \cdot \text{min} \cdot 60 \text{ s}}{\pi \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 500 \cdot \text{min}}$$

$$\underline{\underline{F = 1910 \text{ N} = 1,91 \text{ kN}}}$$

2.6.4 Einfache Maschinen

In der Technik werden oft Hilfsmittel eingesetzt, um die Arbeit zum Verrichten eines Vorgangs zu erleichtern. Damit soll erreicht werden, dass der Mensch geschont und seine Kräfte gezielt und bestmöglich eingesetzt werden. Die Hilfsmittel, die zur Arbeitserleichterung eingesetzt werden, bezeichnet man als eine **Maschine**. Unter Maschinen wird in den meisten Fällen eine oft komplizierte und hoch technische Einrichtung verstanden, die mit Motorkraft betrieben wird. Dies ist aber bei **einfachen Maschinen** nicht der Fall. Diese Maschinen greifen auf die Grundlagen der Physik zurück und sind somit einfache Hilfsmittel, die einen technischen Vorgang für eine Person vereinfachen. Hierunter sind auch ein Seil, eine Stange oder lose Rollen zu verstehen. Weitere einfache Maschinen sind zum Beispiel ein Keil, ein Flaschenzug und vieles mehr.

Eine der wichtigsten Regeln in der Technik ist der Energieerhaltungssatz. Auch dieser hat bei der Betrachtung technischer Vorgänge bei Hinzuziehen von einfachen Maschinen seine Gültigkeit. Es wird durch den Einsatz von einfachen Maschinen keine Arbeit gespart. Die Arbeit wird nur entlang eines längeren Weges verrichtet, sodass der Mensch weniger Kraft aufbringen muss und er geschont wird.

Das Seil und die Stange

Ein Seil ist ein Hilfsmittel, das zum Halten oder zum Ziehen von Körpern zu verwenden ist. Es kann Kräfte nur in eine Richtung aufnehmen, und zwar in Zugrichtung. Die Belastbarkeit des Seils ist nicht grenzenlos, sie ist abhängig vom Werkstoff und von der Dicke des Seils.

Eine Stange kann Kräfte in mehrere Richtungen aufnehmen. Sie kann sowohl mit Zug- als auch mit Druckkräften beansprucht werden. Die Stärke der Beanspruchung ist auch bei der Stange abhängig vom Werkstoff und von der Dicke.

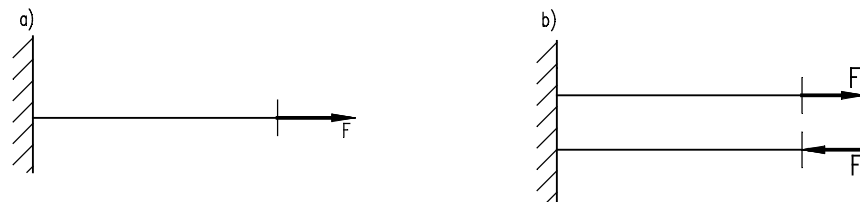


Abbildung 77 Kräfteaufnahme a) eines Seils b) einer Stange

Der Hebel

Wird eine Stange in einem Punkt drehbar gelagert, so kann sie als Hebel angewendet werden. Mit einem solchen Hebel können zum Beispiel verschlossene Türen aufgebrochen oder Körper angehoben werden (Breachstange). Es können aber auch Körper im Gleichgewicht gehalten werden (Wippe, Balkenwaage). Zur Berechnung der Kräfte eines Hebels muss die Gleichgewichtsbedingung aufgestellt werden, das so genannte Hebelgesetz.

Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Momente unter Berücksichtigung der Drehrichtung gleich Null ist.

$$\Sigma M = 0 = \Sigma M_{\text{links}} - \Sigma M_{\text{rechts}}$$

oder

$$\Sigma M_{\text{links}} = \Sigma M_{\text{rechts}}$$

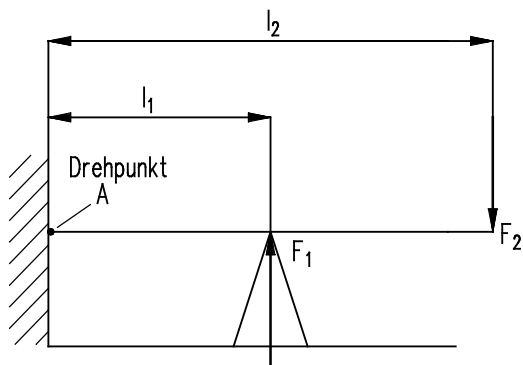


Abbildung 78 Der Hebel

$$\sum M_{(A)} = 0 = F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2$$

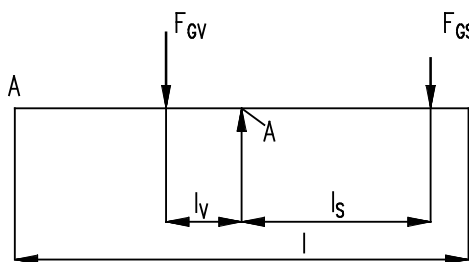
$$M_{\text{links}} = M_{\text{rechts}}$$

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

Lehrbeispiel 1

Vater und Sohn wollen eine Wippe im Gleichgewicht halten. Der Sohn mit der Masse $m = 30 \text{ kg}$ sitzt vom Lager einer 4 m langen Wippe $1,8 \text{ m}$ entfernt.

Wie weit sitzt der Vater vom Lager entfernt, wenn er eine Masse von $m = 80 \text{ kg}$ hat?



Gegeben: $m_S = 30 \text{ kg}$
 $l = 4 \text{ m}$
 $l_S = 1,8 \text{ m}$
 $m_V = 80 \text{ kg}$

Gesucht: l_V

Lösung

$$\sum M_{(A)} = 0 = F_{GV} \cdot l_V - F_{GS} \cdot l_S$$

$$\Rightarrow l_V = \frac{F_{GS} \cdot l_S}{F_{GV}}$$

$$F_G = m \cdot g$$

$$l_V = \frac{m_S \cdot g \cdot l_S}{m_V \cdot g} = \frac{30 \text{ kg} \cdot 1,8 \text{ m}}{80 \text{ kg}} = \underline{\underline{0,675 \text{ m}}}$$

Eine Balkenwaage ist auch eine Art Wippe. Bei dieser Waage ist ein Balken mit einer Länge l_W in der Mitte drehbar gelagert. An beiden Seiten, mit gleichem Abstand l von der Mitte, sind Waagschalen befestigt, in die die zu wiegenden Körper zu legen sind.

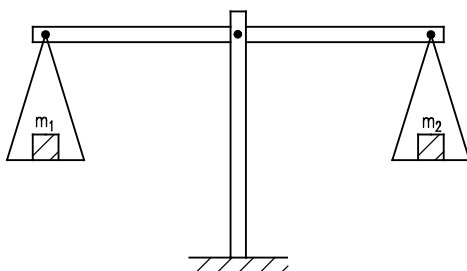


Abbildung 79 Die Balkenwaage

$$M_{\text{links}} = M_{\text{rechts}}$$

$$F_{G1} \cdot l = F_{G2} \cdot l$$

$$m_1 \cdot g \cdot l = m_2 \cdot g \cdot l$$

$$m_1 = m_2$$

Ist eine Masse schwerer, so kippt die Waage zur schweren Masse. Aus der vorher beschriebenen Gleichung würde eine Ungleichung.

$$m_1 \neq m_2$$

Mithilfe einer Brechstange kann das Anheben von schweren Körpern stark erleichtert werden. Die Gewichtskraft der Brechstange soll bei diesem Beispiel vernachlässigt werden. Es besteht die Möglichkeit die Stange als einseitigen oder als zweiseitigen Hebel einzusetzen. In beiden Fällen hat das Hebelgesetz seine Gültigkeit. Die Drehachsen beider Systeme liegen aber in verschiedenen Punkten. Die Drehachse des einseitigen Hebels befindet sich im Berührungspunkt der Brechstange mit dem Boden (Abbildung 80a Punkt A). Die Drehachse des zweiseitigen Hebels befindet sich im Berührungspunkt der Stange mit einer Stütze (Abbildung 80b Punkt A). Das Hebelgesetz lautet in beiden Beispielen:

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

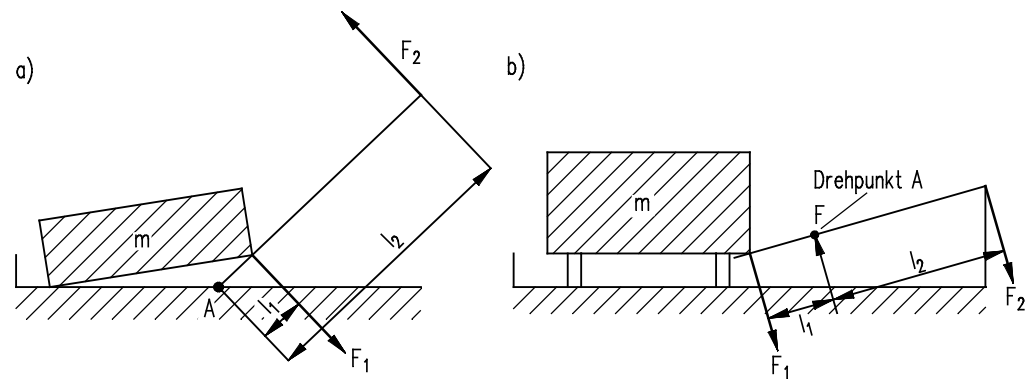


Abbildung 80 Hebel: a) Einseitiger Hebel b) Zweiseitiger Hebel

Ein Schraubenschlüssel ist ein weiteres Beispiel für die Anwendung eines Hebels. Eine Sechskantschraube soll zum Beispiel mit einem definierten Drehmoment fest angezogen werden. Wird versucht das Moment direkt am Schraubenkopf zu erzeugen, so muss dafür eine große Kraft aufgewendet werden. Wird aber das Moment mithilfe eines Schraubenschlüssels erzeugt, so ist die aufgewendete Kraft geringer, da der Abstand zur Schraube größer ist. Die Kraft verhält sich bei konstantem Drehmoment umgekehrt proportional zu der Länge des Hebelarms.

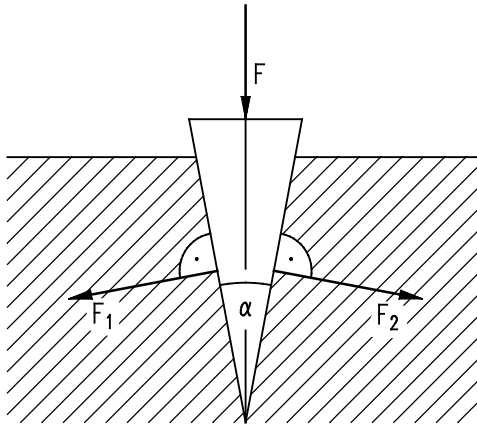
$$M = F \cdot s \quad M = F \cdot l$$

$$\Rightarrow F = \frac{M}{s} \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{M}{l}$$

Die Hebelgesetze lassen sich auch bei einem Schubkarren, einem Nussknacker, einer Türklinke, einer Schere und vielem mehr anwenden.

Der Keil

Mit einem Keil werden Druckkräfte auf einen oder mehrere Körper übertragen. Diese Kräfte werden zum Fixieren oder Spalten von Werkstücken verwandt.

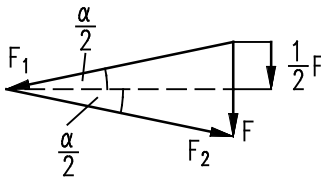
Lehrbeispiel 2

Auf einen Keil wirkt von oben eine Kraft von $F = 500 \text{ N}$. Die Spitze des Keils hat einen Winkel von $\alpha = 20^\circ$.

Mit welcher Kraft wirken die Backen des Keils auf den anliegenden Körper?

Gegeben: $F = 500 \text{ N}$
 $\alpha = 20^\circ$

Gesucht: $F_1 ; F_2$

**Lösung**

$$F_1 = F_2$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{\frac{1}{2}F}{F_1}$$

$$F_1 = \frac{F}{2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} = \frac{500 \text{ N}}{2 \cdot \sin 10^\circ}$$

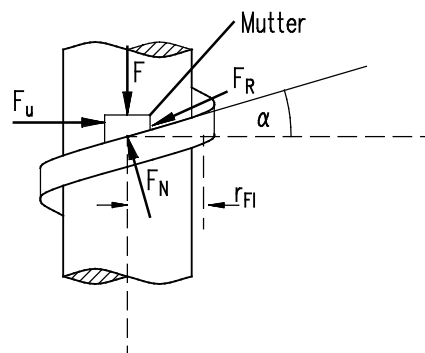
$$\underline{\underline{F_1 = 1439,7 \text{ N}}}$$

$$\underline{\underline{F_2 = 1439,7 \text{ N}}}$$

Die Schraube

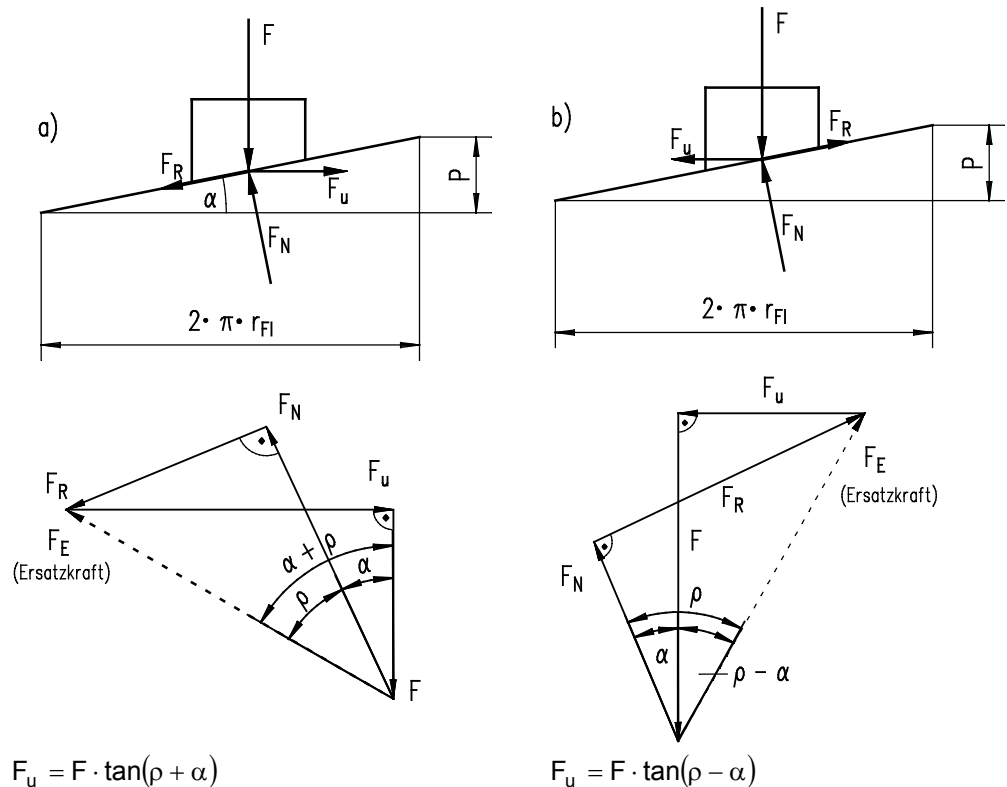
Schrauben werden in der Technik zur Beförderung (Spindelantriebe) oder zum Befestigen von Körpern verwendet.

Bei einem Fördervorgang wird von einer Bewegungsschraube gesprochen. Wird die Schraube angezogen, so wird eine Last gehoben. Beim Lösen der Schraube wird die Last gesenkt. Das Hinauf- oder Hinunterschieben einer Last oder einer Mutter ist zu vergleichen mit der Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene. Die Kraft, die zum Bewegen eines Körpers oder einer Mutter notwendig ist, ist abhängig von der Steigung der Ebene (Steigungswinkel α) und der Reibung der Oberflächen (Reibungswinkel ρ).



F	Schraubenlängskraft
F_u	Umfangskraft
F_R	Reibungskraft
F_N	Normalkraft
α	Steigungswinkel
r_{Fl}	Flankenradius
P	Gewindesteigung
ρ	Reibungswinkel

Abbildung 81 Schraubgewinde



$$F_u = F \cdot \tan(\rho + \alpha)$$

$$F_u = F \cdot \tan(\rho - \alpha)$$

Abbildung 82 Kräfte a) beim Anziehen (Heben) b) beim Lösen (Senken)

$$\tan \alpha = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r_{Fl}}$$

Bei einer Schraubverbindung zur Befestigung von Körpern wirkt die Kraft F in der Schraube erst dann, wenn die Oberflächen des Schraubenkopfs und der Mutter auf dem Körper aufliegen. Die Kraft, die einen Körper hält oder mehrere Körper miteinander verbindet, heißt Schraubenlängskraft F . Auf die Mutter und den Schraubenkopf wirkt jeweils die Schraubenlängskraft.

Beim Anzug der Schraube wirken zwei Kräfte gegen das Anzugsmoment M_A . Dies ist zum einen die Kraft aus der Gewindereibung und zum anderen die Kraft aus der Auflagereibung. Hieraus ergibt sich, dass das Anzugsmoment die Summe aus Gewindereibmoment und dem Auflagereibmoment ist.

- Gewindereibmoment: $M_{RG} = F \cdot r_{FI} \cdot \tan(\alpha \pm \rho)$
- Auflagereibmoment: $M_{RA} = F_{RA} \cdot r_a = F \cdot \mu_a \cdot r_a$
- Anzugsmoment: $M_A = M_{RG} + M_{RA}$
 $M_A = F \cdot [r_{FI} \cdot \tan(\alpha \pm \rho) + \mu_a \cdot r_a]$

Da Schrauben genormte Maschinenteile sind (nach DIN und ISO), können die Werte der Gewindesteigung α , der Reibungszahl μ_a und des Reibwinkels ρ aus Tabellenbüchern entnommen werden. Für den Werkstoff Stahl auf Stahl entspricht der Reibwinkel ungefähr $\rho_{\text{Stahl}} \approx 9^\circ$, die Reibungszahl für diesen Werkstoff entspricht ungefähr $\mu_{a\text{Stahl}} \approx 0,15$. Bei einer Sechskantschraube M6 beträgt der Nenndurchmesser des Gewindes $d = 6 \text{ mm}$. Der Auflageradius ist genormt und errechnet sich aus:

$$r_a = 0,7 \cdot d$$

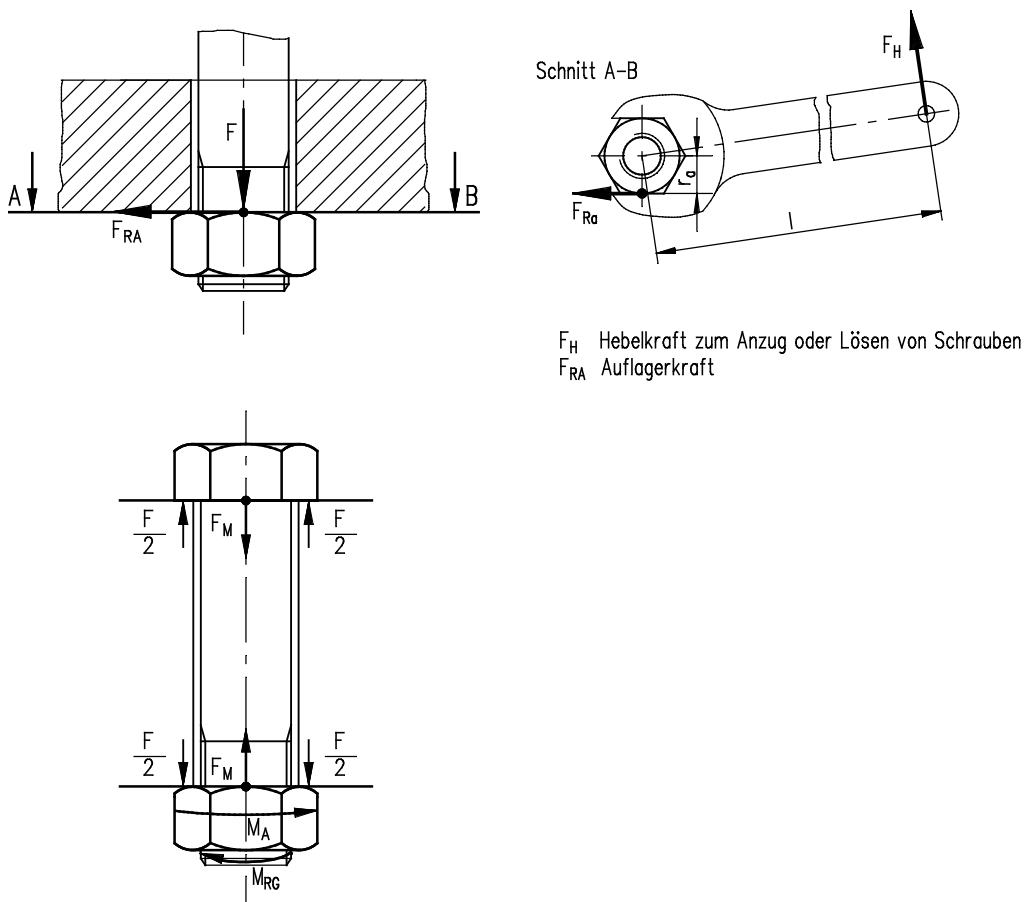


Abbildung 83 Die Schraube

Lehrbeispiel 3

Eine Spindel mit einem ISO-Trapezgewinde M10 (DIN 103) soll eine Treibscheibe mit eingearbeitetem Gewinde anheben. Auf die Treibscheibe mit einem Durchmesser von 600 mm wirkt eine Umfangskraft von $F_u = 500 \text{ N}$. Da es sich um ein Bewegungsgewinde handelt, entspricht das Anzugsmoment lediglich dem Gewindereibmoment. Laut Hersteller sind:

$$r_{Fl} = 4,5 \text{ mm}$$

$$\rho = 4,6^\circ$$

$$P = 2 \text{ mm}$$

Mit welcher Kraft wird die Treibscheibe angehoben?

Lösung

Gegeben: M10

$$F_u = 500 \text{ N}$$

$$d_{\text{Treibscheibe}} = 600 \text{ mm}$$

$$r_{FL} = 4,5 \text{ mm}$$

$$\rho = 4,6^\circ$$

$$P = 2 \text{ mm}$$

Gesucht: F

$$M_A = F_u \cdot \frac{1}{2} \cdot d_{\text{Treibscheibe}} = 500 \text{ N} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,6 \text{ m} = \underline{\underline{150 \text{ Nm}}}$$

$$M_A = M_{RG} = F \cdot r_{FL} \cdot \tan(\alpha + \rho)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r_{FL}}\right) = \arctan\frac{2 \text{ mm}}{2 \cdot \pi \cdot 4,5 \text{ mm}} = \underline{\underline{4,046^\circ}}$$

$$F = \frac{M_A}{r_{FL} \cdot \tan(\alpha + \rho)} = \frac{150 \text{ Nm}}{4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \tan(4,046^\circ + 4,6^\circ)} = \underline{\underline{219215,9 \text{ N}}} = \underline{\underline{219,216 \text{ kN}}}$$

Lehrbeispiel 4

Eine Sechskant-Gewindeschraube M10 aus Stahl soll in ein Werkstück, das ebenfalls aus Stahl besteht, geschraubt werden. Die Gewindesteigung der Schraube beträgt 3° , der Reibungswinkel $\rho_{\text{Stahl}} \approx 9^\circ$, die Reibungszahl $\mu_{\text{Stahl}} \approx 0,15$ und der Flankenradius $r_{Fl} = 4 \text{ mm}$. Das Anzugsmoment beträgt 40 Nm .

Mit welcher Längskraft presst der Schraubenkopf auf den Körper?

Lösung

Gegeben: M10 $\Rightarrow d = 10 \text{ mm}$

$$r_{FL} = 4 \text{ mm}$$

$$\alpha = 3^\circ$$

$$\rho = 9^\circ$$

$$\mu_a = 0,15$$

$$M_a = 40 \text{ Nm}$$

Gesucht: F

$$M_A = F \cdot [r_{FI} \cdot \tan(\alpha + \rho) + \mu_a \cdot r_a]$$

$$r_a = 0,7 \cdot d$$

$$F = \frac{M_A}{r_{FI} \cdot \tan(\alpha + \rho) + \mu_a \cdot 0,7 \cdot d}$$

$$F = \frac{40 \text{ Nm}}{4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \tan(3^\circ + 9^\circ) + 0,15 \cdot 0,7 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = \underline{\underline{21050 \text{ N}}} = \underline{\underline{21,05 \text{ kN}}}$$

Die Rolle

Eine Rolle ist eine einfache Maschine, die sich um ihre eigene Achse dreht. In der Mechanik wird zwischen zwei Rollenarten unterschieden. Ist die Drehachse einer Rolle räumlich fest verankert, so wird von einer **festen Rolle** gesprochen. Liegt die Drehachse der Rolle nicht räumlich fest, so wird von einer **losen Rolle** gesprochen.

