

# MUSTERKLAUSUR

Fach: **Mathematik**

Zeit: 90 min

Hilfsmittel: Modul Formeln  
(vom Prüfling zur Prüfung mitzubringen)

---

Diese Musterklausur ist als inhaltliches **und** zeitliches Training zur Vorbereitung auf die Klausur dieses Faches zu verstehen und zu bearbeiten.

---

## Prozentverteilung der Aufgaben

Aufgabe 1:	10
Aufgabe 2:	10
Aufgabe 3:	15
Aufgabe 4:	15
Aufgabe 5:	15
Aufgabe 6:	20
Aufgabe 7:	15

Summe: 100



**Aufgabe 1** (Thema: „Zahlen kennen und Grundrechenarten anwenden“  
**hier nur:** Termumformungen und/oder Lösen einer Gleichung)

*Berechnen Sie den Term und vereinfachen Sie so weit wie möglich!*

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x - y) + (x + y)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

**Aufgabe 2** (Thema: „Funktionen und Gleichungen erster Ordnung einordnen und anwenden“  
**hier nur:** Lineare Funktionen und/oder Gleichungssysteme)

Zwei Geraden g und h schneiden sich im Punkt S. Die Gerade g verläuft durch die Punkte P (0;1) und Q (5;2), die Gerade h durch die Punkte R (2;2) und T (5;0).

2.1 *Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S!*

2.2 *Kontrollieren Sie das Ergebnis mithilfe einer Zeichnung!*

**Aufgabe 3** (Thema: „Funktionen und Gleichungen höherer Ordnung anwenden“  
**hier nur:** Quadratische Funktionen und/oder Quadratische Gleichungen)

Eine Parabel mit  $f(x) = x^2 - 2$  wird von einer Geraden mit  $g(x) = -2x + 2$  geschnitten.

3.1 *Zeichnen Sie die beiden Grafen in ein Koordinatensystem und berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q!*

3.2 *Bestimmen Sie den Achsenabschnitt b so, dass die Gerade  $g(x) = -2x + b$  eine Tangente an die Parabel ist!*

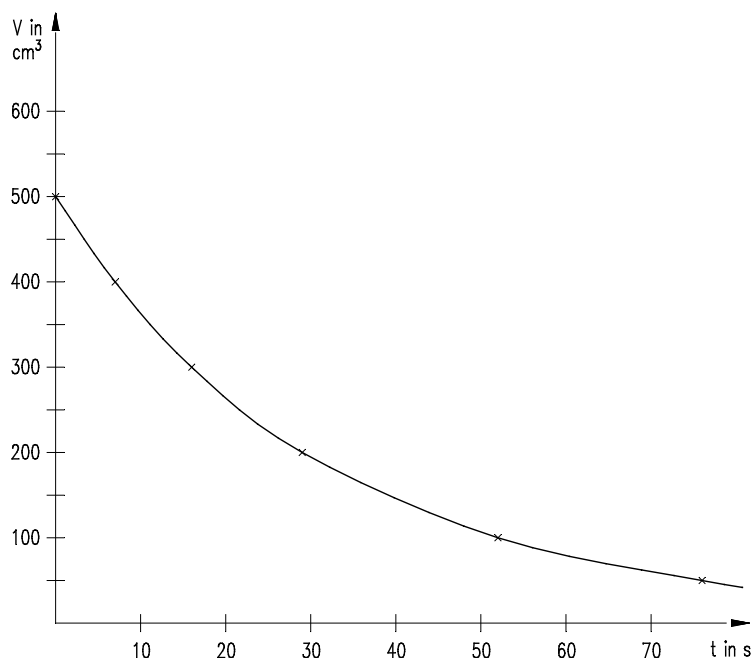
3.3 *Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes T!*

**Aufgabe 4** (Thema: „Funktionen und Gleichungen höherer Ordnung anwenden“  
**hier nur:** Allgemeine Potenzfunktionen und/oder Exponentialfunktionen  
 und/oder Logarithmusfunktionen)

In einen Kaffeefilter werden  $500 \text{ cm}^3$  heißes Wasser gegossen. Anschließend wird das Flüssigkeitsvolumen  $V$  im Filter in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  gemessen und in eine Tabelle eingetragen.