Feste Rolle

Eine Rolle mit einem Radius r wird unter eine Decke gehängt und in der Mitte im Zapfen drehbar gelagert. Über der Rolle ist ein Seil gespannt, auf dem Zugkräfte senkrecht nach unten wirken. Sind die Zugkräfte unterschiedlich groß, so entsteht ein Drehmoment im Drehlager und die Rolle wird beschleunigt. Wird an einer Seite des Seils ein Körper gehangen, so ist die Zugkraft in dieser Richtung gleich der Gewichtskraft des Körpers. Die Größe der Zugkraft am anderen Ende des Seils bestimmt, ob der Körper gehoben oder gesenkt wird.

Heben des Körpers: $F_Z > F_G$

Senken des Körpers: $F_Z < F_G$

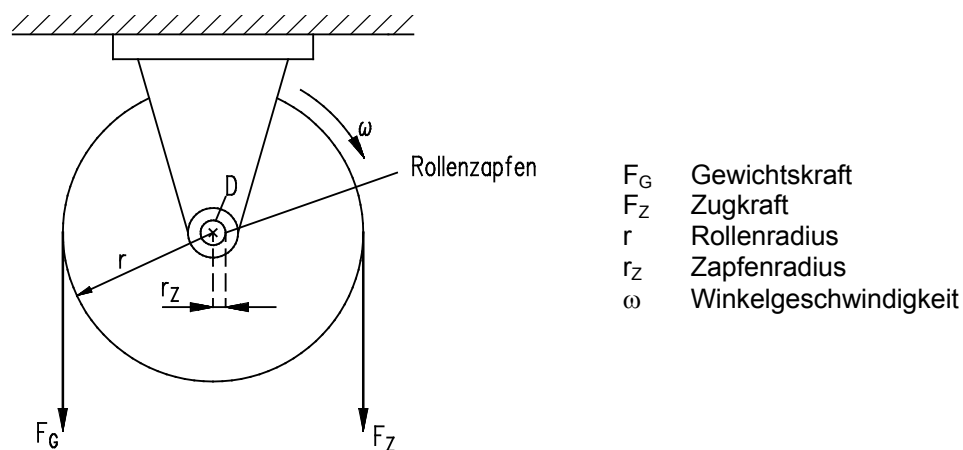


Abbildung 84 Feste Rolle

Bei einer Drehbewegung der Rolle ist die Reibungskraft entgegen der Drehrichtung gerichtet. Die Reibung tritt im Zapfenlager auf. Sie wird verursacht durch die Gewichtskraft des gesamten Systems. Würde die feste Rolle frei gemacht, so müsste die Normalkraft mit der Größe der Gewichtskraft und der Zugkraft im Lager wirken. Das Reibmoment ist somit proportional zur Reibkraft im Lager und dem Radius des Zapfens.

$$M_R = F_R \cdot r_z = F_N \cdot \mu \cdot r_z$$

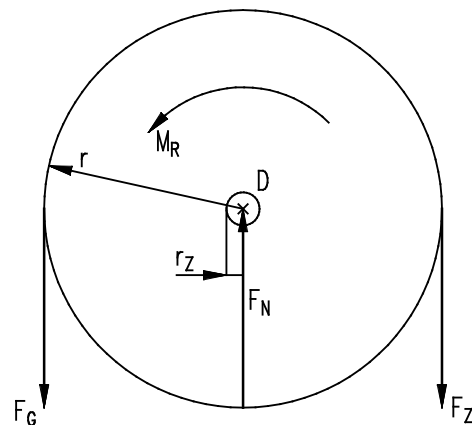


Abbildung 85 Freimachen der festen Rolle

Wird die feste Rolle als eine Aufgabe der Statik betrachtet, so ist die Summe aller Momente gleich Null. Aus dem Momentensatz lässt sich die Zugkraft an der festen Rolle unter Berücksichtigung der Reibung entwickeln.

$$\sum F_y = 0 = -F_G + F_N - F_Z$$

$$\Rightarrow F_N = F_G + F_Z$$

$$\sum M_{(D)} = 0 = F_G \cdot r - F_Z \cdot r + F_R \cdot r_z$$

mit $F_R = \mu \cdot F_N = 2 \cdot \mu \cdot F_G$

$$\Rightarrow F_Z = F_G \cdot \frac{r + 2 \cdot \mu \cdot r_z}{r}$$

Der Wirkungsgrad wird allgemein beschrieben aus der abgegebenen Arbeit zur zugeführten. Wird die Arbeit durch den Ausdruck Kraft mal Weg ersetzt so ergibt sich:

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}}$$

$$\eta_{fR} = \frac{F_G \cdot s}{F_Z \cdot s} = \frac{F_G}{F_Z}$$

Lose Rolle

Ein Körper mit der Masse m hängt an der Achse einer losen Rolle mit der Masse m_R und dem Radius r . Die Rolle wiederum wird von einem Seil gehalten, dessen Zugkräfte in senkrechter Richtung nach oben wirken. Die Gewichtskraft des Körpers und der Rolle verteilt sich auf die Zugkräfte des Seils.

$$F_S = F_Z$$

$$\frac{1}{2} F_G = F_Z$$

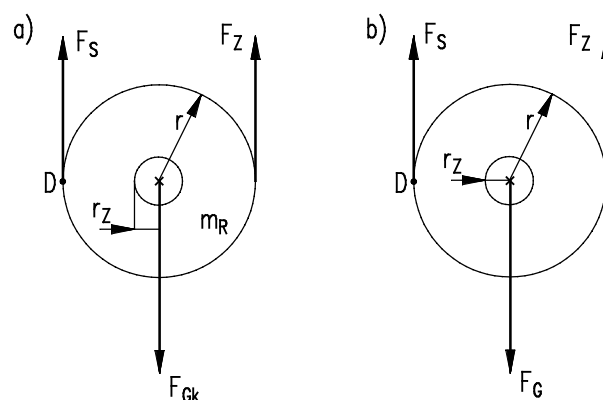


Abbildung 86 a) Lose Rolle b) Freigemachte lose Rolle

Auch hier tritt eine Reibung im Zapfenlager auf, die sich wie folgt berechnet:

$$M_R = F_R \cdot r_z = F_N \cdot \mu \cdot r_z = F_G \cdot \mu \cdot r_z$$

Aus der frei gemachten losen Rolle ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\sum F_y = 0 = F_S - F_G + F_Z$$

$$\Rightarrow F_G = F_S + F_Z$$

$$\sum M_{(D)} = -F_G \cdot r - F_R \cdot r_z + F_Z \cdot 2 \cdot r$$

$$\Rightarrow F_Z = \frac{1}{2} F_G \cdot \frac{\mu \cdot r_z + r}{r}$$

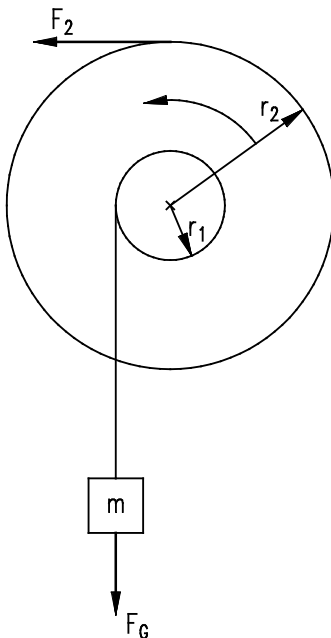
Der Wirkungsgrad des Systems der losen Rolle wird bestimmt aus:

$$\eta_{IR} = \frac{\frac{1}{2} F_G}{F_Z}$$

Das Wellrad

Ein Wellrad wird als eine feste Rolle bezeichnet. Es ist ein im Mittelpunkt reibungsfrei gelagertes Doppelrad, dessen Radien unterschiedlich sind. Das innere Rad hat einen geringeren Radius als das äußere ($r_1 < r_2$). Um das innere Rad ist ein Seil oder ein Band gewickelt, an dem am Ende ein Körper mit der Masse m hängt. Durch die Gewichtskraft des Körpers wirkt eine Kraft auf den Umfang des Rades, die dieses versucht zu beschleunigen. Die Gewichtskraft verursacht ein Drehmoment beim Wellrad.

$$M_1 = F_G \cdot r_1$$



Durch die Verbindung der beiden Räder wirkt das Drehmoment auch auf das äußere größere Rad. Das Drehmoment, das durch den Körper verursacht wurde, ist bei beiden Rädern gleich. Durch die unterschiedlichen Radien ist aber die Umfangskraft des äußeren Rades nicht gleich der Umfangskraft (die Gewichtskraft) des inneren Rades.

$$M_1 = F_1 \cdot r_1 = F_G \cdot r_1$$

$$M_2 = F_2 \cdot r_2$$

$$M_1 = M_2$$

$$\Rightarrow F_G \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

Abbildung 87 Das Wellrad

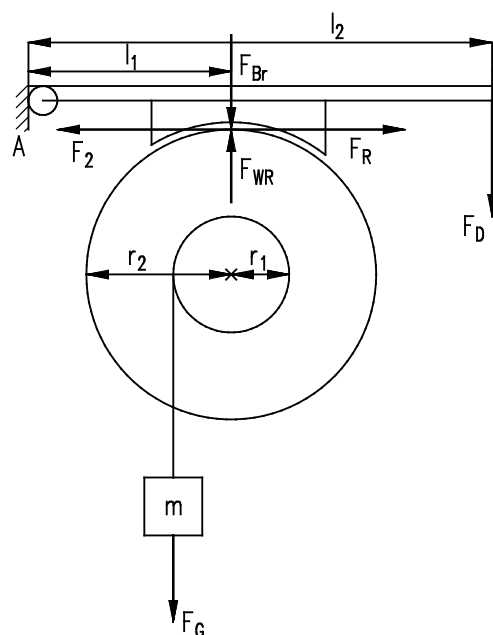
Lehrbeispiel 5

Das abgebildete Wellrad mit den Radien $r_1 = 10 \text{ cm}$ und $r_2 = 30 \text{ cm}$ soll durch eine Bremse im Stillstand gehalten werden. Am inneren Rad des Wellrades hängt an einem Seil ein Körper mit der Masse $m = 100 \text{ kg}$. Die Bremse hat die folgenden Abmessungen:

$l_1 = 40 \text{ cm}$, $l_2 = 80 \text{ cm}$ und Haftreibung $\mu_0 = 0,4$.

Die Gewichtskraft des Seils und des Hebels mit der Bremse ist zu vernachlässigen.

Mit welcher Kraft muss der Hebel nach unten gedrückt werden, damit das Wellrad die Masse des Körpers halten kann?



Gegeben: $r_1 = 10 \text{ cm}$
 $r_2 = 30 \text{ cm}$

$l_1 = 40 \text{ cm}$
 $l_2 = 80 \text{ cm}$

$m = 100 \text{ kg}$
 $\mu_0 = 0,4$

Gesucht: F_D

Lösung

$$F_R = F_2$$

$$F_g \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

$$F_R = \frac{m \cdot g \cdot r_1}{r_2} = \frac{100 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = \underline{\underline{327 \text{ N}}}$$

$$F_{Br} = \frac{F_R}{\mu_0} = \frac{327 \text{ N}}{0,4} = \underline{\underline{817,5 \text{ N}}}$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0 = F_{WR} \cdot l_1 - F_D \cdot l_2$$

$$\Rightarrow F_D = F_{WR} \cdot \frac{l_1}{l_2} = \frac{817,5 \text{ N} \cdot 40 \text{ cm}}{80 \text{ cm}} = \underline{\underline{409 \text{ N}}}$$

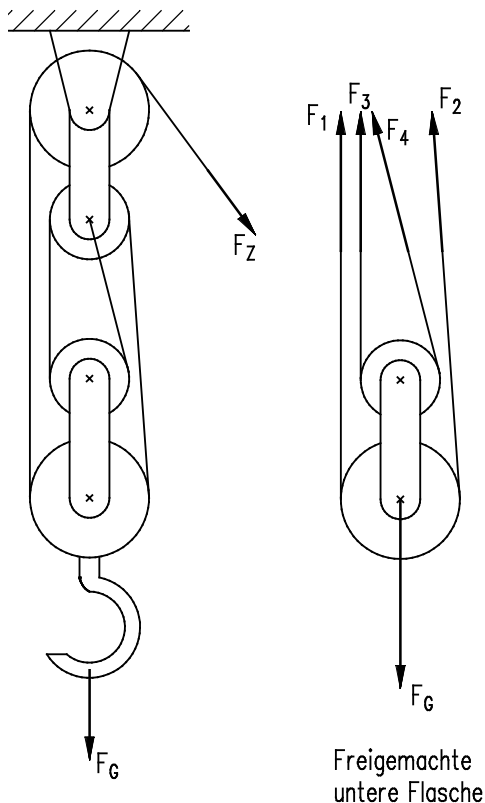
Der Rollenzug

Abbildung 88 Der Rollenzug (Flaschenzug)

Der Rollenzug, in der Technik besser bekannt als Flaschenzug, ist für das Heben und Senken von Lasten entwickelt worden. Er besteht aus einer Anzahl von festen und losen Rollen, die in den so genannten Flaschen gelagert sind.

Die Rollen können sowohl untereinander als auch nebeneinander angeordnet sein. Am Ende der untersten Rolle ist meist ein Haken befestigt, an den Lasten in Form von Körpern mit der Masse m gehängt werden. An der obersten Rolle, die fest an einem Ausleger oder an der Decke befestigt ist, greift über ein Seil oder eine Kette die Zugkraft F_Z .

Nach dem Freimachen der unteren Flasche sind in dem gezeigten Beispiel vier tragende Seilkräfte zu sehen, die zusammen die Gewichtskraft halten. Der Wirkungsgrad aller Rollen ist gleich. Hieraus lässt sich der folgende Zusammenhang zwischen dem Wirkungsgrad und der Zugkraft entnehmen:

$$\begin{aligned}\eta_{R1} &= \eta_{R2} = \eta_{R3} = \eta_{R4} = \eta \\ F_1 &= F_Z \cdot \eta \\ F_2 &= F_1 \cdot \eta = F_Z \cdot \eta^2 \\ F_3 &= F_2 \cdot \eta = F_Z \cdot \eta^3 \\ F_4 &= F_3 \cdot \eta = F_Z \cdot \eta^4\end{aligned}$$

Aus der frei gemachten unteren Flasche soll die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte in y-Richtung entwickelt werden:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - F_G \\ \Rightarrow 0 &= F_Z \cdot (\eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4) - F_G \\ \Rightarrow F_Z &= F_G \cdot \frac{1}{\eta \cdot (1 + \eta + \eta^2 + \eta^3)}\end{aligned}$$

Der Ausdruck $(1 + \eta + \eta^2 + \eta^3)$ lässt sich algebraisch vereinfachen (Polynomdivision).

$$1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 = \frac{1 - \eta^4}{1 - \eta}$$

Hieraus ergibt sich der mathematische Zusammenhang zwischen der Gewichtskraft F_G einer Last, die an einem Rollzug mit vier Rollen hängt und der Zugkraft F_Z .

$$F_Z = F_G \cdot \frac{1 - \eta}{(1 - \eta^4) \cdot \eta}$$

Allgemein beschrieben lautet die Formel zur Berechnung der Zugkraft, die aufgewendet werden muss, um eine Last mit einem Rollenzug zu heben, wie folgt:

$$F_Z = F_G \cdot \frac{1-\eta}{\eta \cdot (1-\eta^n)} = m \cdot g \cdot \frac{1-\eta}{\eta \cdot (1-\eta^n)}$$

Die Größe n ist die Anzahl der tragenden Seil- oder Kettenstränge beim Heben der Last.

Die Arbeit W_{hub} zum Heben und Senken der Last und die aufgewendete Zugarbeit W_{zug} beim Ziehen des Seils werden wie folgt beschrieben:

$$W_{\text{hub}} = F_G \cdot s_G$$

$$W_{\text{zug}} = F_Z \cdot s_Z$$

Wird das System des Rollenzuges ohne Reibung betrachtet, so ist die Hubarbeit gleich der Zugarbeit. Wie am frei gemachten Beispiel in Abbildung 88 zu sehen, teilt sich die Gewichtskraft in vier Seilkräfte auf. Hieraus lässt sich eine direkte mathematische Verbindung zwischen dem zurückgelegten Weg der Last und der Zugkraft erstellen, die so genannte Weggleichung:

$$W_{\text{hub}} = W_{\text{zug}}$$

$$F_G \cdot s_G = F_Z \cdot s_Z$$

$$F_G = n \cdot F_Z$$

$$n \cdot F_Z \cdot s_G = F_Z \cdot s_Z$$

$$n \cdot s_G = s_Z$$

Die Zugarbeit ist bei einem Rollenzugsystem die aufgewendete Arbeit, die in das System von außen eingebracht wird. Die Hubarbeit ist die Arbeit, die das System abgibt. Der Quotient der abgegebenen zur aufgenommenen Arbeit ergibt den Gesamtwirkungsgrad der Rollen.

$$\eta_R = \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}} = \frac{W_{\text{hub}}}{W_{\text{zug}}} = \frac{F_G \cdot s_G}{F_Z \cdot s_Z} = \frac{F_G \cdot s_G}{F_Z \cdot n \cdot s_G}$$

$$\eta_R = \frac{F_G}{n \cdot F_Z}$$

Aus den entwickelten Gleichungen des Wirkungsgrades der Rollen und Zugkraft lässt sich noch eine allgemeine Form zur Berechnung des Rollenwirkungsgrades herleiten:

$$F_Z = \frac{F_G}{n \cdot \eta_R} = F_G \cdot \frac{1-\eta}{\eta \cdot (1-\eta^n)}$$

$$\Rightarrow \eta_R = \frac{F_G}{F_Z} \cdot \frac{\eta \cdot (1-\eta^n)}{n \cdot (1-\eta)} = \frac{\eta \cdot (1-\eta^n)}{n \cdot (1-\eta)}$$

Lehrbeispiel 6

Mit dem Flaschenzug aus Abbildung 88 ($\eta = 0,96$) soll ein Körper mit der Masse von $m = 500 \text{ kg}$ auf eine Höhe von $h = 5 \text{ m}$ gezogen werden.

Berechnen Sie die Zugkraft, die eine Person beim Verrichten dieser Arbeit aufbringen muss!

Welche Seillänge muss die Person dabei ziehen? Wie groß ist die Zugarbeit?

Lösung

Gegeben: $m = 500 \text{ kg}$
 $h = 5 \text{ m}$
 $n = 4$
 $\eta = 0,96$

Gesucht: F_z ; s_z ; W_{zug}

$$F_z = m \cdot g \cdot \frac{1 - \eta}{\eta \cdot (1 - \eta^n)}$$

$$F_z = 500 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1 - 0,96}{0,96 \cdot (1 - 0,96^4)} = \underline{\underline{1357 \text{ N}}}$$

$$s_z = n \cdot s_G = 4 \cdot 5 \text{ m} = \underline{\underline{20 \text{ m}}}$$

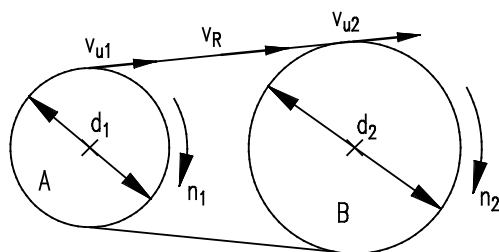
$$W_{\text{zug}} = F_z \cdot s_z = 1357 \text{ N} \cdot 20 \text{ m}$$

$$W_{\text{zug}} = 27140 \text{ Nm} = \underline{\underline{27,14 \text{ kJ}}}$$

Getriebe und Übersetzungen

In der Technik übertragen viele Maschinen Drehbewegungen von der Antriebswelle A auf eine Arbeitswelle B. Die Übertragung erfolgt über eine Kupplung oder ein Getriebe. Sollen Antriebs- und Arbeitswelle mit unterschiedlicher Drehgeschwindigkeit rotieren, so muss zwischen beiden Wellen eine Übersetzung i berücksichtigt werden.

Riemengetriebe



Bei einem Riemengetriebe sind die beiden Wellen mit einem Riemen verbunden, der die Kraft von der Antriebswelle zur Arbeitswelle überträgt. Die Geschwindigkeit des Riemen ist an jedem Punkt gleich. Da aber die Wellen einen unterschiedlichen Durchmesser haben, ist die Drehzahl der Wellen nicht gleich.

Abbildung 89 Riemengetriebe

$$v_{u1} = v_{u2}$$

$$\pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = i$$

Definition

Die Übersetzung i ist der Quotient aus der Antriebsdrehzahl n_{an} zu der Abtriebsdrehzahl n_{ab} . Diese Größe wird ohne Einheiten beschrieben.

$$i = \frac{n_{an}}{n_{ab}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Wird anstatt der Drehzahl die Winkelgeschwindigkeit eingesetzt, so ergibt sich:

$$i = \frac{2 \cdot \pi \cdot \omega_1}{2 \cdot \pi \cdot \omega_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Zahnradgetriebe

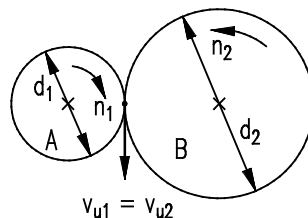


Abbildung 90 Zahnradgetriebe

Werden zwei Scheiben aneinander gepresst, so wird von einem Reibradgetriebe gesprochen. Wird der Umfang der Scheiben verzahnt, so wird von einem Zahnradgetriebe gesprochen. Die Geschwindigkeit an den Berührungsflächen ist gleich.

$$v_{u1} = v_{u2}$$

$$\pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2$$

Miteinander im Eingriff befindliche Zahnräder müssen immer den gleichen Modul haben. Der Modul ist festgelegt durch das Verhältnis $m = \frac{d}{z} = \frac{\text{Durchmesser}}{\text{Zähnezahl}}$.

$$\text{mit } d = z \cdot m$$

$$\pi \cdot z_1 \cdot m \cdot n_1 = \pi \cdot z_2 \cdot m \cdot n_2$$

z : Anzahl der Zähne des Zahnrades

Definition

Bei einem Zahnradgetriebe verhalten sich die Drehzahlen und Winkelgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Durchmesser und die Zähnezahlen der Räder.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Lehrbeispiel 7

Zwei Wellen sind über einen Riemen miteinander verbunden. Die Antriebswelle 1 hat einen Durchmesser von $d_1 = 20 \text{ cm}$ und die Welle 2 einen Durchmesser von $d_2 = 60 \text{ cm}$. Der Riemen bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v = 6 \text{ m/s}$.

- 7.1 Berechnen Sie die Übersetzung der Wellen!
 7.2 Wie groß sind die Umfangsgeschwindigkeiten der Wellen?
 7.3 Wie groß sind Drehzahlen der Wellen?

Lösung

Gegeben: $d_1 = 20 \text{ cm}$
 $d_2 = 60 \text{ cm}$
 $v_R = 6 \text{ m/s}$

Lehrbeispiel 7.1

Gesucht: i

$$i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{60 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 3$$

Lehrbeispiel 7.2

Gesucht: $v_1; v_2$

$$v_R = v_1 = v_2 = \underline{\underline{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Lehrbeispiel 7.3

Gesucht: $n_1; n_2$

$$v_u = d \cdot \pi \cdot n$$

$$n_1 = \frac{v_R}{d_1 \cdot \pi} = \frac{6 \text{ m/s}}{0,2 \text{ m} \cdot \pi} = \underline{\underline{9,55 \frac{1}{\text{s}}}}$$

$$n_2 = \frac{v_R}{d_2 \cdot \pi} = \frac{6 \text{ m/s}}{0,6 \text{ m} \cdot \pi} = \underline{\underline{3,18 \frac{1}{\text{s}}}}$$

Lehrbeispiel 8

Ein Seil mit einer Last ist über eine feste Rolle mit einer Trommel verbunden. Die Trommel wird über ein Getriebe mit der Übersetzung $i = 6$ über eine Kurbel per Hand betrieben.

Die Kurbel hat eine Länge von $l = 20 \text{ cm}$ und es wirkt an ihr eine konstante Kraft von $F = 250 \text{ N}$. Die Trommel, auf die das Seil gewickelt wird, hat einen Radius von $r_R = 0,3 \text{ m}$.

8.1 Wie groß ist die Masse des Körpers, der gehoben werden soll?

8.2 Wie viel Umdrehungen muss die Kurbel gedreht werden, um den Körper auf 5 m zu heben?

Lösung

Gegeben: $i = 6$
 $l = r = 20 \text{ cm}$
 $r_R = 0,3 \text{ m}$
 $F = 250 \text{ N}$
 $h = 5 \text{ m}$

Lehrbeispiel 8.1

Gesucht: m

$$i = \frac{M_2}{M_1} = \frac{M_m}{M_K} \Rightarrow M_m = i \cdot M_K$$

$$M_K = F \cdot r$$

$$M_m = m \cdot g \cdot r_R$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot r_R = i \cdot F \cdot r$$

$$m = \frac{i \cdot F \cdot r}{g \cdot r_R} = \frac{6 \cdot 250 \text{ N} \cdot 0,2 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,3} = \underline{\underline{102 \text{ kg}}}$$

Lehrbeispiel 8.2

Gesucht: u

$$W_{\text{hub}} = W_{\text{Dreh}}$$

$$m \cdot g \cdot h = M_K \cdot \varphi \quad \text{mit } \varphi = 2 \pi \cdot u$$

$$m \cdot g \cdot h = F \cdot r \cdot 2 \cdot \pi \cdot u$$

$$u = \frac{m \cdot g \cdot h}{F \cdot r \cdot 2 \cdot \pi} = \frac{102 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m}}{250 \text{ N} \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 2 \cdot \pi} = \underline{\underline{15,9 \text{ Umdr.}}}$$

Aufgabe 1

Beschreiben Sie den Begriff der Masse m und der Dichte ρ !

Aufgabe 2

Was ist ein Körper?

Aufgabe 3

Beschreiben Sie die Begriffe Atome und Ionen!

Aufgabe 4

Kräfte werden als Vektoren bezeichnet.

Beschreiben Sie die drei Grundeigenschaften, um einen Vektor eindeutig zu bestimmen!

Aufgabe 5

Beschreiben Sie die rechnerische Addition zweier Kräfte!

Aufgabe 6

Zeichnen Sie einen Körper auf einer schiefen Ebene mit dem Winkel α . Zeichnen Sie bitte die Gewichtskraft, Normalkraft, Hangabtriebskraft und die Reibungskraft ein!

Aufgabe 7

Beschreiben Sie den Unterschied zwischen der Haftreibung und der Gleitreibung!

Aufgabe 8

Beschreiben Sie den allgemeinen Hebelsatz!

Aufgabe 9

Skizzieren Sie das Weg- Zeit-, Geschwindigkeits-Zeit- und Beschleunigungs-Zeit-Diagramm für eine

9.1 *gradlinige, gleichförmige Bewegung!*

9.2 *gradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung!*

Aufgabe 10

Beschreiben Sie die potenzielle und die kinetische Arbeit!

Aufgaben

Aufgabe 11

Beschreiben Sie den Energieerhaltungssatz!

Aufgabe 12

Beschreiben Sie die mechanische Leistung und den Wirkungsgrad!

Aufgabe 13

Ein Körper mit einer Masse von $m = 50 \text{ kg}$ steht auf einer schiefen Ebene unter einem Winkel von $\alpha = 20^\circ$.

Bestimmen Sie die Kraft, mit der der Körper senkrecht auf die Fläche drückt und die Hangabtriebskraft!

Aufgabe 14

Wie viel Meter blanken Kupferdrahtes enthält eine Rolle mit einer Gewichtskraft von 5 N , wenn der Durchmesser des Drahtes $0,75 \text{ mm}$ beträgt?

Aufgabe 15

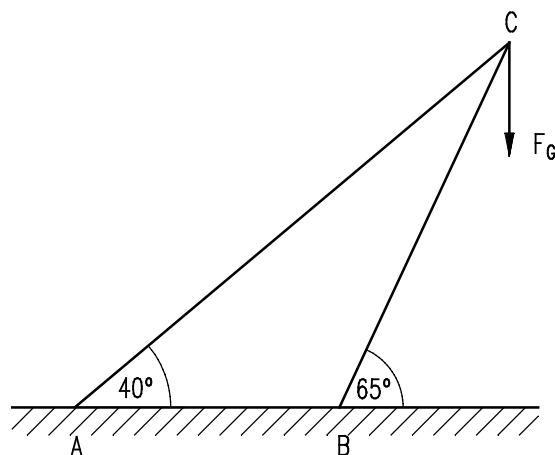
Ein Körper mit einer Masse von $m = 10 \text{ kg}$ wird an ein zwischen zwei Wänden gespanntes Seil gehängt. Der Körper hängt in der Mitte des 18 m breiten Durchgangs. Durch die Belastung des Körpers hängt das Seil 1 m durch.

Wie groß sind die Kräfte in den Seilen?

Aufgabe 16

Die in der Skizze beschriebenen Stangen sind im Punkt C mit einer Kraft von 4 kN belastet.

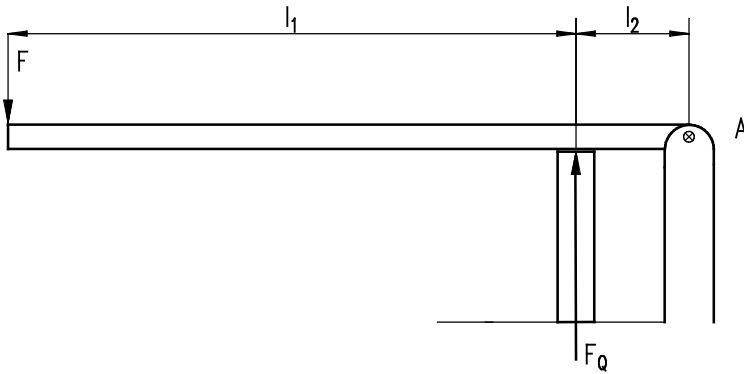
Berechnen Sie die Beträge und die Richtungen der Kräfte in den Punkten A und B!



Aufgabe 17

Wie groß muss die Kraft F sein, damit der im Bild gezeigte Schaltstift Q mit einer Kraft von $F_Q = 1,2 \text{ N}$ niedergedrückt wird? Wie groß ist die Kraft F_A , wenn die Gewichtskraft nicht berücksichtigt wird?

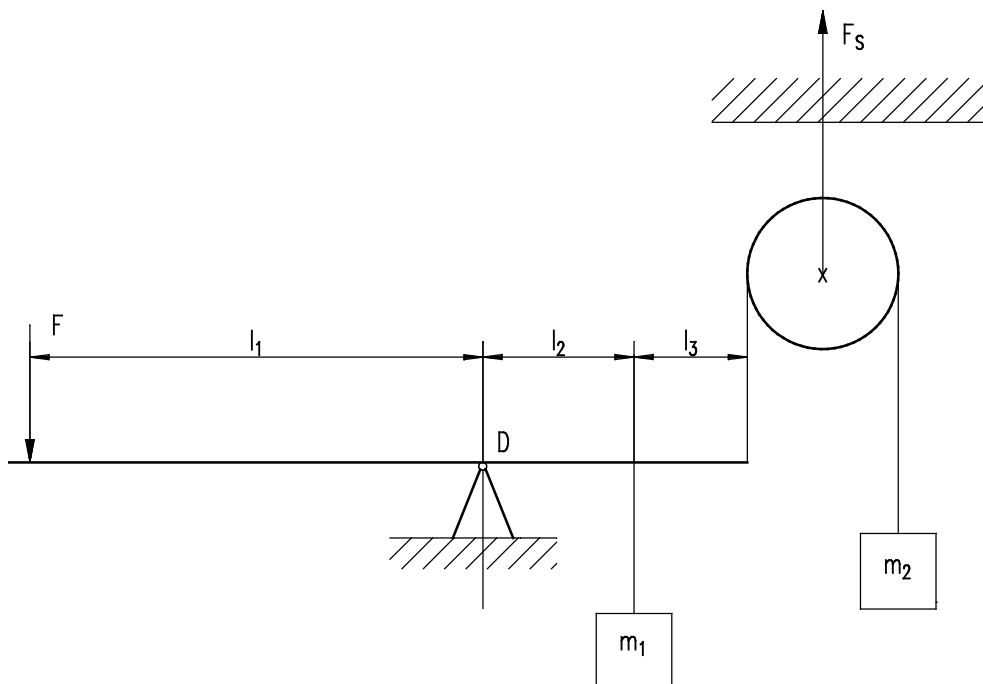
$$l_1 = 75 \text{ mm}; l_2 = 15 \text{ mm}$$

Aufgabe 18

18.1 Berechnen Sie die Kraft F , die erforderlich ist, um den skizzierten Hebel im Gleichgewicht zu halten! Das Gewicht des Hebels und die Reibung der Rolle sollen hierbei nicht berücksichtigt werden!

18.2 Wie groß ist die Kraft F_S bei einer Gewichtskraft der Rolle von 50 N ?

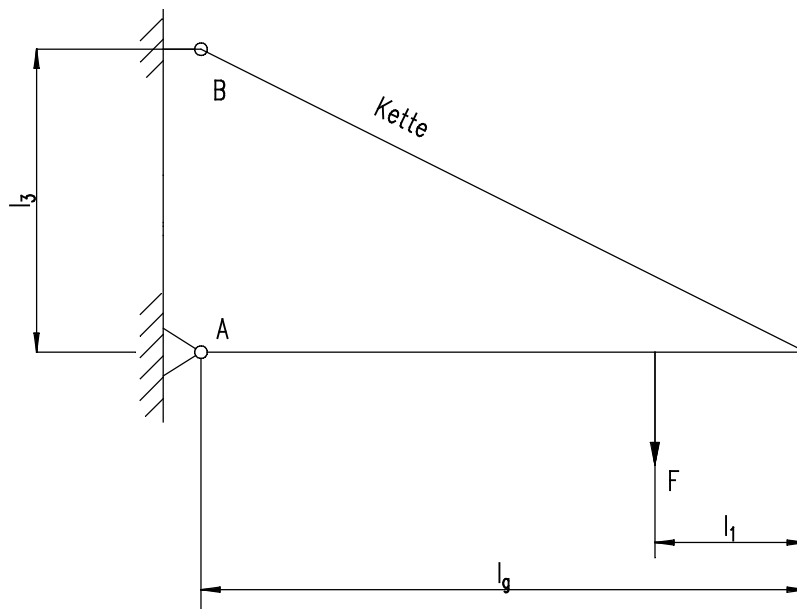
$$m_1 = 50 \text{ kg}; m_2 = 20 \text{ kg}; l_1 = 80 \text{ cm}; l_2 = 30 \text{ cm}; l_3 = 20 \text{ cm}$$



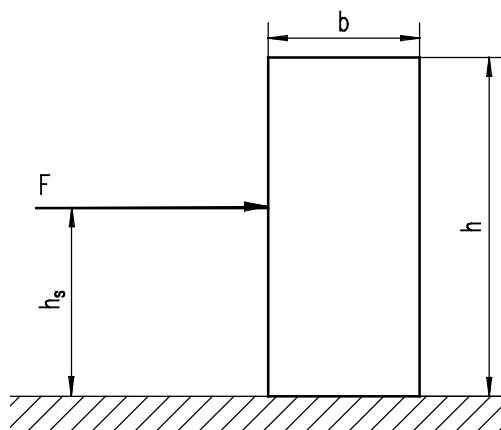
Aufgabe 19

Ein Ausleger mit einer Länge von $l_g = 4 \text{ m}$ wird von einer Kette im Abstand von $l_3 = 2 \text{ m}$ gehalten. Im Abstand von $l_1 = 1 \text{ m}$ von seinem Kopfende trägt der Ausleger eine Last von $F = 6 \text{ kN}$!

Wie groß sind die Kräfte in den Lagern A und B?



Aufgabe 20



Ein Schränk mit dem Schwerpunkt in der Mitte soll durch eine seitlich angreifende Kraft verschoben werden.

Der Schränk hat die Maße von $h = 2,10 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $t = 0,55 \text{ m}$. Die Reibzahlen zwischen der Oberfläche des Fußbodens und des Schränks betragen $\mu_0 = 0,3$ und $\mu = 0,25$.

Der Schränk hat eine Gewichtskraft von $1,2 \text{ kN}$.

20.1 Wie groß ist die Kraft, die zum Anschieben benötigt wird?

20.2 Wie groß ist die Kraft, die aufgewendet werden muss, um den Schränk weiterzuschieben?

20.3 In welcher Höhe h_s darf die Kraft zum Anschieben maximal wirken, damit der Schränk rutscht und nicht kippt?

20.4 Wie groß ist die Arbeit, die beim Verschieben des Schränks um eine Strecke von $s = 4 \text{ m}$ aufgewendet werden muss?

Aufgabe 21

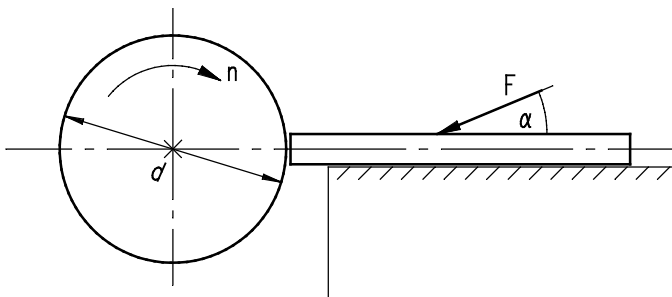
Ein Holzstab steht auf einer waagerechten Fläche und lehnt schräg gegen eine Wand.

Wie groß darf bei einer Haftreibung von $\mu_0 = 0,2$ der Winkel zwischen Boden und Stange maximal sein, damit der Stab nicht rutscht?

Hinweis: Es soll angenommen werden, dass die Gewichtskraft in der Mitte des Stabes angreift.

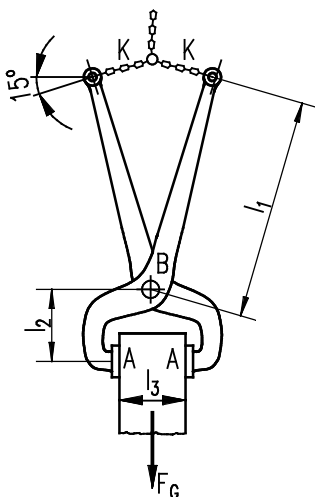
Aufgabe 22

Eine Schleifscheibe mit einem Durchmesser von $d = 35 \text{ mm}$ läuft bei Nennbetrieb mit einer Drehzahl von $n = 1400 \text{ 1/min}$. Ein flaches Werkstück soll mit einer Kraft von $F = 250 \text{ N}$ unter dem Winkel $\alpha = 20^\circ$ gegen die Schleifscheibe gedrückt werden. Die Reibzahl zwischen Werkstück und Werkstisch beträgt $\mu_T = 0,2$ und zwischen Werkstück und Schleifscheibe $\mu_D = 0,6$.



22.1 Wie groß ist die Normalkraft zwischen Werkstück und Werkstisch?

22.2 Wie groß ist die Normalkraft zwischen Werkstück und Schleifscheibe?

Aufgabe 23

Mit einer Blockzange sollen Stahlblöcke mit einer Gewichtskraft von $F_G = 12 \text{ kN}$ transportiert werden. Die Gewichtskraft der Blöcke soll nur mit der Reibkraft zwischen den Zangenbacken und dem Block gehalten werden. Die Haftreibung beträgt $\mu_0 = 0,3$. Die Ketten bilden einen rechten Winkel zu den Zangenhebeln. Die Zange hat die folgenden Abmaße:

$$l_1 = 100 \text{ cm}$$

$$l_2 = 30 \text{ cm}$$

$$l_3 = 30 \text{ cm}$$

$$\alpha = 15^\circ$$

23.1 Wie groß sind die Kräfte in den Ketten K, wenn das Eigengewicht der Zange vernachlässigt werden kann?

23.2 Wie groß sind die Normalkräfte in den Backen A?

23.3 Wie groß ist die maximale Reibungskraft an den Haltebacken?

Aufgabe 24

Ein Fahrzeug erhöht seine Geschwindigkeit durch gleichförmiges Beschleunigen von $v_1 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $t = 3 \text{ s}$.

24.1 *Wie groß ist die mittlere Beschleunigung?*

24.2 *Welche Wegstrecke hat das Fahrzeug während des Beschleunigungsvorgangs zurückgelegt?*

Aufgabe 25

In welcher kürzesten Zeit kann ein Körper eine Wegstrecke von $s = 2 \text{ km}$ zurücklegen, wenn seine Beschleunigung die Größe von $a = 20 \text{ m/s}^2$ nicht überschreiten darf? Die Geschwindigkeit soll zu Beginn und am Ende der Wegstrecke $v_A = v_E = 0 \text{ km/h}$ betragen!

Aufgabe 26

Eine Kugel fällt von einer Brücke ins Wasser. Die Flugzeit wurde mit $t = 4,25 \text{ s}$ gestoppt.

Berechnen Sie die Höhe der Brücke bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes!

Aufgabe 27

Ein Körper mit der Masse von 1 kg wird vertikal nach oben geworfen und ist nach einer Zeit von $t = 6 \text{ s}$ zur Ausgangshöhe zurückgekehrt. Der Luftwiderstand ist während des Fluges zu vernachlässigen.

27.1 *Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit?*

27.2 *Wie groß ist die maximale Flughöhe die der Körper erreicht hat?*

Aufgabe 28

Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit eines Sekundenzeigers einer Uhr?

Aufgabe 29

Bei einem Test einer Pistole wird eine Kugel abgeschossen. Die Abschussgeschwindigkeit beträgt $v_0 = 50 \text{ m/s}$ und die Kugel startet ihre Flugbahn unter einem Winkel von $\alpha = 60^\circ$ zur Horizontalen (Abschusshöhe = Auftreffhöhe).

29.1 *Wie groß ist die Flugweite des Geschosses, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden soll?*

29.2 *Wie hoch fliegt das Geschoss maximal?*

29.3 *Wie groß ist die Einschlaggeschwindigkeit?*

Aufgabe 30

Ein Körper mit einer Masse von $m = 1 \text{ kg}$ wird mit einer kinetischen Energie von $W_{\text{kin}} = 40 \text{ J}$ senkrecht nach oben geworfen. Der Flug soll als reibungsfrei betrachtet werden.

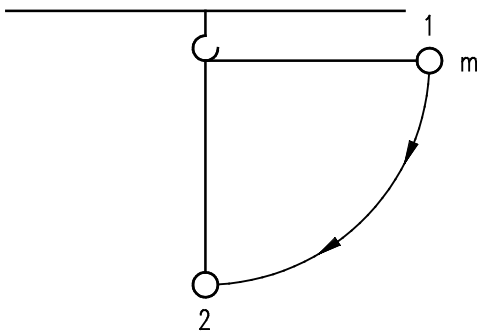
30.1 Wie groß ist die maximale Flughöhe, die der Körper erreicht?

30.2 Wie groß ist die kinetische und die potenzielle Energie auf halber Flughöhe?

Aufgabe 31

Ein Körper mit einer Masse von $m = 1 \text{ kg}$ wird senkrecht nach oben geworfen. Unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes erreicht der Körper eine Endhöhe von 8 m .

Wie groß ist die kinetische Energie des Körpers in einer Höhe von $h = 6 \text{ m}$ beim Anstieg und beim Fall?

Aufgabe 32

Eine Kugel ist an einem Faden mit einer Länge von $l = 2 \text{ m}$ aufgehängt. Die Kugel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Position 1 und wird dann losgelassen.

Berechnen Sie mit dem Energieerhaltungssatz die Geschwindigkeit v_2 im Punkt 2 bei Vernachlässigung der Luftreibung!

Aufgabe 33

Ein Kran soll einen Körper mit der Masse $m = 150 \text{ kg}$ bei einer Geschwindigkeit von $v = 1 \text{ m/s}$ heben.

Welche Leistung muss der Hubmotor bei einem Gesamtwirkungsgrad der Anlage von 65% aufnehmen?

Lernbereich

3 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

Ein definierter Körper besteht aus einer sehr großen, aber absoluten Anzahl von Atomen oder Molekülen (Teilchen). Zwischen diesen Teilchen herrschen anziehende oder abstoßende Kräfte, auf Grund der Energien, die in Form von Elektrostatik in ihnen gespeichert sind. Animiert durch die Kraftwirkungen versuchen sich die Teilchen zu binden. Hierbei werden auf Grund der Wirkungsweisen der Kräfte vier Bindungstypen unterschieden:

- **Van-der-Waalssche Bindung**
Sehr geringe Bindungsenergie, sie tritt bei Gasen, wie zum Beispiel Wasserstoff H_2 und Sauerstoff O_2 , auf.
- **Ionenbindung**
Mittlere bis starke Bindungsenergie, wie zum Beispiel bei Natriumchlorid $NaCl$.
- **Kovalente Bindung**
Mittlere Bindungsenergie, sie tritt bei organischen Stoffen auf, wie zum Beispiel Methan CH_4 und Kohlenstoff C .
- **Metallische Bindung**
Mittlere Bindungsenergie, wie zum Beispiel bei Metallen und Legierungen.

Bei einem Körper im festen Aggregatzustand sind die Anziehungskräfte zwischen den Atomen oder Molekülen so stark, dass sie eine räumlich feste Gitterstruktur miteinander eingehen. Diese Form wird **kristalline Struktur** genannt. Bei mikroskopischer Betrachtung oder durch Röntgen der Kristalle lassen sich aber schon Unterschiede bei einigen Gitterstrukturen erkennen. Es gibt insgesamt sieben Gitterstrukturen.

kubisch $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	tetragonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	orthorhombisch $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	hexagonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$	rhomboedrisch $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	monoklin $a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ$ $\beta \neq 90^\circ$	triklin $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ; \neq 120^\circ$

Abbildung 91 Gitterstrukturen von kristallinen Verbindungen

Soll ein fester Körper verformt werden, so müssen auf Grund der sehr hohen Bindungsenergie erhebliche Kräfte von außen auf den Körper wirken, um die Gitterstruktur der Atome oder Moleküle zu verändern.

Definition:

Festkörper haben ein bestimmtes Volumen und eine bestimmte Form. Bei Formänderungen und Volumenänderung zeigen sie einen großen Widerstand.

Im Gegensatz dazu ist das Verschieben der Teilchen bei Flüssigkeiten ohne große Krafteinwirkung möglich. Soll die Form einer Flüssigkeit sich ändern, so ist aber auch hier ein Widerstand oder eine Zähigkeit zu bemerken, die so genannte **Viskosität**. Der Widerstand zur Verformung von Flüssigkeiten vergrößert sich aber bei einer Volumenänderung des Körpers sehr. Der Abstand der Atome oder Moleküle bei Flüssigkeiten ist vergleichbar mit dem Abstand der Teilchen bei Feststoffen.

Beispiel:

Taucht eine Person einen Finger ins Wasser, so verspürt sie beim Eintauchen keinen Widerstand. Springt eine Person von einem Sprungturm ins Wasser, so bemerkt sie doch einen Widerstand des Wassers. Dies ist zum einen die Berührung und zum anderen das Abbremsen der Fallgeschwindigkeit.

Definition:

Flüssigkeiten haben keine bestimmte Form, aber ein bestimmtes Volumen. Sie zeigen einen kleinen Widerstand gegen Formänderungen, aber einen großen Widerstand gegen Volumenänderungen.

Gase haben ein völlig anderes Verhalten. Auf Grund der geringen Bindungsenergie haben sie weder eine feste Form noch ein bestimmtes Volumen. Die Gasteilchen sind leicht zu verschieben und für eine Volumenänderung braucht keine große Kraft aufgewendet zu werden, mit Ausnahme extrem großer Volumenänderungen.

Definition:

Gase haben kein bestimmtes Volumen und keine bestimmte Form. Bei Formänderungen und mittlerer Volumenänderung zeigen sie kaum Widerstand.

3.1 Allgemeine Eigenschaften der Flüssigkeiten

Nachfolgend werden die Eigenschaften von ruhenden Flüssigkeiten beschrieben. Hierfür gilt der Oberbegriff **Statik der Flüssigkeiten oder Hydrostatik**. Eine Kenngröße für die Beanspruchung der Teilchen eines Körpers durch eine Kraft ist die Spannung S .

Beispiel:

Ein Rundstab mit der Fläche A_1 wird senkrecht auf die Oberfläche eines Körpers mit der Kraft F gedrückt. Wird der Rundstab mit gleicher Kraft F aber mit verringerter Berührungsfläche A_2 auf die Oberfläche gedrückt, so dringt der Körper tiefer in die Fläche ein als beim ersten Versuch. Hieraus folgt, dass die Spannung S eines Körpers abhängig ist von der Kraft und der Berührungsfläche.

$$S = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

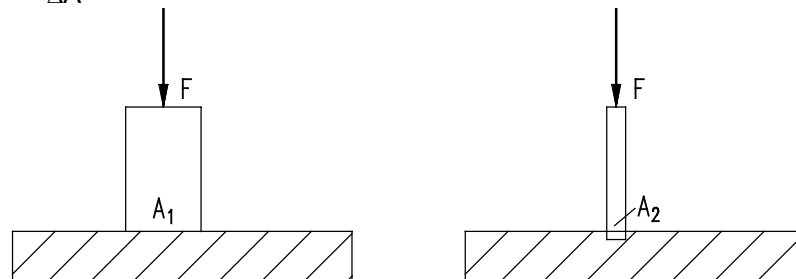


Abbildung 92 Rund drückt auf Oberfläche

Auf Grund der leichten Verschiebung der Atome oder Moleküle bei Flüssigkeiten wird bei der Beanspruchung der Teilchen durch eine Kraft F nicht von der Spannung gesprochen. Es wurde hieraus die physikalische Größe des Drucks definiert.

Definition:

Der Druck p ist die je Flächeneinheit A von außen oder von innen auf eine Flüssigkeit wirkende senkrechte Kraft F . Sie errechnet sich aus dem Quotienten der wirkenden Kraft pro Flächeneinheit. Die SI-Einheit des Drucks ist Newton pro Quadratmeter oder Pascal (Pa).

$$p = \frac{F}{A}$$

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \quad \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2}$$

Die Einheit des physikalischen Drucks p ist nach dem französischen Physiker B. Pascal (1623 bis 1662) benannt. Eine weitere, etwas ältere Einheit für die Beschreibung des Drucks ist bar. Die Umrechnung hierfür lautet:

$$p = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \quad (\text{entspricht etwa der Gewichtskraft von } 1 \text{ kg auf } 1 \text{ cm}^2)$$

$$p = 1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar}$$

Der Luftdruck der Erde entspricht in etwa $p_{\text{Erde}} \approx 1 \text{ bar}$.

Lehrbeispiel 1

Wie groß ist der Druck, den eine Kraft von $F = 200 \text{ N}$ erzeugt, wenn die Wirkfläche $A = 100 \text{ cm}^2$ beträgt?

Lösung

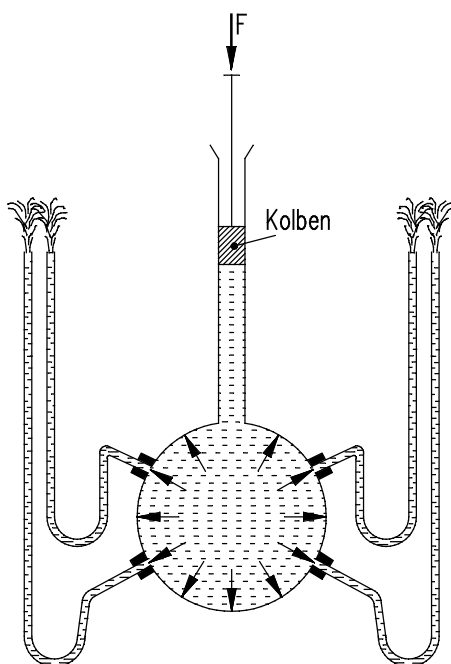
Gegeben: $F = 200 \text{ N}$
 $A = 100 \text{ cm}^2$

Gesucht: p

$$p = \frac{F}{A} = \frac{200 \text{ N}}{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = \underline{\underline{20000 \text{ Pa} = 20 \text{ kPa}}}$$

Eigenschaften von Flüssigkeiten:

Wird ein Behälter mit einer ruhenden Flüssigkeit betrachtet, so ist festzustellen, dass die Oberfläche der Flüssigkeit horizontal und eben ist.

Versuch 1:

An einem mit Wasser gefüllten Gefäß nach Abbildung 93 sind an verschiedenen Stellen Öffnungen eingebracht worden, aus denen Glasrohre ragen. In einem größeren Rohr in der Mitte steckt ein Kolben. Wirkt eine Kraft F auf den Kolben, übt dieser einen Druck auf das Wasser aus. Durch den Druck des Kolbens steigt das Wasser in allen Rohren gleich stark an. Hieraus kann gefolgert werden, dass die Kraft, mit der das Wasser an die innere Fläche des Kolbens drückt, an jeder Stelle gleich groß ist. Der Grund hierfür ist die leichte Verschiebbarkeit der Wassermoleküle.

Abbildung 93 Versuch 1

Der Physiker Pascal formulierte aus diesem Versuch das Druck-Ausbreitungsgesetz.

Definition:

Der Druck, der auf eine Flüssigkeit ausgeübt wird, pflanzt sich in der Flüssigkeit nach allen Richtungen gleich groß fort.

Kompressibilität

Eine Druckerhöhung auf Flüssigkeiten bewirkt eine Volumenverringern. Die Flüssigkeit wird zusammengedrückt. Die Volumenänderung ist proportional der Druckänderung. Um die Volumenänderung bestimmen zu können, muss eine Proportionalitätskonstante berücksichtigt werden, die so genannte **Kompressibilität κ** .

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p$$

Durch die Volumenänderung der Flüssigkeit erfolgt auch eine Änderung der Dichte ρ , da sich die Masse des Körpers nicht ändert.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\Delta \rho = -m \cdot \frac{\Delta V}{V^2} = -\rho \frac{\Delta V}{V}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \kappa \cdot \Delta p$$

Die Kompressibilität κ von Flüssigkeiten ist sehr gering. Daraus folgt, dass erst bei großer Druckerhöhung eine kleine Volumenänderung zu erkennen ist. Flüssigkeiten können somit näherungsweise als inkompressibel bezeichnet werden.

Die leichte Verschiebung von Flüssigkeitsmolekülen und die damit verbundene Formänderung sowie ihre annähernde Inkompressibilität wird in der Technik für die räumliche Kraftübertragung (Hydraulik) ausgenutzt. Der hydraulische Hebebock ist hierfür ein Beispiel.

Hydraulischer Hebebock

An einem vollständig mit Wasser gefüllten Gefäß sind zwei Zylinder angeschlossen, in denen jeweils ein Kolben gleitet. Die Kolbenfläche A_1 und A_2 sind unterschiedlich. Der Druck in dem abgeschlossenen System des Wassers ist überall gleich.

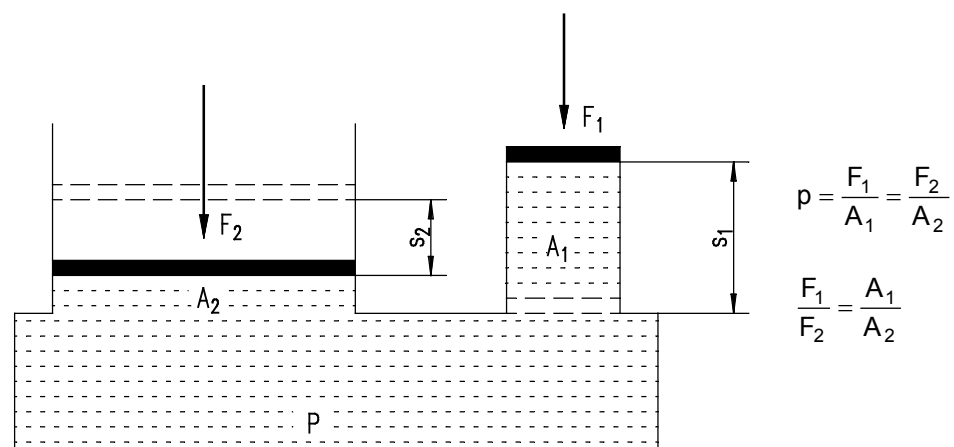


Abbildung 94 Hydraulischer Hebebock

Drückt auf den Kolben 1 eine Kraft F_1 , so treibt die Kraft, bei konstanten Druck, den Kolben 1 um die Strecke s_1 nach unten. Hierbei verdrängt der Kolben eine bestimmte Menge V an Wasser.

$$V_1 = A_1 \cdot s_1$$

Da sich wie beschrieben der Druck im Gefäß nicht ändert, treibt der Kolben die Menge V des Wassers in den zweiten Kolben.

$$V_2 = A_2 \cdot s_2$$

Unter Berücksichtigung, dass die Volumen des bewegten Wassers bei konstantem Druck im Kolben 1 und 2 gleich sind, lässt sich auch hieraus das Druck-Ausbreitungsgesetz entwickeln.

$$V_1 = V_2$$

$$A_1 \cdot s_1 = A_2 \cdot s_2$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Wirkt auf einen Kolben mit einem kleinen Durchmesser eine Kraft, so ist er in der Lage auf einen Lastkolben mit einem größeren Durchmesser eine größere Last zu tragen.

Ist die Kolbenfläche kreisrund, so ergibt sich hieraus:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{d_2^2 \cdot \pi}{4}}{\frac{d_1^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

Auch bei diesem System findet der Energieerhaltungssatz seine Anwendung. Unter Berücksichtigung, dass keine Reibungskräfte auf das System wirken, kann gefolgert werden: Die Arbeit W , die vom Treibkolben verrichtet wird, ist gleich der Arbeit, die der Lastkolben verrichtet.

$$W = W_1 = W_2$$

$$W = F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

Gefäße, bei denen Flüssigkeit von einem in das andere fließen kann, heißen kommunizierende Röhren. Haben die Röhren eine unterschiedliche Form und Volumen, so ist die Flüssigkeitshöhe h in jedem Rohr trotzdem gleich groß, wenn auf sie der gleiche Außendruck wirkt. Die Außendrucke verhalten sich umgekehrt proportional wie die Füllstandshöhe.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

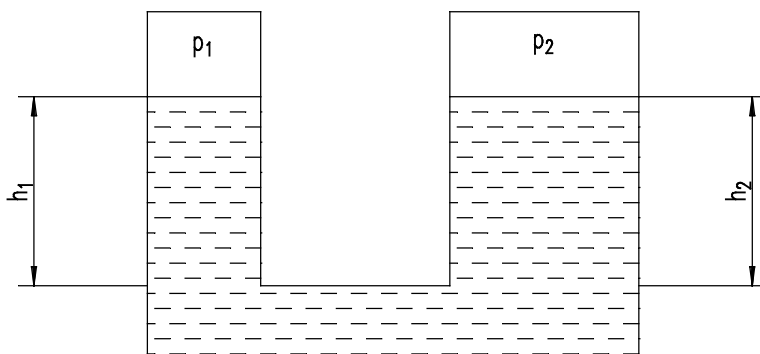


Abbildung 95 Kommunizierende Röhren

Beispiel hierfür ist ein Füllstandsmesser, bei dem an der parallelgeführten Messröhre der Füllstand des Kessels abzulesen ist oder die Schlauchwasserwaage, mit der gleiche Höhen auch über eine große Differenz abzumessen sind.

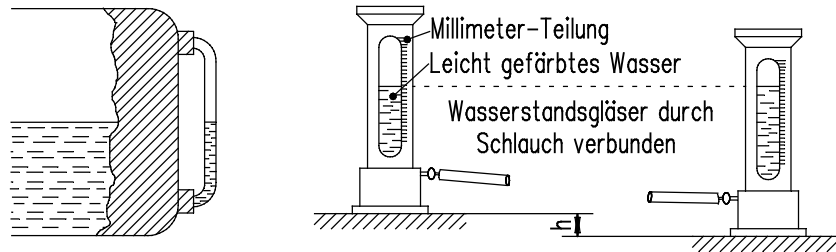


Abbildung 96 Füllstandsanzeige

Schlauchwasserwaage

Lehrbeispiel 2

In einem hydraulischen Hebebock, wie in Abbildung 94 beschrieben, wirkt eine Treibkraft auf den Kolben 1 von $F_1 = 1 \text{ kN}$. Hiermit soll eine Last von $F_2 = 60 \text{ kN}$ im zweiten Kolben um eine Höhe von $s_2 = 1 \text{ m}$ angehoben werden.

- 2.1 Wie groß sind die Durchmesser der kreisrunden Kolben, wenn in dem Gefäß des Hebebocks ein Druck von $p = 40 \text{ bar}$ herrscht?
- 2.2 Welche Strecke muss Kolben 1 gedrückt werden?
- 2.3 Welche Übersetzung hat der Hebebock?
- 2.4 Wie groß ist die Arbeit, die beim Heben der Last verrichtet wird?

Lösung

Gegeben: $F_1 = 1 \text{ kN}$
 $F_2 = 60 \text{ kN}$
 $s_2 = 1 \text{ m}$
 $p = 40 \text{ bar}$

Lehrbeispiel 2.1

Gesucht: d_1 ; d_2

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$p = \frac{F}{A}$$

$$\Rightarrow A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{F}{p}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot p}}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi \cdot 40 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}$$

$$\underline{\underline{d_1 = 17,84 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 17,84 \text{ mm}}}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi \cdot 40 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}$$

$$\underline{\underline{d_2 = 0,1382 \text{ m} = 138,2 \text{ mm}}}$$

Lehrbeispiel 2.2

Gesucht: s_1

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{s_2}{s_1}$$

$$\Rightarrow s_1 = s_2 \cdot \frac{F_2}{F_1} = 1 \text{ m} \cdot \frac{60 \text{ kN}}{1 \text{ kN}}$$

$$\underline{\underline{s_1 = 60 \text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 2.3

Gesucht: i

$$i = \frac{F_2}{F_1} = \frac{60 \text{ kN}}{1 \text{ kN}} = \underline{\underline{60}}$$

Lehrbeispiel 2.4

Gesucht: W

$$W = F_2 \cdot s_2$$

$$W = 60 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{W = 60 \text{ kNm} = 60 \text{ kJ}}}$$

Lehrbeispiel 3

Der Hebel einer handbetriebenen hydraulischen Presse, wie in Abbildung 97 beschrieben, hat die Länge von $a = 90 \text{ cm}$. Die Stange des Pumpenkolbens ist $b = 15 \text{ cm}$ vom Drehpunkt des Systems entfernt. Der Durchmesser des Pumpenkolbens beträgt $d_1 = 45 \text{ mm}$ und der des Presskolbens beträgt $d_2 = 400 \text{ mm}$.

- 3.1 Welche Kraft wirkt am Presskolben, wenn am Handgriff des Hebels eine Kraft von $F = 140 \text{ N}$ wirkt?
- 3.2 Um wie viel hebt sich der Presskolben, wenn der Handgriff 70 mal um 18 cm nach unten bewegt wird?

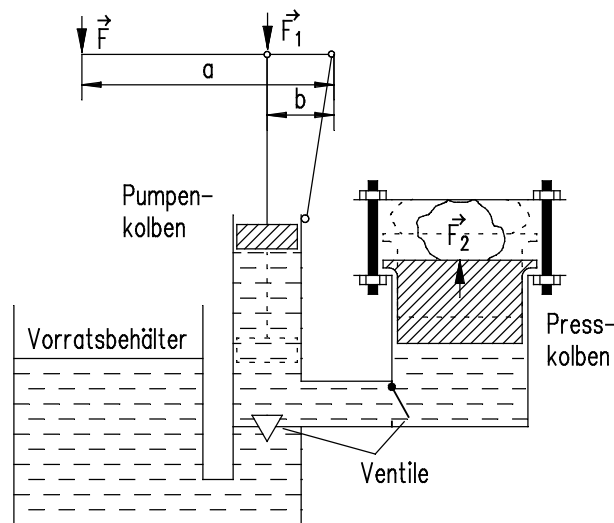


Abbildung 97 Hydraulische Presse

Lösung

Gegeben: $a = 90 \text{ cm}$ $F = 140 \text{ N}$
 $b = 15 \text{ cm}$
 $d_1 = 45 \text{ mm}$ $Z = 70$
 $d_2 = 400 \text{ mm}$ $h = 18 \text{ cm}$

Lehrbeispiel 3.1

Gesucht: F_2

$$F_1 \cdot b = F \cdot a$$

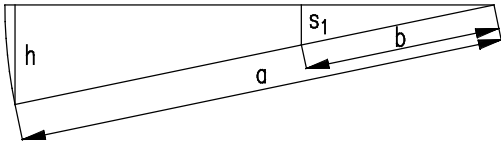
$$F_1 = F \cdot \frac{a}{b} = 140 \text{ N} \cdot \frac{90 \text{ cm}}{15 \text{ cm}}$$

$$F_1 = 840 \text{ N}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2} = 840 \text{ N} \cdot \frac{(400 \text{ mm})^2}{(45 \text{ mm})^2}$$

$$F_2 = 66370 \text{ N} = 66,37 \text{ kN}$$

Lehrbeispiel 3.2Gesucht: h_2 

$$\frac{s_1}{h} = \frac{b}{a} \quad (\text{Strahlensatz})$$

$$s_1 = h \cdot \frac{b}{a} = 18 \text{ cm} \cdot \frac{15 \text{ cm}}{90 \text{ cm}} = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{s_2}{s_1}$$

$$s_2 = s_1 \cdot \frac{F_1}{F_2} = 3 \text{ cm} \cdot \frac{840 \text{ N}}{66,37 \cdot 10^3 \text{ N}}$$

$$s_2 = 0,038 \text{ cm} = 0,38 \text{ mm}$$

$$h_2 = Z \cdot s_2 = 70 \cdot 0,38 \text{ mm}$$

$$\underline{\underline{h_2 = 26,6 \text{ mm}}}$$

Weitere Beispiele für einen hydraulischen Hebebock sind die Hebebühne für Kraftfahrzeuge und die Trommelbremse bei einem Auto (Abbildung 98). Auch hier wird die Kraft durch die Flüssigkeit übertragen. Durch den Flächenunterschied in den Kolben wird die Kraft in den Nuttzylinder (Hebebühne und Bremszylinder) vergrößert.

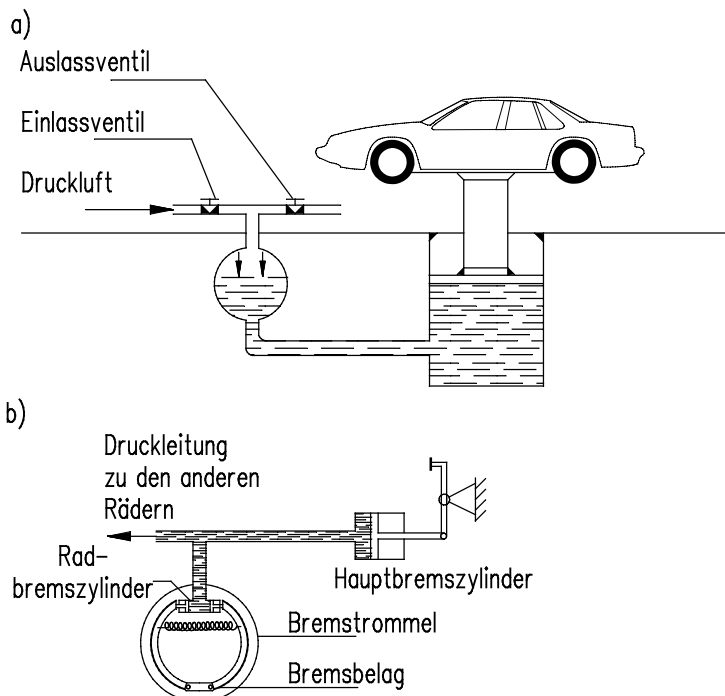


Abbildung 98 a) KFZ- Hebebühne b) Trommelbremse beim PKW

Druckkraft auf gewölbte Böden und Rohrleitungen

In einem zylindrischen Kessel herrscht ein Überdruck. Es wirken Kräfte auf die Außenhaut des Kessels, die in jedem Punkt gleich groß sind. Die Größe der Wölbung einer Seite geht nicht in die Berechnung der Kraft, die auf die Wand wirkt, ein.

$$F_1 = F_2 = F = p \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2$$

Die Kraft, die in radialer Richtung auf die Wand eines Kessels oder eines Rohrs wirkt, ist ebenfalls nicht abhängig von der Wölbung. Die gewölbte Wandung kann als rechteckige Fläche projiziert werden, mit den Seitenlängen d (Durchmesser des Kessels oder Rohrs) und l (Kessel- oder Rohrlänge).

$$F = p \cdot d \cdot l$$

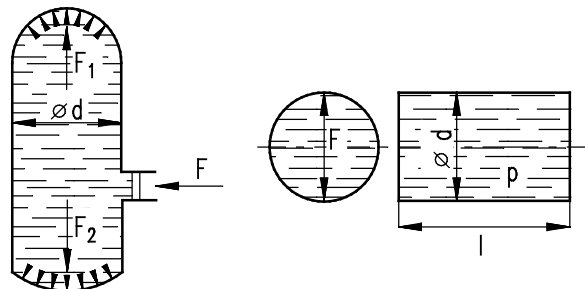


Abbildung 99 Druckkraft auf gewölbte Flächen

Die Volumenänderung einer Flüssigkeit ist durch eine Temperaturänderung zu erreichen. Sie ist proportional der Temperaturänderung und in Abhängigkeit zu einem Proportionalitätsfaktor. Der Faktor ist der Volumenausdehnungskoeffizient γ (bzw. β) mit der Maßeinheit $1/K$.

Physikalische Größen mit dem Index 0 sagen aus, dass sich die Größen auf den Temperaturwert von 273 K oder 0 °C beziehen.

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \cdot \Delta \vartheta$$

Druckverteilung

Schweredruck

Bei den bis jetzt gewonnenen Erkenntnissen wurde davon ausgegangen, dass eine von außen wirkende Kraft einen Druck in einer Flüssigkeit erzeugt. Es wurde gesagt, dass der Druck innerhalb einer Flüssigkeit überall gleich ist. Dies ist aber nicht korrekt. Je tiefer ein Körper in eine Flüssigkeit eintaucht, umso größer ist der Druck, der auf ihn wirkt. Die Druckvergrößerung ist auf Grund der Gewichtskraft der Flüssigkeit zu erklären.

Definition:

Der Druck in jeder waagerechten Fläche einer Flüssigkeit ist konstant. Auf Grund der eigenen Gewichtskraft der Flüssigkeit ändert sich der Druck bei einer Höhenänderung. Der Druck, der seine Ursache aus der eigenen Gewichtskraft hat, wird Schweredruck genannt.

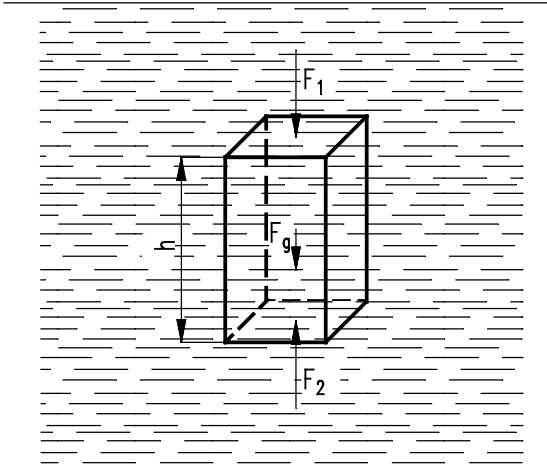


Abbildung 100 Schweredruck

Die statische Gleichgewichtsbedingung des Kräftesystems in Abbildung 100 auf ein Flächenstück A ergibt:

$$\sum F_y = 0 = F_2 - F_1 - F_G$$

Werden die Kräfte nach dem Gesetz des Pascal durch die Drücke ersetzt, so ergibt sich hieraus:

$$F_1 = p_1 \cdot A$$

$$F_2 = p_2 \cdot A$$

$$F_G = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot h \cdot A$$

$$p_2 \cdot A = p_1 \cdot A + \rho \cdot g \cdot h \cdot A$$

$$p_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot h$$

Wird der Anfangsdruck gleich Null gesetzt $p_1 = 0$, so erhält man die allgemeine Beschreibung des Schweredrucks.

Definition:

Der Schweredruck p_h einer Flüssigkeit ist das Produkt aus der Dichte ρ des Stoffes mit der Erdbeschleunigung g und der Druckhöhe h . Die physikalische Einheit ist Pascal Pa.

$$p_h = \rho \cdot g \cdot h$$

$$[p_h] = [\rho] \cdot [g] \cdot [h] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

Die Summe des Betriebsdrucks p_1 (Druck von außen) und des Schweredrucks p_h wird in der Physik als **hydrostatischer Druck** p_2 oder p_{hydro} beschrieben.

Die gewonnene Erkenntnis über den hydrostatischen Druck von Flüssigkeiten wird in der Technik zum Messen von Drücken, insbesondere des Luftdrucks, verwandt. Hier wird der Luftdruckunterschied zwischen zwei voneinander abgeschirmten Räumen gemessen. Die Räume sind mit einem U-Rohr verbunden, das an beiden Seiten offen und mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Die Drücke in den beiden Räumen werden miteinander verglichen. Ändert sich der Druck in einem Raum bei konstantem Druck im anderen Raum, so verschiebt sich die Flüssigkeitssäule in dem Rohr. Durch die Skalierung der Flüssigkeitssäule kann der Druckunterschied direkt abgelesen werden. Sind die Drücke p_1 und p_2 in beiden Räumen gleich, so ist der Höhenunterschied der Flüssigkeit im Rohr gleich Null ($h = 0$).

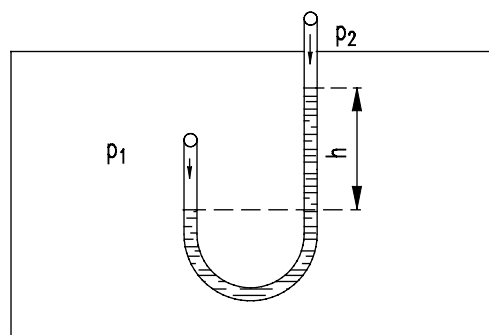


Abbildung 101 Druckmesser

Lehrbeispiel 4

Der Druck in einem Kessel soll im Vergleich mit dem Luftdruck gemessen werden. Der Höhenunterschied in der Säule beträgt 175 mm. Der Luftdruck hat eine Größe von $p_{\text{Luft}} = 1025 \text{ mbar}$. Das Messröhrchen ist mit Wasser gefüllt mit der Dichte $\rho_W = 1 \text{ kg/dm}^3$.

Wie groß ist der Überdruck und der absolute Druck im Kessel?

Lösung

Gegeben: $p_{\text{Luft}} = 1025 \text{ mbar}$

$$h = 175 \text{ mm}$$

$$\rho_W = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Gesucht: $p_{\text{Ü}}$; p_k

$$p_{\text{Ü}} = \rho_W \cdot g \cdot h$$

$$p_{\text{Ü}} = 1 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot \frac{10^3 \text{ dm}^3}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 175 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1716,75 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{ m}^3} \quad \text{mit } 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\underline{\underline{p_{\text{Ü}} = 1717 \text{ Pa}}} \quad \approx 1717 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$p_k = p_{\text{Luft}} + p_{\text{Ü}}$$

$$p_k = 1025 \cdot 10^2 \text{ Pa} + 1717 \text{ Pa}$$

$$p_k = 104217 \text{ Pa} = 104,217 \text{ kPa}$$

$$\underline{\underline{p_k = 1042 \text{ mbar}}}$$

Der Bodendruck

Ist ein Gefäß mit einer Flüssigkeit gefüllt, so wirkt auf den waagerechten Boden des Gefäßes ein Druck. Dieser Druck hat seinen Ursprung in der Schwerkraft der Materie und ist gleichzusetzen mit dem Schweredruck.

$$p_B = \rho \cdot g \cdot h$$

Die Kraft, die verursacht durch den Druck auf den Boden wirkt, ist abhängig von der Dichte ρ der Flüssigkeit, der Flüssigkeitshöhe h über dem Boden und der betrachteten Bodenfläche A .

$$F_B = p \cdot A$$

$$F_B = \rho \cdot g \cdot h \cdot A$$

Aus der Formel zur Berechnung der Bodenkraft ist zu entnehmen, dass die Kraft unabhängig von der Form des Füllkörpers und dessen Volumen ist. Dies wird durch den nachfolgenden Versuch bewiesen.

In ein Stativ werden nacheinander Gefäße unterschiedlicher Formen und Volumen V , aber einer Bodenöffnung gleicher Fläche A , gehangen. Die Bodenplatte wird jeweils über einen Hebelarm mit einer bestimmten Kraft F gegen die Bodenöffnung gepresst. Werden die Gefäße mit Wasser gefüllt, so ist bei einer bestimmten Füllhöhe h der Druck und somit die Kraft auf die Bodenplatte so groß, dass sie weggedrückt wird. Das erstaunliche hierbei ist, dass das Wasser immer ab der gleichen Füllhöhe h ausfließt. Dies erscheint widersprüchlich (paradox). Trotz unterschiedlicher Wassermenge und somit verschiedenen Gewichtskräften des Wassers ist die Bodenkraft gleich. Diese physikalische Besonderheit wird **Hydrostatisches Paradoxon** genannt.

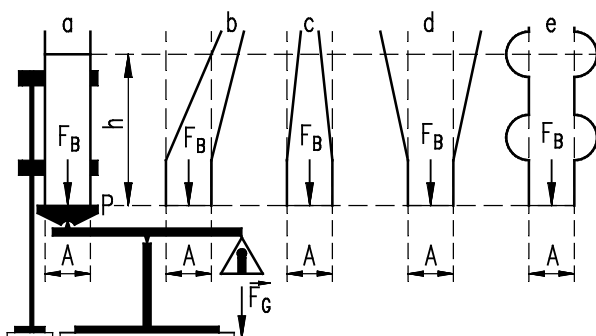


Abbildung 102 Hydrostatisches Paradoxon

Definition:

Der Schweredruck einer Flüssigkeit ist unabhängig von der Form des Füllgefäßes und dem Volumen der Flüssigkeit.

Der Seitendruck

Der Druck in einer Flüssigkeit breitet sich nach allen Seiten gleichmäßig aus. Es wird also nicht nur der Boden eines Gefäßes mit einer Kraft belastet, sondern auch die Seitenwände. Der Druck, der auf die Seiten wirkt, ist der Seitendruck. Er ist gleich dem Schweredruck.

$$p_h = \rho \cdot g \cdot h$$

Aus dem Schweredruck resultiert die Seitenkraft. Wird die seitliche Gefäßwand in kleine Flächenstreifen mit gleichem Flächeninhalt ΔA zerlegt, so ist die Kraft, die auf den jeweiligen Flächenstreifen wirkt, abhängig von der Höhe h , in der sich der Streifen von der Oberfläche der Flüssigkeit befindet. Die Seitenkraft ist proportional der Höhe.

$$F_{Sx} = \rho \cdot g \cdot \Delta A \cdot h_x$$

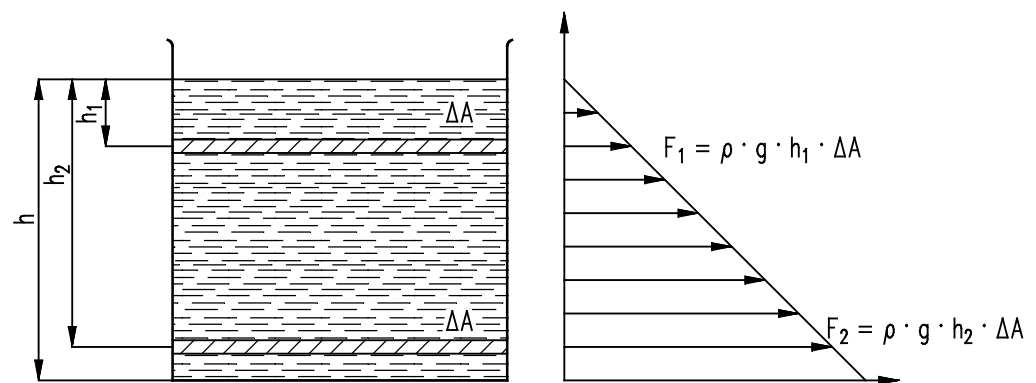


Abbildung 103 Die Seitenkraft

Die gesamte Kraft, die eine Seitenfläche eines Gefäßes belastet, ist gleich der Summe der einzelnen Seitenkräfte.

$$F_S = \sum F_{Sx} = \rho \cdot g \cdot (\Delta A \cdot h_1 + \Delta A \cdot h_2 + \dots + \Delta A \cdot h_n)$$

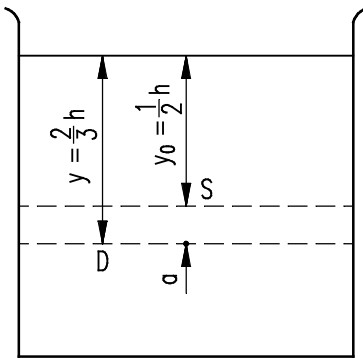
Der Klammerausdruck ist die Summe der Flächenmomente. Sie ist gleichzusetzen mit dem **Flächenschwerpunkt** y_0 . Somit berechnet sich die Seitenkraft F_S aus:

$$F_S = \rho \cdot g \cdot A \cdot y_0$$

Die Seitenkraft F_S greift im Druckmittelpunkt D an. Der Druckmittelpunkt hat einen Abstand a vom Schwerpunkt. Er liegt tiefer als der Schwerpunkt und berechnet sich aus Quotienten des Flächenträgheitsmoment I zu der Fläche A und dem Schwerpunktsabstand y_0 .

$$a = \frac{I}{A \cdot y_0}$$

Ist ein Gefäß mit einer Flüssigkeit gefüllt, so befindet sich der Schwerpunkt in der halben Füllstandshöhe. Der Druckmittelpunkt befindet sich zweidrittel unter der Oberfläche der Flüssigkeit.



$$y_0 = \frac{1}{2}h$$

$$y = \frac{2}{3}h$$

$$y = y_0 + a$$

Abbildung 104 Schwerpunkt und Druckmittelpunkt

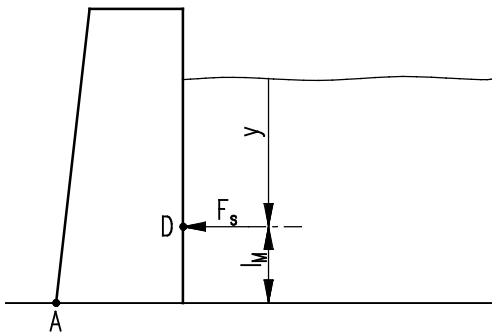
Lehrbeispiel 5

Ein Ufer soll durch eine Mauer befestigt werden. Die Mauer hat eine Höhe von 10 m und das Wasser soll auf 8 m gestaut werden. Die Mauer hat eine Länge von 6 m.

5.1 Wie groß ist die Seitenkraft?

5.2 In welcher Tiefe liegt der Druckmittelpunkt?

5.3 Wie groß ist das Kippmoment in Punkt A?

Lösung

Gegeben: $h_M = 10 \text{ m}$
 $h_w = 8 \text{ m}$
 $l = 6 \text{ m}$
 $\rho_w = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Lehrbeispiel 5.1

Gesucht: F_s

$$F_s = \rho \cdot g \cdot A \cdot y_0$$

$$A = h_w \cdot l$$

$$y_0 = \frac{1}{2} h_w$$

$$F_s = \rho \cdot g \cdot h_w \cdot l \cdot \frac{1}{2} h_w = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot l \cdot h_w^2$$

$$F_s = \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot \frac{1000 \text{ dm}^3}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6 \text{ m} \cdot (8 \text{ m})^2$$

$$F_s = 1,884 \cdot 10^6 \text{ N} = 1,884 \text{ MN}$$

Lehrbeispiel 5.2

Gesucht: y

$$y = \frac{2}{3} h_w = \frac{2}{3} \cdot 8 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{y = 5,33 \text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 5.3

Gesucht: $M_{(A)}$

$$M_{(A)} = F_s \cdot l_M$$

$$l_M = h_w - y$$

$$M_{(A)} = F_s \cdot (h_w - y) = 1,884 \text{ MN} \cdot (8 \text{ m} - 5,33 \text{ m})$$

$$\underline{\underline{M_{(A)} = 5,03 \text{ MNm}}}$$

Der Auftrieb

Bei einigen Versuchen wurden die folgenden Erscheinungen beobachtet:

- Wird versucht, ein Stück Holz unter Wasser zu drücken, so muss dafür eine Kraft aufgewendet werden.
- Wird ein Ball unter Wasser losgelassen, so schnell er an die Wasseroberfläche.
- Die Gewichtskraft eines Steins ist unter Wasser geringer als außerhalb des Wassers.

An den Beispielen ist zu sehen, dass im Wasser eine Kraft entgegen der Gewichtskraft wirkt. Der griechische Wissenschaftler Archimedes (287 bis 211 v. Chr.) entdeckte, dass wegen des Schweredruckes von Flüssigkeiten und Gasen alle Körper, die in ein solches Medium eingetaucht werden, leichter als außerhalb des Mediums sind. Diese Erscheinung wird **Auftrieb** genannt (archimedisches Prinzip). Aber wie entsteht der Auftrieb?

Wird ein Körper in eine Flüssigkeit eingetaucht, so wirkt auf die Oberfläche jeder Seite ein Druck, dessen Ursache in dem Schweredruck der Flüssigkeit liegt.

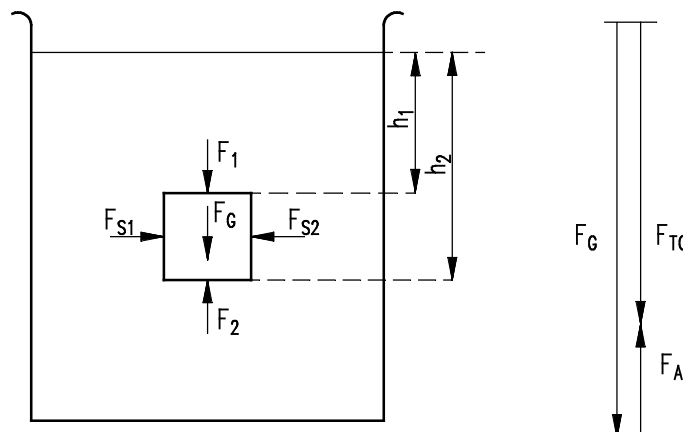


Abbildung 105 Auftriebskraft

Aus den Gesetzen der Statik ist zu sehen, dass die seitlich waagerechten Kräfte (x-Richtung) den gleichen Betrag haben, aber ihr Richtungssinn entgegengesetzt ist. Hieraus folgt, dass sich die Kräfte aufheben und für die Berechnung der Auftriebskraft nicht relevant sind. Steigt oder sinkt der Körper in der Flüssigkeit mit einer konstanten Dichte ρ , so sind die Summe der Kräfte, die senkrecht (y-Richtung) auf den Körper wirken, nicht Null. Die Auftriebskraft berechnet sich aus der Differenz aus den beiden Kräften in y-Richtung.

$$F_A = F_2 - F_1$$

Es kann auch gesagt werden, dass die Auftriebskraft F_A der Flüssigkeit entgegen der Gewichtskraft F_G des eingetauchten Körpers wirkt. Die Resultierende der geometrischen Addition der Gewichtskraft des Körpers außerhalb der Flüssigkeit und der Auftriebskraft ergibt die so genannte **Tauchgewichtskraft F_{TG}** .

$$F_{TG} = F_G - F_A$$

Auf Grund der Höhendifferenz ($h_2 - h_1$) ändert sich die Kraft, die auf die Fläche wirkt und somit auch der Druck.

$$F_A = F_2 - F_1 = A \cdot (p_2 - p_1)$$

$$F_A = \rho \cdot g \cdot A \cdot (h_2 - h_1)$$

Der Ausdruck $A \cdot (h_2 - h_1)$ beschreibt auch das Volumen des eingetauchten Körpers oder das Volumen der Flüssigkeit, das durch den eingetauchten Körper verdrängt wurde. Somit kann die Auftriebskraft auch mit dem **Verdrängungsvolumen V_{Verd}** beschrieben werden.

$$V_{Verd} = A \cdot (h_2 - h_1)$$

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V_{Verd}$$

Das Produkt aus der Dichte der Flüssigkeit und des Verdrängungsvolumens ergibt die Masse. Hieraus kann unter Berücksichtigung der Erdbeschleunigung die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit errechnet werden.

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V_{Verd} = m_{Verd} \cdot g = F_{GVerd}$$

Definition:

Die Auftriebskraft eines Körpers ist betragsmäßig gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

$$F_A = F_{GVerd}$$

Lehrbeispiel 6

Eine Messingkugel mit der Masse $m = 2,5 \text{ kg}$ und einer Dichte von $\rho_{Me} = 8,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

wird in eine Flüssigkeit aus Wasser ($\rho_{Wa} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) eingetaucht.

6.1 Wie groß ist die Auftriebskraft, die auf die Kugel wirkt?

6.2 Wie groß ist die Gewichtskraft der Kugel in der Flüssigkeit?

Lösung

Gegeben: $m_{Me} = 2,5 \text{ kg}$

$$\rho_{Me} = 8,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$\rho_{Wa} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Lehrbeispiel 6.1

Gesucht: F_A

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V_{Verd}$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$V_{Me} = \frac{m_{Me}}{\rho_{Me}} = \frac{2,5 \text{ kg}}{8,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}} = 0,2874 \text{ dm}^3$$

$$V_{Me} = V_{Verd}$$

$$F_A = \rho_{Wa} \cdot g \cdot V_{Verd}$$

$$F_A = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot \frac{10^3 \text{ dm}^3}{1 \text{ m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2874 \text{ dm}^3 \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ dm}^3}$$

$$\underline{\underline{F_A = 2,819 \text{ N}}}$$

Lehrbeispiel 6.2

Gesucht: F_{G2}

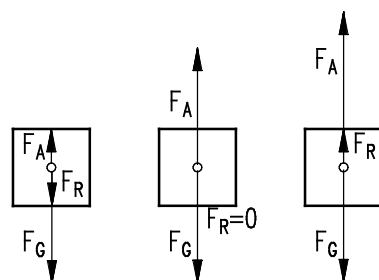
$$F_{G2} = F_g - F_A$$

$$F_G = m \cdot g$$

$$F_{G2} = m_{Me} \cdot g - F_A = 2,5 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2,819 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F_{G2} = 217 \text{ N}}}$$

Bei der Gewichtskraft F_G des Körpers und der Auftriebkraft F_A können drei Fälle unterschieden werden.



1. $F_A < F_G$
2. $F_A = F_G$
3. $F_A > F_G$

Abbildung 106 Sinken, schweben, aufsteigen

Diese drei Fälle sollen genauer untersucht werden:

Zu 1. $F_A < F_G$

Ist die Auftriebskraft F_A eines vollständig in eine Flüssigkeit getauchten Körpers kleiner als die Gewichtskraft F_G , so wirkt die Resultierende der beiden Kräfte nach unten, d.h. **der Körper sinkt in der Flüssigkeit nach unten**. Nach dem Gesetz des Archimedes gilt:

$$F_A = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V_{\text{Verd}}$$

Die Gewichtskraft des Körpers berechnet sich aus:

$$F_G = m_{\text{Körper}} \cdot g = \rho_{\text{Körper}} \cdot g \cdot V_{\text{Körper}}$$

Ist der Körper vollständig in die Flüssigkeit eingetaucht, so ist das Volumen der verdrängten Flüssigkeit gleich dem Volumen des Körpers.

$$V_{\text{Verd}} = V_{\text{Körper}} = V$$

Beim Einsetzen der Ergebnisse in die Anfangsbedingung ergibt sich hieraus:

$$F_A < F_G$$

$$\rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V < \rho_{\text{Körper}} \cdot g \cdot V$$

$$\rho_{\text{Fl}} < \rho_{\text{Körper}}$$

Definition:

Ein Körper, der vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, sinkt, wenn die Auftriebskraft oder die Dichte der Flüssigkeit kleiner als die Gewichtskraft oder die Dichte des Körpers ist.

$$F_A < F_G$$

$$\rho_{\text{Fl}} < \rho_{\text{Körper}}$$

Zu 2. $F_A = F_G$

Ist die Auftriebskraft F_A eines vollständig in eine Flüssigkeit getauchten Körpers gleich der Gewichtskraft F_G , so ist die Resultierende der beiden Kräfte gleich Null, d.h. **der Körper schwebt in der Flüssigkeit**. Nach dem Gesetz des Archimedes gilt:

$$F_A = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V_{\text{Verd}}$$

Die Gewichtskraft des Körpers berechnet sich aus:

$$F_{\text{GK}} = m_{\text{Körper}} \cdot g = \rho_{\text{Körper}} \cdot g \cdot V_{\text{Körper}}$$

Ist der Körper vollständig in die Flüssigkeit eingetaucht, so ist das Volumen der verdrängten Flüssigkeit gleich dem Volumen des Körpers.

$$V_{\text{Verd}} = V_{\text{Körper}} = V$$

Beim Einsetzen der Ergebnisse in die Anfangsbedingung ergibt sich hieraus:

$$F_A = F_G$$

$$\rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V = \rho_{\text{Körper}} \cdot g \cdot V$$

$$\rho_{\text{Fl}} = \rho_{\text{Körper}}$$

Definition:

Ein Körper, der vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, schwebt, wenn die Auftriebskraft oder die Dichte der Flüssigkeit gleich der Gewichtskraft oder der Dichte des Körpers ist.

$$F_A = F_G$$

$$\rho_{\text{Fl}} = \rho_{\text{Körper}}$$

Zu 3. $F_A > F_G$

Ist die Auftriebskraft F_A eines vollständig in eine Flüssigkeit getauchten Körpers größer als die Gewichtskraft F_G , so ist die Resultierende der beiden Kräfte nach oben gerichtet, d.h. **der Körper steigt in der Flüssigkeit auf**. Nach dem Gesetz des Archimedes gilt:

$$F_A = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V_{\text{Verd}}$$

Die Gewichtskraft des Körpers berechnet sich aus:

$$F_G = m_{\text{Körper}} \cdot g = \rho_{\text{Körper}} \cdot g \cdot V_{\text{Körper}}$$

Ist der Körper vollständig in die Flüssigkeit eingetaucht, so ist das Volumen der verdrängten Flüssigkeit gleich dem Volumen des Körpers.

$$V_{\text{Verd}} = V_{\text{Körper}} = V$$

Beim Einsetzen der Ergebnisse in die Anfangsbedingung ergibt sich hieraus:

$$F_A > F_G$$

$$\rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V > \rho_{\text{Körper}} \cdot g \cdot V$$

$$\rho_{\text{Fl}} > \rho_{\text{Körper}}$$

Definition:

Ein Körper, der vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, steigt auf, wenn die Auftriebskraft oder die Dichte der Flüssigkeit größer als die Gewichtskraft oder die Dichte des Körpers ist.

$$F_A > F_G$$

$$\rho_{\text{Fl}} > \rho_{\text{Körper}}$$

Schwimmt ein Körper in einer Flüssigkeit, so bedeutet dies, dass ein Teil des Körpers in die Flüssigkeit eingetaucht ist und der Rest des Körpervolumens herausragt. Diese

Bedingung ist aber nur dann erfüllt, wenn ein vollständig eingetauchter Körper wieder aufsteigt.

$$F_A > F_G$$

$$\rho_{\text{Fl}} > \rho_{\text{Körper}}$$

Der Körper steigt so lange, bis die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist:

$$F_A = F_G$$

Im Zustand des Schwimmens schwebt der Körper an der Oberfläche der Flüssigkeit. Dieser Schwebezustand ist aber nicht zu vergleichen mit dem Schweben eines Körpers unterhalb der Oberfläche. Ist die Gleichgewichtsbedingung beim schwimmenden Zustand erfüllt, dann ist das Volumen der Flüssigkeitsverdrängung V_{Verd} gleich dem Teilvolumen des eingetauchten Körpers $V_{\text{Körper}}$.

$$V_{\text{Verd}} = V_{\text{Körper}}$$

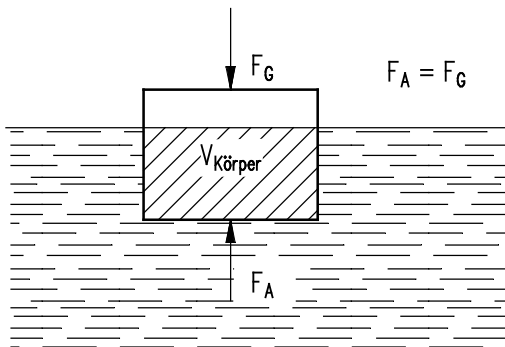


Abbildung 107 Schwimmender Körper

Ein schwimmender Körper taucht in Flüssigkeiten mit verschiedenen Dichten unterschiedlich tief ein. Die Ursache hierfür ist in der Dichte ρ_{Fl} begründet, die in Abhängigkeit zum Verdrängungsvolumen zu sehen ist.

$$V_{\text{Verd}} = \frac{F_A}{\rho_{\text{Fl}} \cdot g}$$

Lehrbeispiel 7

Ein Floß besteht aus 80 Balken vom quadratischen Querschnitt 28 x 28 cm und der Länge von $l = 12$ m. Die Dichte des Holzes beträgt $\rho_H = 0,75 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

7.1 Wie tief taucht das Floß in das Wasser ein ($\rho_W = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$)?

7.2 Mit welcher Masse darf das Floß belastet werden, wenn noch 1/10 vom Volumen der Balken aus dem Wasser ragen soll?

Lösung

Gegeben:

$$\begin{aligned} N &= 80 \\ b &= h = 28 \text{ cm} \\ l &= 12 \text{ m} \\ \rho_H &= 0,75 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \\ \rho_W &= 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \\ V_T &= \frac{9}{10} V_K \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 7.1

Gesucht: h_T

$$\begin{aligned} F_A &= F_G \\ F_G &= m_K \cdot g \\ m_K &= V_K \cdot \rho_K \\ V_K &= N \cdot b \cdot h \cdot l \\ \Rightarrow F_A &= N \cdot b \cdot h \cdot l \cdot \rho_K \cdot g \\ F_A &= 80 \cdot 0,28 \text{ m} \cdot 0,28 \text{ m} \cdot 12 \text{ m} \cdot 0,75 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot \frac{1000 \text{ dm}^3}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ F_A &= 553754,88 \text{ N} = 553,8 \text{ kN} \\ F_A &= F_{G\text{Verd}} \\ F_{G\text{Verd}} &= m_{\text{Verd}} \cdot g \\ m_{\text{Verd}} &= \rho_W \cdot V_{\text{Verd}} \\ V_{\text{Verd}} &= N \cdot l \cdot b \cdot h_T \\ \Rightarrow F_A &= F_{G\text{Verd}} = \rho_W \cdot N \cdot l \cdot b \cdot h_T \cdot g \\ h_T &= \frac{F_A}{\rho_W \cdot N \cdot l \cdot b \cdot g} = \frac{553755 \text{ N}}{1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 80 \cdot 12 \text{ m} \cdot 0,28 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1000 \text{ dm}^3}{\text{m}^3}} \\ h_T &= 0,21 \text{ m} = 21 \text{ cm} \quad (\text{ohne Last}) \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 7.2

Gesucht: m_L

$$\begin{aligned} h_T &= \frac{9}{10} \cdot h = \frac{9}{10} \cdot 28 \text{ cm} \\ h_T &= 25,2 \text{ cm} \quad (\text{mit Last}) \end{aligned}$$

$$F_A = \rho_{wa} \cdot N \cdot l \cdot b \cdot h_T \cdot g$$

$$F_A = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 80 \cdot 12 \text{ m} \cdot 0,28 \text{ m} \cdot 0,252 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_A = 664,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F = 0 = F_G + F_L - F_A$$

$$\Rightarrow F_L = F_A - F_G = 664,5 \text{ kN} - 553,8 \text{ kN}$$

$$F_L = 110,7 \text{ kN}$$

$$F_L = m_L \cdot g$$

$$m_L = \frac{F_L}{g} = \frac{110700 \text{ N}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$\underline{\underline{m_L = 11284 \text{ kg} = 11,284 \text{ t}}}$$

Bei schwimmenden Körpern wird zwischen drei Schwimmlagen unterschieden. Dies sind die Lage des Gleichgewichts, die stabile Lage und die instabile Lage.

In der Gleichgewichtslage wirken zwei Kräfte auf den schwimmenden Körper. Dies ist zum einen die Gewichtskraft F_G , die im Schwerpunkt $S_{K\ddot{o}}$ des Körpers wirkt und die Auftriebskraft F_A . Beide Kräfte haben den gleichen Betrag, die gleiche Wirklinie, aber den entgegengesetzten Richtungssinn (Abbildung 108 a).

Wird der Körper in der Flüssigkeit gedreht, so hat er eine schwimmende Schräglage eingenommen. Die vorher senkrechte Mittellinie ist nun um den Winkel α geneigt. Die Lage des Schwerpunktes des Körpers ändert sich nicht, aber die Lage des Verdrängungsschwerpunktes der Flüssigkeit S_{FL} . Hieraus folgt, dass die Gewichtskraft und die Auftriebskraft zwar noch den gleichen Betrag und den entgegengesetzten Richtungssinn haben, aber die Wirklinien nicht mehr gleich sind. Es sind zwei parallel verlaufende Kräfte mit dem Abstand r . Wird der Körper in der Flüssigkeit gedreht, so gibt es einen Schnittpunkt zwischen der Symmetrielinie des Körpers und der Auftriebskraft F_A . Dieser Schnittpunkt wird **Metazentrum** M^* genannt. Liegt das Metazentrum M^* über dem Körperschwerpunkt $S_{K\ddot{o}}$, dann wird der Körper vom Drehmoment $M = F_A \cdot r$ in die Gleichgewichtslage zurückgedreht. Diese Schwimm Lage wird als stabil bezeichnet (Abbildung 108 b).

Befindet sich das Metazentrum M^* unterhalb des Körperschwerpunktes $S_{K\ddot{o}}$, so kippt der Körper wegen des Moments $M = F_A \cdot r$ um. Diese Schwimm Lage wird als instabil bezeichnet (Abbildung 108 c).

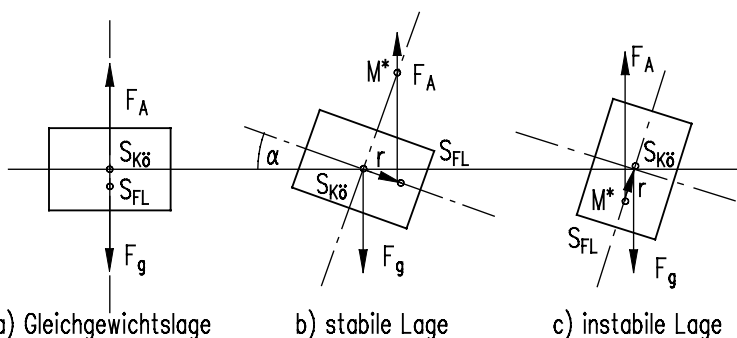


Abbildung 108 Stabile und instabile Lage

Oberflächenspannung

Zwischen den gleichartigen Atomen und Molekülen eines Stoffes wirken Zusammenhaltungskräfte, die so genannten **Kohäsionskräfte**. Sie haben einen elektrischen Ursprung und werden **van der Waalsche Kräfte** genannt. Die Kohäsionskräfte sind stärker als die Gravitationskräfte und treten bei festen Körpern und Flüssigkeiten auf.

Die Kohäsionskräfte zwischen den Teilchen heben sich im Inneren einer Flüssigkeit auf. Der Grund hierfür ist die allseitige Umlagerung der Moleküle durch gleichartige Moleküle. An der Oberfläche der Flüssigkeit fehlen die nach außen gerichteten Kräfte. Hieraus entsteht eine resultierende Kraft F_{res} , die ins Innere der Flüssigkeit gerichtet ist. Um Flüssigkeitsmoleküle gegen die Resultierende an die Oberfläche zu bringen, muss eine Arbeit verrichtet werden. Wird eine Arbeit verrichtet, so muss in den Molekülen an der Oberfläche eine Energie gespeichert sein. Diese Energie wird als **Oberflächenenergie** bezeichnet. Wird die verrichtete Arbeit W auf eine Oberflächenänderung bezogen, so ergibt sich hieraus die Oberflächenspannung σ .

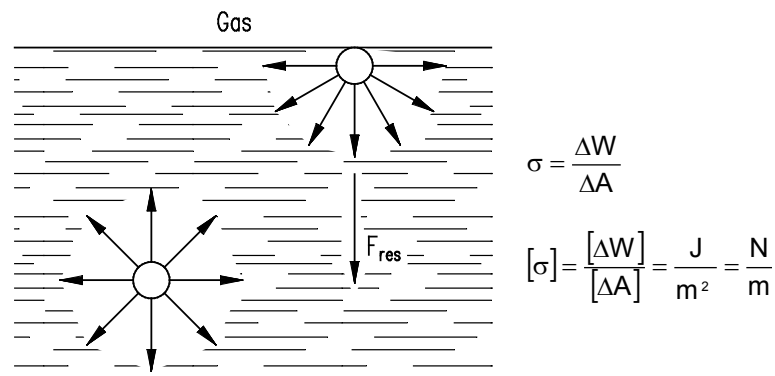


Abbildung 109 Kohäsionskräfte in Flüssigkeiten

Versuche zur Oberflächenspannung: Wird zum Beispiel eine Rasierklinge vorsichtig aufs Wasser gelegt, so geht sie nicht unter. Ein Wasserläufer bewegt sich auf dem Wasser, ohne unterzugehen.

Wirken zwischen Atomen oder Molekülen zweier unterschiedlicher Stoffe anziehende Kräfte, die ihre Ursache in der Elektrostatik haben, so werden diese Anziehungskräfte oder Anhangskräfte als **Adhäsionskräfte** bezeichnet. Die Adhäsionskräfte können zwischen zwei festen Körpern auftreten, aber auch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten oder festen Körpern und Gasen. Beispiele für Adhäsionskräfte sind das Haften von Leim an Verbindungsstellen, Tinte und Bleistift an Papier, Kreide an der Tafel und viele mehr.

Bei der Berührung einer festen Unterlage mit einem Flüssigkeitstropfen können zwei Extremfälle auftreten.

1. Die Adhäsionskräfte sind wesentlich größer als die Kohäsionskräfte:
Die Flüssigkeit wird sich auf der Oberfläche des festen Körpers ausbreiten (Beispiel Wasser auf Glas).
2. Die Adhäsionskräfte sind wesentlich kleiner als die Kohäsionskräfte:
Die Flüssigkeit wird sich tropfenförmig zusammenziehen (Beispiel Quecksilber auf Glas).

Bei der Betrachtung der skizzierten Fälle wirkt die Oberflächenspannung zwischen der gasförmigen (1) und festen (3) Phase, die Oberflächenspannung zwischen gasförmiger und flüssiger (2) Phase und die Oberflächenspannung zwischen der flüssigen (2) und der gasförmigen Phase (1). Der Winkel zwischen der festen und flüssigen Phase wird als α beschrieben.

$$\sigma_{12} \cdot \cos \alpha = \sigma_{13} + \sigma_{23}$$

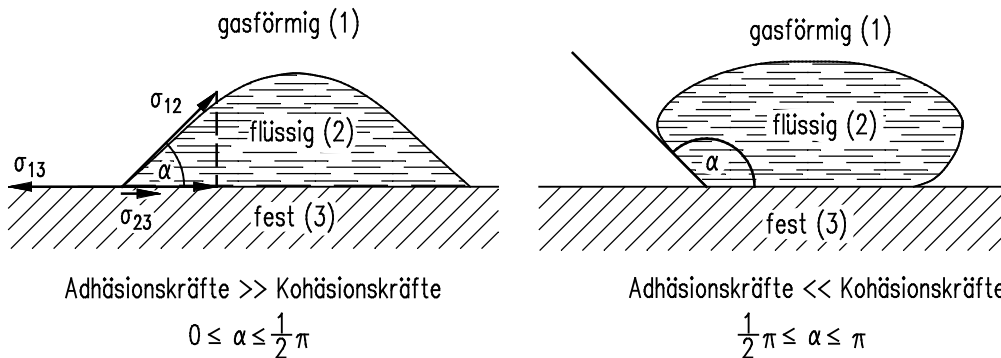


Abbildung 110 Flüssigkeitstropfen auf Oberfläche

Die beschriebenen physikalischen Vorgänge spielen beim Eintauchen von engen Röhren (Kapillaren) in eine Flüssigkeit eine Rolle (kommunizierende Röhre).

Tritt der Fall auf, dass die Flüssigkeit in dem Röhrchen um die Höhe h höher ist als außerhalb, so wird von einer kapillaren Hebung oder einer **Kapillar-Aszension** gesprochen. Die Adhäsionskraft ist sehr viel größer als die Kohäsionskraft. Bei der Aszension ist der Winkel α im Bereich von:

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \pi$$

Tritt der Fall auf, dass die Flüssigkeit in dem Röhrchen um die Höhe h tiefer ist als außerhalb, so wird von einer kapillaren Senkung oder einer **Kapillar-Depression** gesprochen. Die Adhäsionskraft ist sehr viel kleiner als die Kohäsionskraft. Bei der Depression ist der Winkel α im Bereich von:

$$\frac{1}{2} \pi < \alpha \leq \pi$$

Diese physikalische Beschreibung wird allgemein als **Kapillarität** bezeichnet.

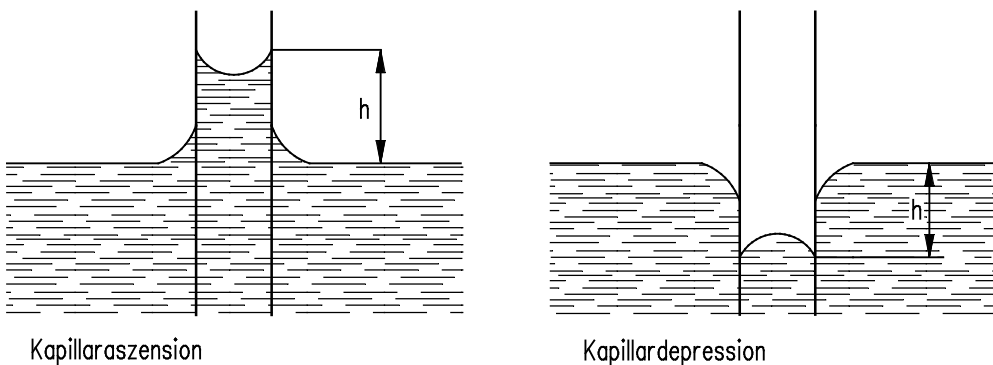


Abbildung 111 Kapillarität

3.2 Allgemeine Eigenschaften der Gase

Bei den Gasen wirken zwischen den einzelnen Teilchen wesentlich geringere Kohäsionskräfte als bei den Flüssigkeiten. Die Moleküle befinden sich in einer dauernden unregelmäßigen Bewegung. Diese Bewegungsenergie ist stark temperaturabhängig. Durch die Erhöhung der Temperatur nimmt die Bewegungsenergie in den Molekülen ebenfalls zu. Auf Grund der Bewegungsenergie lässt sich ein definiertes Gasvolumen zusammendrücken.

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p \quad \kappa : \text{Kompressibilität in } \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$$

Wird bei einem mit Luft gefüllten Zylinder auf den beweglichen Kolben eine Druckkraft ausgeübt, so lässt sich das Volumen des Zylinders verringern. Die Stöße der Moleküle auf die Oberflächen des Zylinders und des Kolbens nehmen zu. Durch den Stoß der Moleküle auf den Kolben wird eine Kraft auf den Kolben ausgeübt. Es muss somit eine Kraft auf den Kolben wirken, die gegen die Stoßrichtung der Moleküle gerichtet ist.

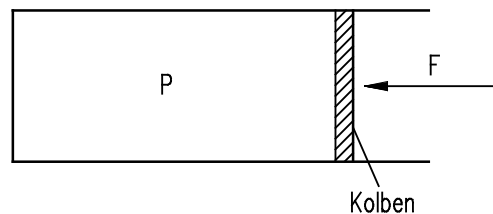


Abbildung 112 Volumenänderung eines Zylinders

Gase sind kompressibel. Für ideale Gase kann die isotherme Kompressibilität $\kappa_{\text{id.Gas}}$ aus der Zustandsgleichung berechnet werden.

$$\kappa_{\text{id.Gas}} = \frac{1}{p}$$

Die in einem komprimierten Gas gespeicherte mechanische Arbeit lässt sich wegen der leichten Verschiebbarkeit der Gasmoleküle an jeder Stelle entnehmen. Komprimierte Gase, wie zum Beispiel Pressluft, werden bei Maschinenanlagen als Energieträger für Arbeitsprozesse und Steuerungen eingesetzt (Pneumatik).

Definition:

Gase haben kein festes Volumen und nehmen keine feste Form an. Sie sind im Gegensatz zu Flüssigkeiten kompressibel.

Die Volumenänderung eines Gases ist proportional der Temperaturänderung. Auch hier muss ein Proportionalitätsfaktor berücksichtigt werden. Der Faktor ist der **Volumenausdehnungskoeffizient** γ mit der Maßeinheit $1/\text{K}$. Bei idealen Gasen ist der Volumenausdehnungskoeffizient konstant.

$$\gamma = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273 \text{ K}} = 0,00366 \frac{1}{\text{K}}$$

Physikalische Größen mit dem Index 0 sagen aus, dass sich die Größen auf den Temperaturwert von 273 K oder 0 °C beziehen.

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \cdot \Delta \vartheta$$

Auf Grund des größeren Teilchenabstandes bei Gasen ist ihre Dichte geringer als bei Flüssigkeiten. Die Dichte ρ steht in Abhängigkeit zur Volumenänderung und ist somit abhängig von der Temperaturänderung.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = V_0 + \Delta V$$

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta \vartheta$$

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta \vartheta)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \cdot \Delta \vartheta}$$

Schweredruck

Der Schweredruck von Gasen soll in zwei Versuchen durch den Schweredruck von Luft veranschaulicht werden.

Versuch:

Ein Glas wird randvoll mit Wasser gefüllt und abschließend mit einem dünnen Karton abgedeckt. Wichtig hierbei ist, dass sich keine Luftblase mehr in dem Gefäß befindet. Nun hält man den Karton mit der Hand fest und dreht das Glas um 180° auf den Kopf, sodass die Öffnung nach unten ragt. Wird die Hand entfernt, so fließt kein Wasser aus dem Glas. Es wirkt eine Kraft gegen den Deckel, die größer ist als die Bodenkraft des Wassers. Diese Kraft hat ihren Ursprung in dem Luftdruck, der auf die Fläche des Kartons wirkt.

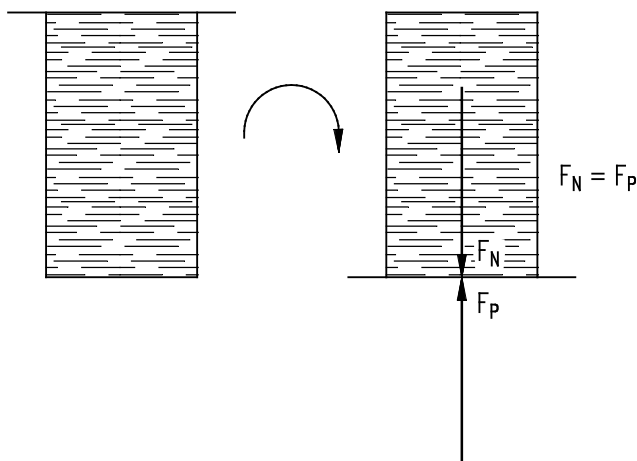


Abbildung 113 Versuch Wasserglas

Versuch:

Im Jahre 1654 führte der deutsche Wissenschaftler Otto Guericke (1602 bis 1686) auf dem Reichstag zu Regensburg den Versuch mit den Magdeburger Halbkugeln vor. Mit diesem Experiment wurden die Auswirkungen des Luftdrucks in beeindruckender Weise nachgewiesen. Herr Guericke ließ zwei genau aufeinander passende Halbkugeln an der Nahtstelle abdichten. Im Innenraum der Kugel wurde durch das Abpumpen der Luft ein Vakuum erzeugt. Danach spannte er an dem Griff jeder Halbkugel ein Gespann von Pferden und trieb diese in entgegengesetzter Richtung an. Hierdurch wurden die Kugelhälften auf Zug beansprucht. Die Pferde konnten die Hälften aber nicht trennen. Erst nach dem Anspannen von je acht Pferden pro Seite reichten die Zugkräfte aus und die Kugelhälften wurden getrennt.

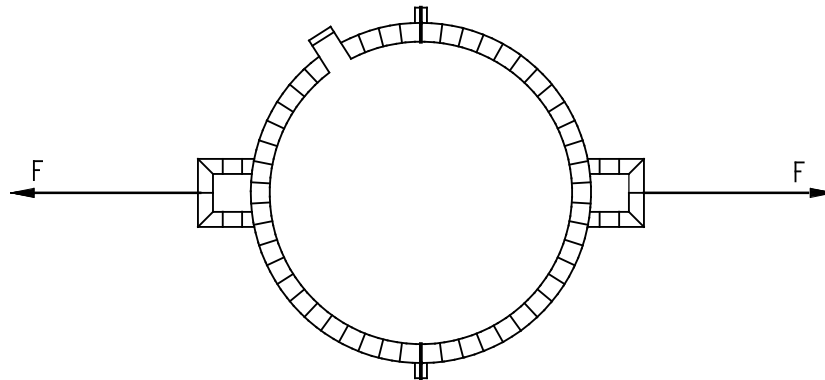


Abbildung 114 Magdeburger Halbkugeln

Der Schweredruck von Gasen errechnet sich aus der über einer Bezugsebene stehenden Gassäule. Da die Gase durch die Wirkung der Erdanziehung komprimiert werden, nimmt die Dichte des Gases mit zunehmender Höhe ab. Bei einer geringen Höhendifferenz Δh kann die Dichte ρ als konstant angesehen werden. Der Druckunterschied Δp kann somit mit der allgemeinen Schweredruckformel beschrieben werden:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

Bei größeren Höhenunterschieden kann diese Beziehung nicht mehr so aufrecht gehalten werden, da die Dichte ρ abhängig von der Höhe h ist. Die Dichte der Luft nimmt mit zunehmender Höhe ab. Unter Voraussetzung einer konstanten Temperatur kann der Druck p oder die Dichte ρ einer bestimmten Höhe h wie folgt beschrieben werden:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}$$

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}$$

Für die Normalatmosphäre nach DIN 5450 ist bei einer absoluten Temperatur von $\vartheta = 0^\circ \text{C}$:

- die Dichte: $\rho_0 = 1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- der Druck: $p_0 = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} = 1,256 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{m}}$$

Durch das Einsetzen der Konstanten lässt sich das **barometrische Höhendiagramm** für Luft ermitteln.

$$p = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot e^{-1,256 \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}^{-1} \cdot h}$$

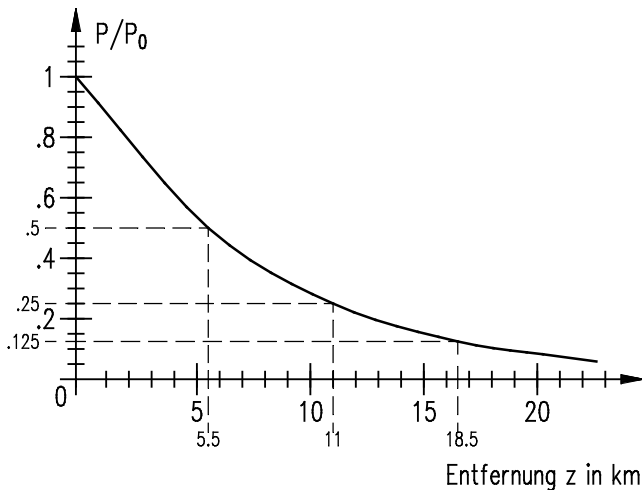


Abbildung 115 Barometrisches Höhendiagramm für Luft

Aus dem Diagramm ist zu entnehmen, dass sich der Druck bei einer Höhe von $h = 5,54 \text{ km}$ halbiert hat. Wichtig ist auch bei dieser Betrachtung, dass die Temperatur über den gesamten Höhenabschnitt als konstant angesehen wurde.

Es wurde eine internationale Höhenformel entwickelt, die den natürlichen Temperaturabfall bis zu einer Höhe von $h = 11 \text{ km}$ berücksichtigt. Dieser Zusammenhang soll nur zur Vollständigkeit erwähnt werden.

$$p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \left(1 - \frac{6,5}{288 \text{ km}} \cdot h\right)^{5,255}$$

$$\rho = 1,2255 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(1 - \frac{6,5}{288 \text{ km}} \cdot h\right)^{4,255}$$

Messinstrumente, mit denen der Luftdruck gemessen werden kann, heißen in der Physik **Barometer**. Es gibt verschiedene Arten von Barometern.

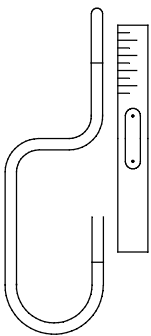


Abbildung 116 Barometer

Bei einem Quecksilberbarometer wird ein einseitig offenes und gebogenes Röhrchen mit flüssigem Quecksilber gefüllt, sodass in dem geschlossenen Teil ein Vakuum ist. Durch eine Luftdrucksänderung schwankt das Quecksilber in dem Röhrchen.

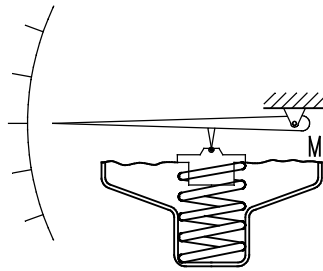


Abbildung 117 Dosenbarometer

Beim Dosenbarometer wird die Membran M vom Luftdruck nach innen und von der in der luftleeren Dose eingebaute Feder nach außen gedrückt. Die Druckveränderungen bewirken Bewegungen der Membrane, die auf den Zeiger übertragen werden. Die Skala ist geeicht.

Geräte, mit denen der Druck eines Gases innerhalb eines Gefäßes gemessen wird, heißen **Manometer**. Ein Flüssigkeitsmanometer besteht aus einem beidseitig offenen Rohr, das zum Teil mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Eine Öffnung wird an dem zu messenden Körper angeschlossen, der mit einem Gas gefüllt ist, die andere Öffnung ist nach außen offen und misst den Umgebungsdruck. Die Höhendifferenz Δh , die durch den Druckunterschied Δp verursacht wird, ist gleichzusetzen mit dem Über- oder Unterdruck, der im Körper herrscht.

$$\Delta p = p_{\text{außen}} - p_{\text{innen}}$$

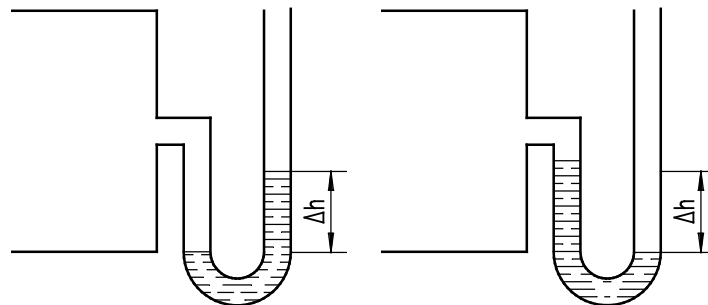


Abbildung 118 Manometer

Auftrieb

Auch bei Gasen ist ein Auftrieb, wie bei Flüssigkeiten, nachzuweisen. Durch den Auftrieb steigen Ballone in die Höhe oder sammelt sich Kohlenmonoxid auf dem Boden.

Wird eine Balkenwaage mit einem mit Luft gefüllten, festen Körper (zum Beispiel Glas) und Gewichten ausgewogen, so ist die Waage im Gleichgewicht. Wird dem Körper die Luft entzogen, so entsteht in ihm ein Vakuum. Bringt man die Anordnung unter eine Vakuumbglocke und pumpt die Luft heraus, ist das Gleichgewicht der Waage nicht mehr gegeben. Sie sinkt auf der Seite des Glaskörpers ab. Der Körper muss also in Luft einen Auftrieb erfahren haben. Die Überlegung ist ähnlich wie die bei Flüssigkeiten.

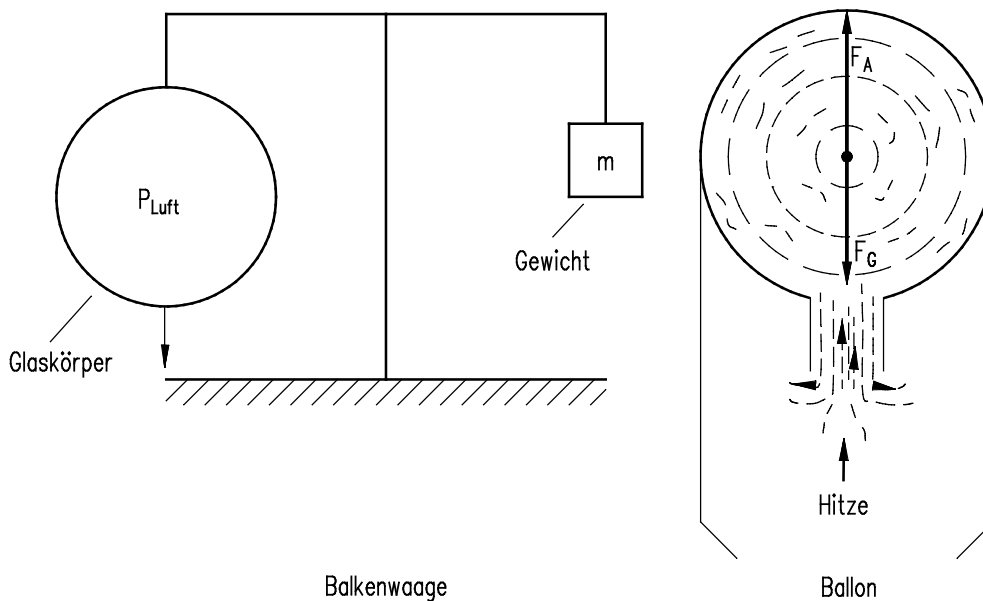


Abbildung 119 Auftrieb in Gasen

Beispiel eines Heißluftballons:

Soll ein Ballon aufsteigen, so wird die Luft in dem Ballon erhitzt. Durch die Erwärmung des Balloninhaltes vergrößert sich auch das Volumen. Da der Ballon kein abgeschlossenes System ist, strömt Luft unten aus und die Dichte ρ im Inneren des Ballons wird kleiner als außerhalb. Durch die Verringerung der Dichte nimmt auch die Gewichtskraft des Ballons ab. Ist die Gewichtskraft F_G kleiner als die Auftriebskraft F_A steigt der Ballon auf.

Definition:

Der Auftrieb eines Körpers in Gas ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Gasmenge.

3.3 Dynamik der Flüssigkeiten und Gase

Die Dynamik der Flüssigkeiten und Gase wird in der Physik als **Strömungsmechanik** bezeichnet. Strömende Flüssigkeiten (Hydrodynamik) und Gase (Aerodynamik) transportieren Massen auf Grund der Schwerkraft oder einer Druckdifferenz. In der Hydrodynamik werden die inkompressiblen und in der Aerodynamik die kompressiblen Strömungen untersucht. Die folgenden Gesetzmäßigkeiten gelten sowohl für strömende Flüssigkeiten als auch für strömende Gase.

Die strömenden Masseteilchen weisen eine räumliche Geschwindigkeitsverteilung auf. Diese Geschwindigkeitsverteilung wird als Strömungsfeld bezeichnet. Ein Strömungsfeld ist ein Vektorfeld und beschreibt die Geschwindigkeitsvektoren der transportierten Masseteilchen.

Zunächst soll das Strömungsverhalten bei idealen Gasen und idealen Flüssigkeiten untersucht werden. Bei idealen Gasen sind die Kohäsionskräfte sehr gering, ideale Flüssigkeiten sind inkompressibel. Definitionsgemäß können strömende ideale Gase und Flüssigkeiten als reibungsfrei bezeichnet werden.

Definition:

Das in einer Sekunde gleichförmig durch einen Strömungsquerschnitt fließende Volumen heißt Volumenstrom \dot{V} . Der Volumenstrom ist das Produkt aus dem Strömungsquerschnitt A und der Strömungsgeschwindigkeit v .

$$\dot{V} = A \cdot v$$

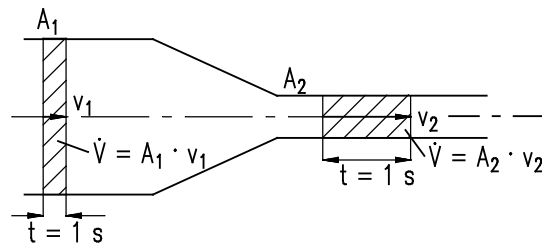


Abbildung 120 Kontinuitätsgleichung

Ändern Gase oder Flüssigkeiten ihr Volumen nicht, so muss durch verschieden große Querschnitte einer Leitung in jeder Sekunde das gleiche Volumen fließen. Dieser Zusammenhang wird in der Physik mit der **Kontinuitätsgleichung** beschrieben.

$$\dot{V} = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{konst.}$$

Auf die in Abbildung 121 gezeigten horizontalen, reibungsfreien Leitung soll der Energieerhaltungssatz angewandt werden.

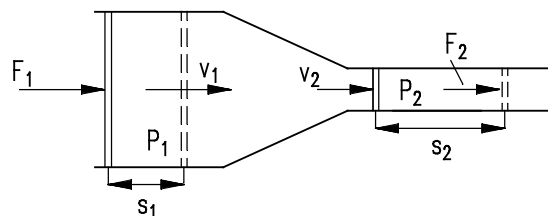


Abbildung 121 Horizontale Strömung

$$E_E = E_A + W_{zu} - W_{ab}$$

$$E_E = W_E = W_{kin2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$$

$$E_A = W_A = W_{kin1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

$$W_{zu} = W_1 = F_1 \cdot s_1$$

$$W_{ab} = W_2 = F_2 \cdot s_2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \cdot V$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \cdot V$$

$$F_1 \cdot s_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot s_1 = p_1 \cdot V_1$$

$$F_2 \cdot s_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot s_2 = p_2 \cdot V_2$$

Werden die entwickelten Gleichungen in den Energieerhaltungssatz eingesetzt, so erhält man die **Bernoullische Druckgleichung** für horizontale Strömungen. Bei horizontaler Strömung ist die Summe aus dem statischen Druck p und dem kinetischen

Druck $p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$ konstant.

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \quad (\text{horizontale, reibungsfreie Strömung})$$

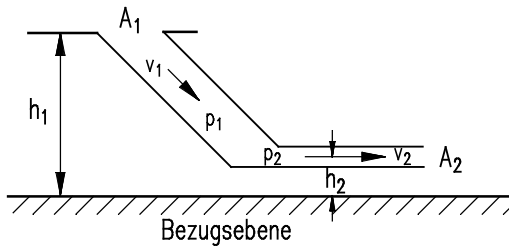


Abbildung 122 Allgemeine Strömung

Ist die betrachtete Leitung nicht horizontal gelagert, so muss noch zusätzlich die potenzielle Energie des höhergelegenen Leitungsendes berücksichtigt werden. Die Bernoullische Druckgleichung lautet in diesem Fall:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

Bei nicht horizontaler Strömung ist die Summe aus dem statischen Druck p , dem geostatischen Druck ($\rho \cdot g \cdot h$) und dem kinetischen Druck $p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$ konstant.

Das Umstellen der Gleichung ergibt die **Bernoullische Druckhöhengleichung für nicht horizontale Strömungen**.

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + h_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + h_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

Ausfluss von Flüssigkeiten

Als Beispiel nehmen wir ein Gefäß, das mit Wasser bis zu einem Flüssigkeitsspiegel B gefüllt ist. Das Gefäß hat einen Ausfluss mit einer Öffnungsfläche A. Nach Öffnen des Ausflusses strömt das Wasser aus und der Flüssigkeitsspiegel sinkt ab. Der atmosphärische Druck ist überall gleich.

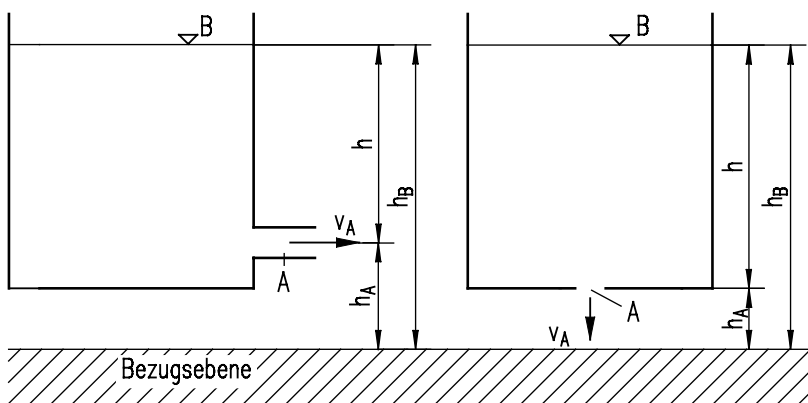


Abbildung 123 Seitlicher bzw. unterer Ausfluss eines Gefäßes

Es soll nun die Bernoullische Druckhöhengleichung mit dem Beispiel in Verbindung gebracht werden. Da der Druck überall gleich ist, braucht die geostatische Komponente nicht beachtet werden. Die Geschwindigkeit des absinkenden Wassers ist im Verhältnis zur Auslaufgeschwindigkeit sehr gering und kann deswegen vernachlässigt werden. Übrig bleibt somit:

$$\frac{v_A^2}{2 \cdot g} = h_B - h_A = \Delta h$$

Die theoretische Ausflussgeschwindigkeit ist somit:

$$v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

Der theoretische Volumenstrom berechnet sich somit:

$$\dot{V}_A = A \cdot v_A = A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

Führen wir den gleichen Versuch mit einer anderen Flüssigkeit durch, so ist festzustellen, dass sich das Gefäß schneller oder langsamer leert. Die Ausflussgeschwindigkeit v_A muss somit noch von einer weiteren physikalischen Größe abhängig sein. Betrachtet man die unterschiedlichen Flüssigkeiten genauer, so ist festzustellen, dass sie unterschiedlich **zäh** sind. Die Zähigkeit φ von Wasser liegt zum Beispiel bei ungefähr $\varphi \approx 0,97$.

Definition:

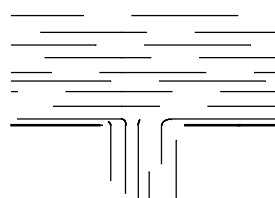
Die Zähigkeit von Stoffen wird allgemein als Viskosität η bezeichnet.

Die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit und der wirkliche Volumenstrom errechnen sich somit aus:

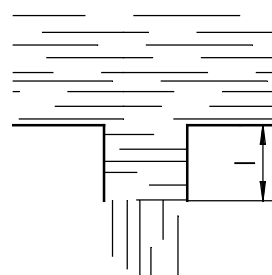
$$v_A = \eta \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

Zusätzlich zur Viskosität spielt auch die Form des Austritts zur Berechnung des Volumenstroms eine Rolle. In Abbildung 124 sind 3 Beispiele von Ausflussarten aufgezeigt und die zugehörigen Ausflusszahlen μ angegeben. In μ ist die Viskosität enthalten.

$$\dot{V}_A = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

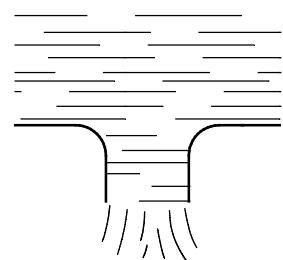


$$\mu = 0,64 - 0,66$$



$$\mu = 0,84$$

für $l \approx 2,5 d$



$$\mu = 0,98 - 0,99$$

Abbildung 124 Beispiele von Ausflussarten

Bei den bisherigen Betrachtungen ist die Ausflusszeit t nicht berücksichtigt worden. Diese Zeit gibt an, wie lange eine Flüssigkeit mit dem Volumen V_A aus einem Behälter mit einem Volumenstrom \dot{V}_A fließt.

$$t = \frac{V_A}{\dot{V}_A}$$

Handelt es sich bei der Betrachtung von Ausflüssen um ein geschlossenes Gefäß, in dem ein Überdruck herrscht, muss dieses natürlich im Energieerhaltungssatz berücksichtigt werden. Die theoretische Austrittsgeschwindigkeit berechnet sich somit aus:

$$v = \sqrt{2g \cdot \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho \cdot g} \right)}$$

$$\Delta p = p_1 - p_0$$

Der wirkliche Volumenstrom unter Berücksichtigung der Viskosität und der Form des Ausflusses ergibt sich somit aus:

$$\dot{V}_A = \eta \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot \left(h + \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} \right)}$$

Sinkt der Flüssigkeitsstand in einem Behälter, wird auf Grund der verringerten Höhendifferenz Δh auch die Ausflussgeschwindigkeit und der Volumenstrom abgeschwächt. In diesem Fall ist der Mittelwert dieser beiden Größen zu bestimmen.

Ausfluss von Gasen

Sollen Gasmoleküle aus einem Behälter ausströmen, so ist die Schwerkraft des Gases für die Berechnung der Austrittsgeschwindigkeit und des Volumenstroms nicht erheblich. In diesem Fall ist nur der Druckunterschied und die Dichte des Gases für diese physikalischen Größen von Bedeutung.

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_{\text{Gas}} - p_0)}{\rho}}$$

$$\dot{V}_A = A \cdot v_A$$

Reibung bei Strömungen

Alle bis jetzt beschriebenen Beispiele wurden reibungsfrei betrachtet. Dies ist aber in der Technik nicht gegeben, da kein Prozess in der Realität ohne Reibung abläuft.

Durch die auftretenden Adhäsionskräfte zwischen den Molekülen der Flüssigkeiten und Gase kommt es bei einer Strömung zu einer inneren Reibung. Strömt die Flüssigkeit oder das Gas durch ein Rohr, so ist die Reibung an den Wandungen des Rohres am größten. Die Fluggeschwindigkeit ist am Rand am geringsten und nimmt zur Mitte hin zu. Ihr Maximum befindet sich in der Mitte des Rohres. Gleiten die einzelnen Flüssigkeitsschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten übereinander hinweg, ohne sich zu vermischen, so wird von einer **laminaren Strömung** gesprochen.

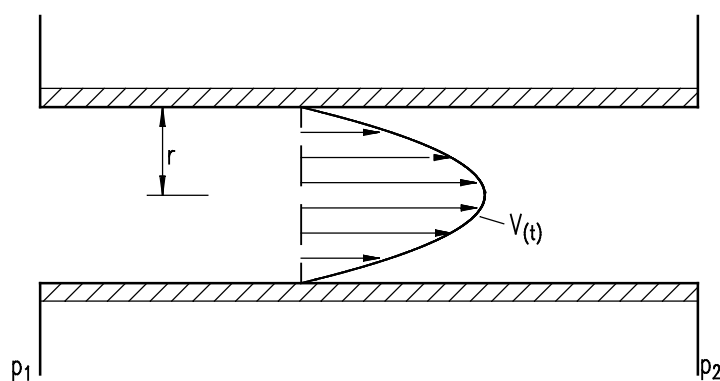


Abbildung 125 Laminare Rohrströmung

Wird der Strömung ein Widerstand in den Weg gestellt, so ist der Fluss noch bis zum Hindernis laminar. Hinter dem Hindernis kommt es zu Verwirbelungen, sodass die linienförmige Strömung nicht mehr aufrecht gehalten wird. Man spricht hier von **turbulenten Strömungen oder Turbulenzen**.

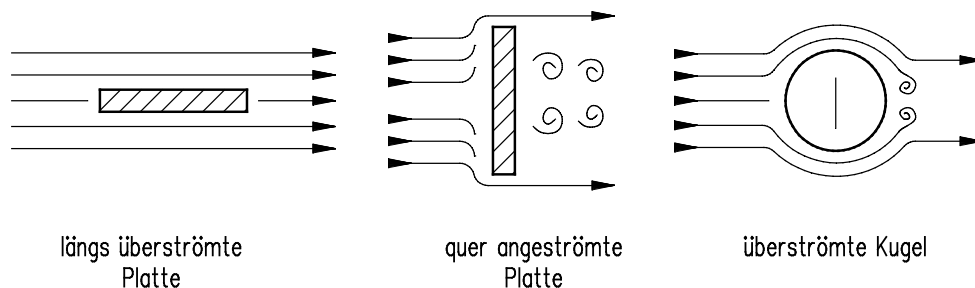


Abbildung 126 Widerstände bei Strömungen

Aufgabe 1

Beschreiben Sie Festkörper, Flüssigkeiten und Gase anhand der Zustandsänderungen des Volumens und der Form!

Aufgabe 2

Wie wird das inkompressible Verhalten von Flüssigkeiten in der Technik ausgenutzt?

Aufgabe 3

Beschreiben Sie den Schweredruck bei Flüssigkeiten!

Aufgabe 4

Was ist das Hydrostatische Paradoxon?

Aufgabe 5

Wie verhält sich die Gewichtskraft eines Körpers und die Auftriebskraft einer Flüssigkeit beim Sinken, Schweben und Steigen des Körpers?

Aufgabe 6

Was bedeutet Viskosität?

Aufgabe 7

Was sind Kohäsionskräfte und Adhäsionskräfte?

Aufgabe 8

Wie entsteht eine Oberflächenspannung?

Aufgabe 9

Ein Schlauch mit einer kreisrunden Öffnung mit einem Durchmesser von $d = 10 \text{ mm}$ soll mit einem Druckventil abgesperrt werden.

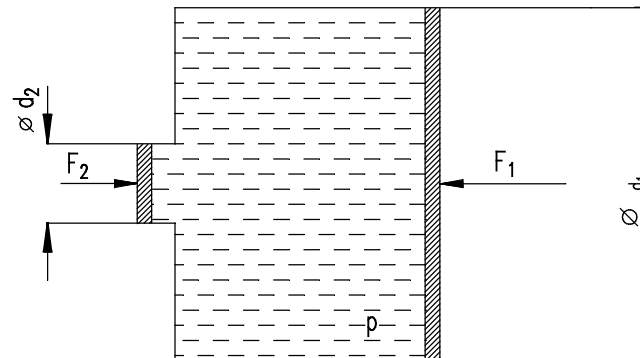
Wie groß muss die Schließkraft des Ventils sein, wenn ein Wasserdruck von 4 bar im Schlauch herrscht?

Aufgaben

Aufgabe 10

In einem Gefäß mit zwei kreisrunden Kolben herrscht ein Überdruck von 6 bar.

Wie groß sind, bei Vernachlässigung der Reibung, die beiden Kräfte, die auf die Kolben wirken, wenn die Durchmesser $d_1 = 80 \text{ mm}$ und $d_2 = 20 \text{ mm}$ betragen?



Aufgabe 11

Ein Körper hängt an einem Kraftmesser, der eine Gewichtskraft von $F_{\text{GKör.}} = 10 \text{ N}$ anzeigt. Auf einer Waage steht eine Schale mit Wasser und zeigt eine Gewichtskraft von $F_{\text{GSchale}} = 20 \text{ N}$ an. Wird der Körper vollständig in das Wasser eingetaucht, zeigt der Kraftmesser die Größe von $F_{\text{G}} = 6 \text{ N}$ an.

Wie groß ist nun die Gewichtskraft der Schale, die von der Waage angezeigt wird?

Aufgabe 12

Eine Düse mit einer Ausflusszahl μ von 1 soll 60 l Flüssigkeit je Minute aus einem offenen Behälter fließen lassen. Der gleichbleibende Flüssigkeitsspiegel liegt 3 m oberhalb des Austritts.

Berechnen Sie den Durchmesser der kreisrunden Düsenöffnung!

Aufgabe 13

Ein hydraulischer Hebebock arbeitet mit einem Flüssigkeitsdruck von bis zu 80 bar. Er soll am Lastkolben eine Last von 200 kN heben können.

Berechnen Sie ohne Berücksichtigung der Reibung den Durchmesser des Lastkolbens, wenn am Antriebskolben eine Kraft von 3 kN wirkt und er einen Durchmesser von 15 cm hat!

Aufgabe 14

Berechnen Sie den Bodendruck bei einer Meerestiefe von 7200 m!

Die Dichte von Salzwasser beträgt konstant $\rho = 1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Aufgabe 15

In einem Wasserbehälter liegt 5 m unter der Wasseroberfläche eine kreisrunde Öffnung mit einem Durchmesser von 50 mm.

Mit welcher Kraft muss von außen ein Verschlussdeckel gegen die Öffnung gepresst werden?

Aufgabe 16

Es sollen 120 l Wasser je Minute durch eine 300 m lange Rohrleitung bergauf gepumpt werden. Die Strömungsgeschwindigkeit soll $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bei Vernachlässigung der Reibung nicht überschreiten. Der Höhenunterschied, der überwunden werden soll, beträgt 20 m.

16.1 Wie groß ist der innere Rohrdurchmesser (auf mm aufrunden)?

16.2 Wie groß ist bei diesem Durchmesser die tatsächliche Strömungsgeschwindigkeit?

16.3 Wie groß ist der kinetische Druck?

16.4 Wie groß ist der Druck am unteren Rohrende, wenn auf der gesamten Leitungslänge der Druckabfall $\Delta p = 4,022 \text{ bar}$ beträgt?

**Realisierung
Komplexaufgabe
„Planung eines
Notauslaufes“**

Der Freistaat Bayern schreibt die Sanierung einer Landstraße im Bayerischen Wald aus. Die Straßenbaufirma, bei der Sie beschäftigt sind, erhält den Auftrag für die Arbeiten. Da die Planung zur Sanierung dieser Straße für einen Techniker zu umfangreich ist, unterteilt der zuständige Projektleiter Ihrer Firma die Planung in einzelne Elemente, die er dann verschiedenen Technikern zuordnet. Die Ihnen zugeteilte Aufgabe bei diesem Projekt ist die Sanierung einer Spitzkehre, insbesondere die Berechnung der physikalischen Daten des nachfolgend beschriebenen Notauslaufs.

Die zu sanierende Landstraße wird sowohl von Personenkraftwagen mit einer Masse von $m_{PKW} = 800 \text{ kg}$, als auch vom Schwerlastverkehr bis zu einer Last von $m_{LKW} = 40 \text{ t}$ genutzt. Die zulässige Höchstgeschwindigkeit in diesem zu projektierenden Teilstück ist, auf Grund des hohen Aufkommens des Schwerlastverkehrs, auf $v = 60 \text{ km/h}$ begrenzt. Trotz dieser Geschwindigkeitsbegrenzung kam es immer wieder zu schweren Unfällen von Lastkraftwagen, da die Bremsen der Fahrzeuge auf diesem bergigen Abschnitt oft überhitzen und damit versagen. Das Gefälle der Straße vor dieser Kurve beträgt 9 %. Die Straßenplaner des Freistaates haben aus diesem Grund ein passendes Steilgelände am Kurvenanfang zur Verfügung gestellt, um dort einen Notauslauf oder Notberg zu bauen, um das Unfallrisiko zu vermindern. Als Hilfestellung haben Ihnen die Planer ein Lichtbild zur Verfügung gestellt. Auf diesem ist ein Notauslauf zu sehen, den Sie als Muster für Ihre Planung verwenden sollen. Für den Straßenbelag der Steigung des Notauslaufs ist ein Betonboden ausgeschrieben worden. Die Auslaufstrecke soll in einer Kiesmulde enden, wo die Restgeschwindigkeit der defekten Fahrzeuge abgebremst wird.



Als Vorgabe aus der DIN darf der Notauslauf auf einer Länge von 100 m geradlinig nicht mehr als um 20 % der Gesamtlänge steigen. Das Straßenbauamt fordert zusätzlich, auf Grund des Gefälles der Straße, eine Sicherheit von 30 % der Richtgeschwindigkeit. Da sich hinter der Steigung das Kiesfeld befindet, muss die Geschwindigkeit am Ende des Nothalts nur auf $v_E = 5 \text{ km/h}$ vermindert werden. Die Restgeschwindigkeit wird durch den Kies abgebremst.

Die Rollreibung der Räder soll bei der Berechnung vernachlässigt werden, da sie bei diesem kurzen Bremsweg keine Rolle spielt. Aus Sicherheitsgründen soll eine evtl. noch vorhandene Rest-Bremsleistung nicht berücksichtigt werden!

Der Projektleiter Ihrer Firma erwartet von Ihnen die Planung des Notauslaufs. Er benötigt von Ihnen genaue Abschätzung der Länge und der Höhe der Auslaufstrecke, um diese den Straßenbauern Ihrer Firma als Anleitung zur Verfügung zu stellen.

Führen Sie die erforderlichen Berechnungen durch!

Lösungsanhang

Lösungen

1 Messen und Maßeinheiten in der Physik

Aufgabe 1

In den Naturwissenschaften werden Probleme oder Phänomene der Natur wissenschaftlich untersucht.

Aufgabe 2

Die Physik stellt sich die Aufgabe, die Bestandteile der Materie und ihre Wechselwirkung zu untersuchen. Auf der Basis der Wechselwirkungen erklärt die Physik die Eigenschaften der Stoffe und anderer natürlicher Phänomene.

Aufgabe 3

Die Makrophysik beschäftigt sich mit Körpern oder Materie in einer Größenordnung von $l > 10^{-6}$ m, wie sie zum Beispiel in der Mechanik, Thermodynamik, Elektrizitätslehre, Schwingungslehre, Optik, Akustik und dem Magnetismus vorkommen. Die Mikrophysik beschäftigt sich mit Körpern oder Materie in einer Größenordnung von $l < 10^{-6}$ m, wie sie zum Beispiel in der Atom-, Kern- und Elementarphysik vorkommen.

Aufgabe 4

Jede physikalische Größe G besteht aus einer quantitativen Aussage $\{G\}$ (ausgedrückt durch eine Maßzahl) und einer qualitativen Aussage $[G]$ (ausgedrückt durch die Maßeinheit).

$$G = \{G\} [G]$$

Aufgabe 5

Die sieben SI-Basisgrößen in der Physik heißen:

- Zeit t in Sekunden (s)
- Länge l in Meter (m)
- Masse m in Kilogramm (kg)
- elektrische Stromstärke I in Ampere (A)
- Temperatur T in Kelvin (K)
- Lichtstärke I in Candela (cd)
- Stoffmenge n in Mol (mol)

2 Mechanik der festen Körper

Aufgabe 1

Masse m ist ein Maß für die Stoffmenge eines Körpers (die Anzahl der Atome oder Ionen des Körpers). Die Masse ist unabhängig vom Ort überall gleich. Die Einheit ist kg. Die Dichte ρ beschreibt die Masse pro Volumeneinheit.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{Die Einheit ist } \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

Aufgabe 2

In der Physik werden alle Gegenstände der Natur, die sich aus den Grundbausteinen Molekül und Atom zusammensetzen, als Körper bezeichnet.

Aufgabe 3

Ein Atom ist der kleinste Bestandteil eines chemischen Elements, der noch die Eigenschaft des Elementes hat. Es besteht aus Protonen, Neutronen und Elektronen. Die Anzahl der Elektronen und Protonen sind gleich und ein Atom ist somit nach außen elektrisch neutral. Ionen sind Atome nach Aufnahme oder Abgabe von Elektronen. Sie sind nicht mehr elektrisch neutral.

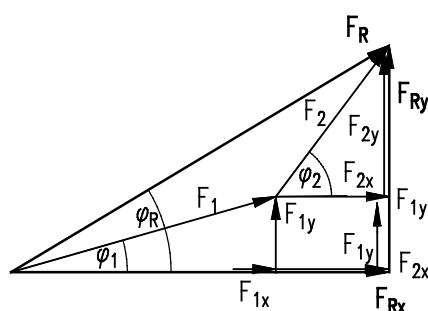
Aufgabe 4

Um einen Kraftvektor eindeutig bestimmen zu können müssen:

1. der Betrag,
2. die Wirklinie und
3. der Richtungssinn des Vektors bekannt sein.

Aufgabe 5

Ein Kraftvektor in der Ebene besteht aus einer x- und einer y-Komponente. Um zwei Kräfte miteinander zu addieren muss jede Kraft erst in die x- und y-Komponente zerlegt werden. Danach werden einzelne Komponenten addiert und man erhält den x- bzw. y-Anteil der resultierenden Kraft. Durch die Anwendung des Satzes des Pythagoras bzw. der Winkelfunktionen erhält man den Betrag und den Winkel der resultierenden Kraft F_R .



$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x}$$

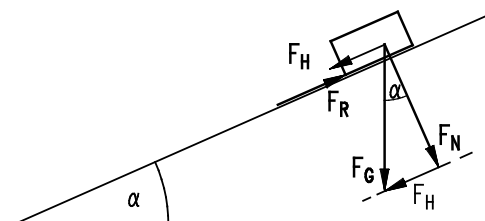
$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$\tan \varphi_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

Aufgabe 6

Schiefe Ebene:



F_G : Gewichtskraft

F_N : Normalkraft

F_H : Hangabtriebskraft

F_R : Reibungskraft

α : Neigungswinkel

Aufgabe 7

Die Haftreibung tritt auf, wenn auf einen Körper eine Kraft in eine Verschieberichtung wirkt, der Körper aber auf Grund der Reibung nicht bewegt wird. Die Gleitreibung tritt auf, wenn ebenfalls eine Kraft in Verschieberichtung auf einen Körper wirkt, aber der Körper durch diese Kraft bewegt wird. Die Reibungskraft wirkt gegen die Antriebskraft und vermindert somit ihre Stärke.

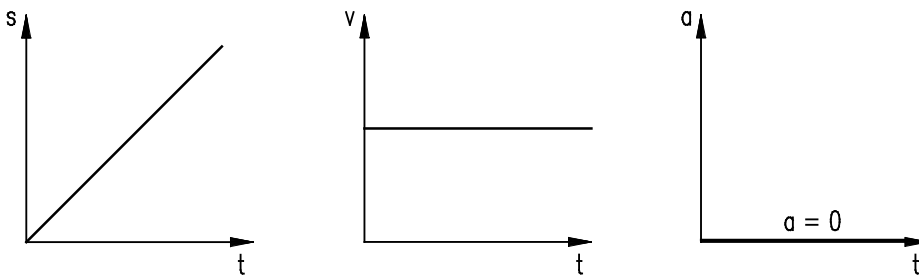
Aufgabe 8

Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der linksdrehenden Momente gleich der Summe der rechtsdrehenden Momente ist.

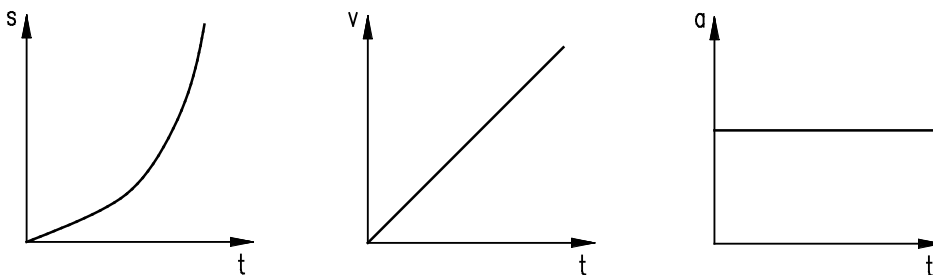
$$\sum M_{\text{links}} = \sum M_{\text{rechts}}$$

Aufgabe 9.1

Gradlinige, gleichförmige Bewegung:

**Aufgabe 9.2**

Gradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung:

**Aufgabe 10**

Potenzielle Arbeit ist die Arbeit der Lage. Um die Lage eines Körpers zu ändern muss an ihm potenzielle Arbeit verrichtet werden ($W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$). Kinetische Arbeit ist die Arbeit der Bewegung. Um die Bewegung eines Körpers zu ändern, muss an ihm kinetische Arbeit verrichtet werden ($W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$).

Aufgabe 11

Energie wird in einem Prozess niemals verbraucht, sondern in andere Energiearten umgewandelt. Die Energie am Ende eines Vorgangs ist gleich der Anfangsenergie plus der zugeführten Arbeit abzüglich der abgegebenen Arbeit.

$$E_{\text{End}} = E_{\text{Anf}} + W_{\text{zu}} - W_{\text{ab}}$$

Aufgabe 12

Die mechanische Leistung P ist gleich der verrichteten Arbeit W pro Zeitabschnitt $P = W/t$. Sie kann in Nm/s oder W angegeben werden. Der Wirkungsgrad η ist das Verhältnis der abgegebenen Arbeit oder Leistung zur aufgewendeten Arbeit oder

Leistung $\eta = \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}} = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$. Der Wirkungsgrad liegt im Bereich von $0 \leq \eta < 1$.

Aufgabe 13

$$F_N = 460,9 \text{ N}$$

$$F_R = F_H = 167,8 \text{ N}$$

Aufgabe 14

$$\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$l = 130 \text{ m}$$

Aufgabe 15

$$\alpha = 6,34^\circ$$

$$F_S = 444,2 \text{ N}$$

Aufgabe 16

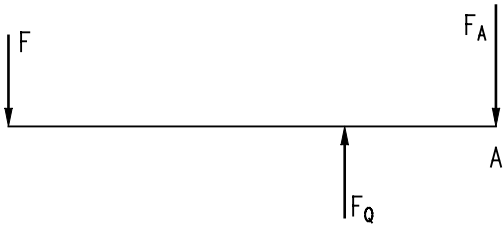
Die Kräfte werden entlang der Stäbe übertragen.

$$F_A = 4 \text{ kN}$$

$$F_B = 7,25 \text{ kN}$$

Aufgabe 17

Freimachen des Bauteiles und Aufstellen der statischen Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 = -F + F_Q - F_A$$

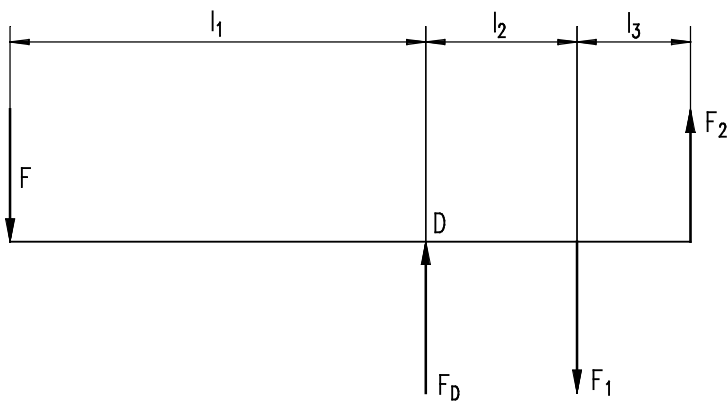
$$\sum M_{(A)} = 0 = -F_Q \cdot l_2 + F \cdot (l_1 + l_2)$$

$$F = 0,2 \text{ N}$$

$$F_A = 1 \text{ N}$$

Aufgabe 18

„Freimachen“ des Bauteiles und Aufstellen der statischen Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 = -F + F_D - F_1 + F_2$$

$$\sum M_{(D)} = 0 = +F \cdot l_1 - F_1 \cdot l_2 + F_2 \cdot (l_2 + l_3)$$

$$F_1 = 490,5 \text{ N}$$

$$F_2 = 196,2 \text{ N}$$

Aufgabe 18.1

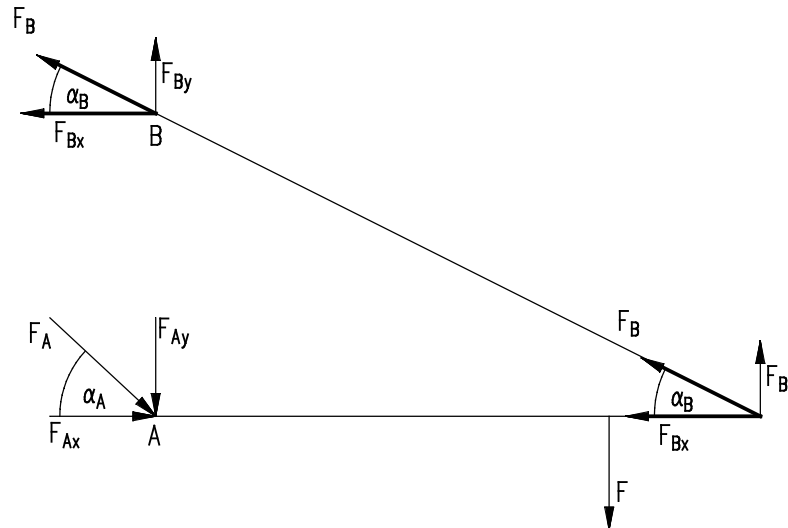
$$F = 61,31 \text{ N}$$

Aufgabe 18.2

$$F_S = 2 \cdot F_2 + F_{\text{GRolle}} = 442,4 \text{ N}$$

Aufgabe 19

Freimachen des Bauteiles und Aufstellen der statischen Gleichgewichtsbedingungen:



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &= F_{Ax} - F_{Bx} \\ \sum F_y = 0 &= -F_{Ay} - F + F_{By} \\ \sum M_{(A)} = 0 &= -F \cdot (l_g - l_1) + F_B \cdot \cos \alpha_B \cdot l_3 \end{aligned}$$

$$\alpha_B = 26,57^\circ$$

$$F_B = 10,06 \text{ kN}$$

$$F_{Ax} = 8,998 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = -1,502 \text{ kN}$$

$$F_A = 9,123 \text{ kN}$$

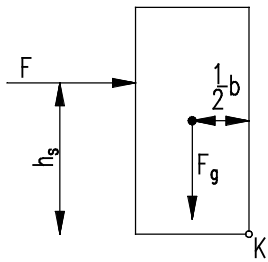
Das negative Vorzeichen bei F_{Ay} gibt an, dass diese Kraft entgegen der angenommenen Richtung wirkt!

Aufgabe 20.1

$$F = 360 \text{ N}$$

Aufgabe 20.2

$$F = 300 \text{ N}$$

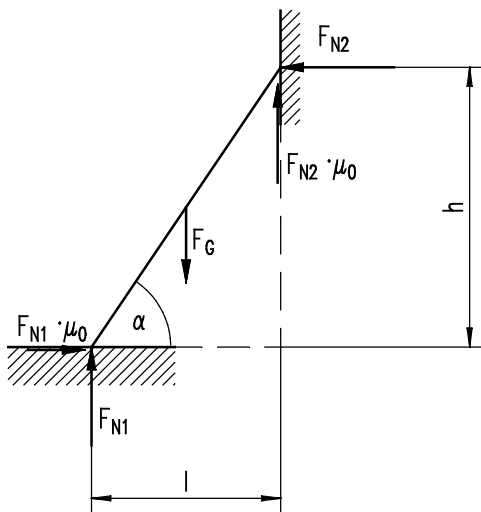
Aufgabe 20.3

$$\sum M_{(K)} = 0 = -F \cdot \mu_0 \cdot h_s + F_G \cdot \frac{1}{2} \cdot b$$

$$h_s = 1,67 \text{ m}$$

Aufgabe 20.4

$$W = 1200 \text{ J}$$

Aufgabe 21

$$\text{I} \quad \sum F_x = 0 = F_{N1} \cdot \mu_0 - F_{N2}$$

$$\text{II} \quad \sum F_y = 0 = F_{N1} - F_G + F_{N2} \cdot \mu_0$$

$$\text{III} \quad \sum M_{(1)} = 0 = -F_G \cdot \frac{1}{2} l + F_{N2} \cdot \mu_0 \cdot l + F_{N2} \cdot h$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \cdot \tan \alpha$$

$$\text{I} \quad F_{N1} = \frac{F_{N2}}{\mu_0} \text{ in II eingesetzt}$$

$$\text{II} \quad F_G = \frac{F_{N2}}{\mu_0} + F_{N2} \cdot \mu_0 \text{ in III eingesetzt}$$

$$0 = \left(\frac{F_{N2}}{\mu_0} + F_{N2} \cdot \mu_0 \right) \cdot \frac{1}{2} l - F_{N2} \cdot \mu_0 \cdot l - F_{N2} \cdot l \cdot \tan \alpha$$

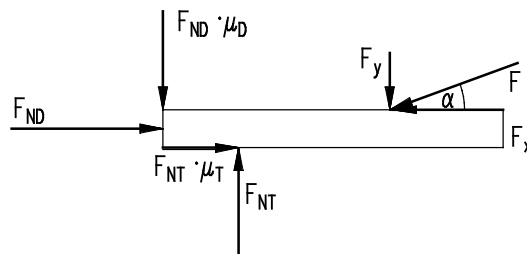
$$0 = \frac{1}{2} l \cdot F_{N2} \left(\frac{1 + \mu_0^2}{\mu_0} \right) - l \cdot F_{N2} \cdot \mu_0 - l \cdot F_{N2} \cdot \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \mu_0^2}{\mu_0} \right) - \mu_0$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{1 + \mu_0^2}{2 \cdot \mu_0} - \mu_0 \right)$$

$$\alpha = \underline{\underline{67,4^\circ}}$$

Aufgabe 22



Aufgabe 22.1

$$\text{I} \quad \sum F_x = 0 = F_{ND} + F_{NT} \cdot \mu_T - F \cdot \cos \alpha$$

$$\text{II} \quad \sum F_y = 0 = -F_{ND} \cdot \mu_D + F_{NT} - F \cdot \sin \alpha$$

$$\text{I} \quad F_{ND} = F \cdot \cos \alpha - F_{NT} \cdot \mu_T \quad \text{eingesetzt in II}$$

$$\text{II} \quad 0 = -(F \cdot \cos \alpha - F_{NT} \cdot \mu_T) \cdot \mu_D + F_{NT} - F \cdot \sin \alpha$$

$$0 = -F \cdot \mu_D \cdot \cos \alpha + F_{NT} \cdot \mu_T \cdot \mu_D + F_{NT} - F \cdot \sin \alpha$$

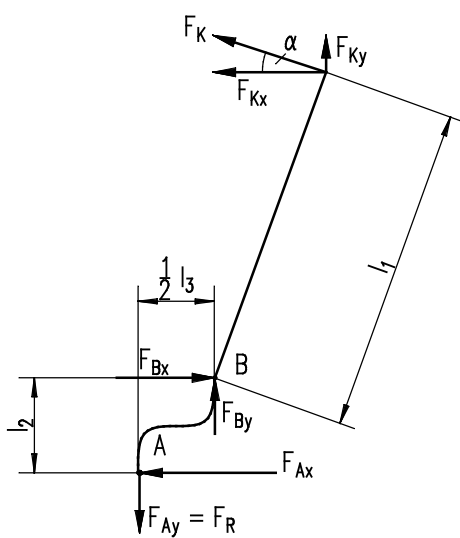
$$F \cdot \sin \alpha + F \cdot \mu_D \cdot \cos \alpha = F_{NT} + F_{NT} \cdot \mu_T \cdot \mu_D$$

$$F(\sin \alpha + \mu_D \cos \alpha) = F_{NT}(1 + \mu_T \mu_D)$$

$$\frac{F(\sin \alpha + \mu_D \cos \alpha)}{1 + \mu_T \mu_D} = F_{NT} = \underline{\underline{202,2 \text{ N}}}$$

Aufgabe 22.2

$$\underline{\underline{F_{ND} = 194,48 \text{ N}}}$$

Aufgabe 23

$$F_{Ay} = \frac{1}{2} F_G$$

$$F_{Kx} = F_K \cos \alpha$$

$$F_{Ky} = F_K \sin \alpha$$

$$F_K = \frac{F_G}{2 \cdot \sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \sum F_x = 0 &= -F_{Ax} + F_{Bx} - F_K \cdot \cos \alpha \\ \text{II} \quad \sum F_y = 0 &= -F_{Ay} + F_{By} + F_K \cdot \sin \alpha \\ \text{III} \quad \sum M_{(B)} = 0 &= F_K \cdot l_1 + F_{Ay} \cdot \frac{l_3}{2} - F_{Ax} \cdot l_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 23.1

$$\begin{aligned} F_K &= \frac{F_G}{2 \cdot \sin \alpha} \\ &= \underline{\underline{23,18 \text{ kN}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 23.2

$$\begin{aligned} \text{III} \quad F_{Ax} &= \frac{F_K \cdot l_1 + \frac{1}{2} F_G \cdot \frac{l_3}{2}}{l_2} \\ &= 80,27 \text{ kN} \end{aligned}$$

Aufgabe 23.3

$$F_R = 6 \text{ kN} \quad (\max. \frac{1}{2} \text{ Gewichtskraft pro Haltebacke})$$

Aufgabe 24.1

$$a = 2,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Aufgabe 24.2

$$s = 37,5 \text{ m}$$

Aufgabe 25

$$t = 20 \text{ s}$$

Aufgabe 26

$$h = 88,6 \text{ m}$$

Aufgabe 27.1

$$v_0 = 29,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 27.2

$$h = 44,14 \text{ m}$$

Aufgabe 28

$$\omega = 0,105 \frac{1}{\text{s}}$$

Aufgabe 29.1

$$s = 220,5 \text{ m}$$

Aufgabe 29.2

$$h = 95,4 \text{ m}$$

Aufgabe 29.3

$$v_E = v_0 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 30.1

$$h = 4,08 \text{ m}$$

Aufgabe 30.2

$$W_{\text{kin}} = W_{\text{pot}} = 20 \text{ J}$$

Aufgabe 31

$$W_{\text{kinAuf}} = W_{\text{kinAb}} = 19,62 \text{ J}$$

Aufgabe 32

$$W_{\text{pot1}} = W_{\text{kin2}} = m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$$

$$v_2 = 6,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 33

$$P_{\text{zu}} = 2,264 \text{ kW}$$

3 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase**Aufgabe 1**

Festkörper haben ein bestimmtes Volumen und eine bestimmte Form. Bei Volumen- und Formänderungen zeigen sie einen sehr großen Widerstand. Flüssigkeiten haben ein bestimmtes Volumen aber keine bestimmte Form. Sie zeigen einen kleinen Widerstand gegen Formänderungen, aber einen großen bei Volumenänderungen. Gase haben weder ein bestimmtes Volumen noch eine bestimmte Form. Bei Formänderungen und mittlerer Volumenänderung zeigen sie kaum Widerstand.

Aufgabe 2

Durch die Inkompressibilität der Flüssigkeiten pflanzt sich der Druck, der auf eine Flüssigkeit wirkt, nach allen Seiten gleich groß fort.

Anwendungen in der Technik: hydr. Kolbenpresse, hydr. Bremsanlage

Aufgabe 3

Der Druck in jeder waagerechten Fläche einer Flüssigkeit ist konstant. Auf Grund der eigenen Gewichtskraft der Flüssigkeit ändert sich der Druck bei einer Höhenänderung. Der Druck, der seine Ursache in der eigenen Gewichtskraft hat, wird Schweredruck genannt. Der Schweredruck ist das Produkt aus der Dichte ρ der Flüssigkeit, der Erdbeschleunigung g und der Druckhöhe h ($p_h = \rho \cdot g \cdot h$). Die Einheit ist Pascal Pa.

Aufgabe 4

Der Schweredruck einer Flüssigkeit ist unabhängig von der Form des Flüssigkeitsgefäßes und dem Volumen der Flüssigkeit.

Aufgabe 5

Ist die Auftriebskraft kleiner als die Gewichtskraft, sinkt der Körper in der Flüssigkeit. Sind die beiden Kräfte gleich, schwebt der Körper. Ist die Auftriebskraft größer als die Gewichtskraft, steigt der Körper auf.

Aufgabe 6

Viskosität bedeutet die Zähigkeit einer Flüssigkeit. Sie kommt beim Ausfluss aus einem Gefäß zum Tragen. Je zäher eine Flüssigkeit ist, desto langsamer fließt sie aus.

Aufgabe 7

Kohäsionskräfte sind Kräfte, die einen elektrischen Ursprung haben. Sie wirken zwischen den gleichartigen Atomen und Molekülen eines Stoffes. Adhäsionskräfte sind Anhangs- oder Anziehungskräfte zwischen Atomen oder Molekülen zweier unterschiedlicher Stoffe. Sie haben ihre Ursache in der Elektrostatik.

Aufgabe 8

Kohäsionskräfte innerhalb einer Flüssigkeit heben sich auf Grund der allseitigen Umlagerung der Moleküle auf. An der Oberfläche einer Flüssigkeit fehlen die nach außen gerichteten Kräfte. Hieraus ergibt sich eine resultierende Kraft, die ins Innere der Flüssigkeit gerichtet ist. Um Flüssigkeitsmoleküle an die Oberfläche zu bekommen muss eine Arbeit verrichtet werden. Somit ist an der Oberfläche eine Energie gespeichert, die Oberflächenenergie.

Aufgabe 9

$$F = 31,41 \text{ N}$$

Aufgabe 10

$$F_1 = 3016 \text{ N}$$

$$F_2 = 188,5 \text{ N}$$

Aufgabe 11

$$F = 24 \text{ N}$$

Aufgabe 12

$$\dot{V} = 1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$A = \frac{\dot{V}}{\mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$

$$d = 13 \text{ mm}$$

Aufgabe 13

$$d_2 = 122,5 \text{ cm}$$

Aufgabe 14

$$p = 727,5 \text{ bar}$$

Aufgabe 15

$$F = \rho \cdot g \cdot A \cdot y_0 = 96,3 \text{ N}$$

Aufgabe 16.1

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot v}} = 36 \text{ mm}$$

Aufgabe 16.2

$$v = \frac{\dot{V}}{A} = 1,965 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 16.3

$$p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = 1930 \text{ Pa} = 0,0193 \text{ bar}$$

Aufgabe 16.4

$$p_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + \Delta p = 6,003 \text{ bar}$$

Komplexaufgabe „Planung eines Notauslaufes“

Die Fahrzeuge werden auf Grund der Hangabtriebskraft F_H der schiefen Ebene abgebremst.

Gegeben: $m_{PKW} = 800 \text{ kg}$
 $m_{LKW} = 40 \text{ t}$
 $v_{\max} = 60 \text{ km/h}$
 $v_{Si\%} = 30 \%$
 $l_{DIN} = 100 \text{ m}$
 $h_{DIN} = 20 \text{ m}$
 $v_E = 5 \text{ km/h} = 1,38 \text{ m/s}$

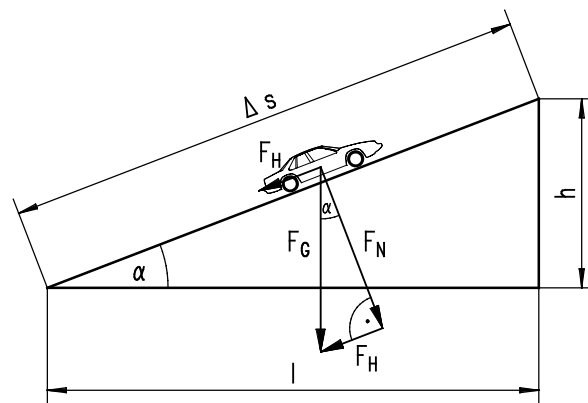


Abbildung 127

$$\tan \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{20 \text{ m}}{100 \text{ m}} \quad (\text{bei } 20 \% \text{ Steigung})$$

$$\alpha = 11,3^\circ$$

$$v_A = v_{\max} + v_{\max} \cdot 30 \% = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 30 \%$$

$$v_A = 78 \text{ km/h} = 21,66 \text{ m/s}$$

Energieerhaltungssatz

$$W_{\text{pot}} = \Delta W_{\text{kin}}$$

$$W_{\text{pot}} = W_{\text{kin 1}} - W_{\text{kin 2}}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$

$$h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g}$$

$$h = \frac{\left(21,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(1,38 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$\underline{\underline{h = 23,81 \text{ m}}}$$

$$\tan \alpha = \frac{GK}{AK}$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{l}$$

$$l = \frac{h}{\tan \alpha}$$

$$l = \frac{23,81 \text{ m}}{\tan 11,3^\circ}$$

$$\underline{\underline{l = 119,16 \text{ m}}}$$

$$\Delta s = \sqrt{l^2 + h^2} = \sqrt{(119,16 \text{ m})^2 + (23,81 \text{ m})^2}$$

$$\underline{\underline{\Delta s = 121,5 \text{ m}}}$$

Für den Notauslauf muss ein Platz mit einer Länge von $l = 119,2 \text{ m}$ bereitgestellt werden. Die Fahrzeuge überwinden bei einer Bremsstrecke von $\Delta s = 121,5 \text{ m}$ einen Höhenunterschied von $h = 23,8 \text{ m}$.