$V$	in $\text{cm}^3$	500	400	300	200	100	50
$t$	in s	0	7	16	29	52	76

4.1 Entnehmen Sie dem  $t$ - $V$ -Diagramm die Halbwertszeit  $t_H$ !



4.2 Stellen Sie die Gleichung der Kaffeefilter-Funktion auf, die das Volumen  $V$  im Filter in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  beschreibt!

4.3 Bestimmen Sie rechnerisch, wie viel  $\text{cm}^3$  Wasser nach 20 Sekunden noch im Filter sind!

4.4 Berechnen Sie, nach welcher Zeit sich noch  $150 \text{ cm}^3$  Wasser im Filter befinden!

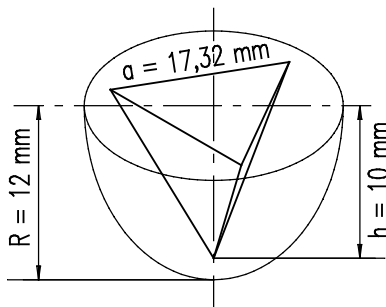


**Hinweis:** Stellen Sie bei allen folgenden Aufgaben zunächst die Formel mit den in der Aufgabe gegebenen Variablen auf. Setzen Sie erst dann die Größen (mit Einheiten) ein und berechnen Sie die gesuchte Größe!

Aufgabe 5 (Thema: „Geometrische Gesetze auf zwei- und dreidimensionale Figuren anwenden“  
**hier nur:** Volumen und Oberfläche von Körpern)

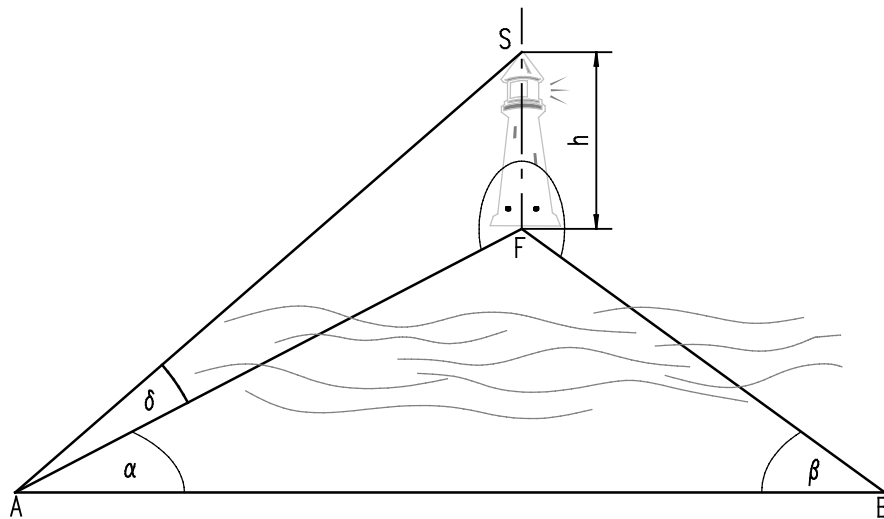
Ein Dorn, der die Form einer Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche hat, wird durch eine halbkugelförmige Kunststoffkappe geschützt.

*Berechnen Sie das Volumen der Kunststoffkappe!*



**Aufgabe 6** (Thema: „Geometrische Gesetze auf zwei- und dreidimensionale Figuren anwenden“  
**hier nur:** Trigonometrische Berechnungen am rechtwinkligen und/oder am allgemeinen Dreieck)

Um die Höhe eines Leuchtturmes zu bestimmen, steckt man am Strand eine Strecke  $\overline{AB}$  (Standlinie) ab und misst die Winkel.



$$\overline{AB} = 190 \text{ m}$$

$$\alpha = 53,4^\circ$$

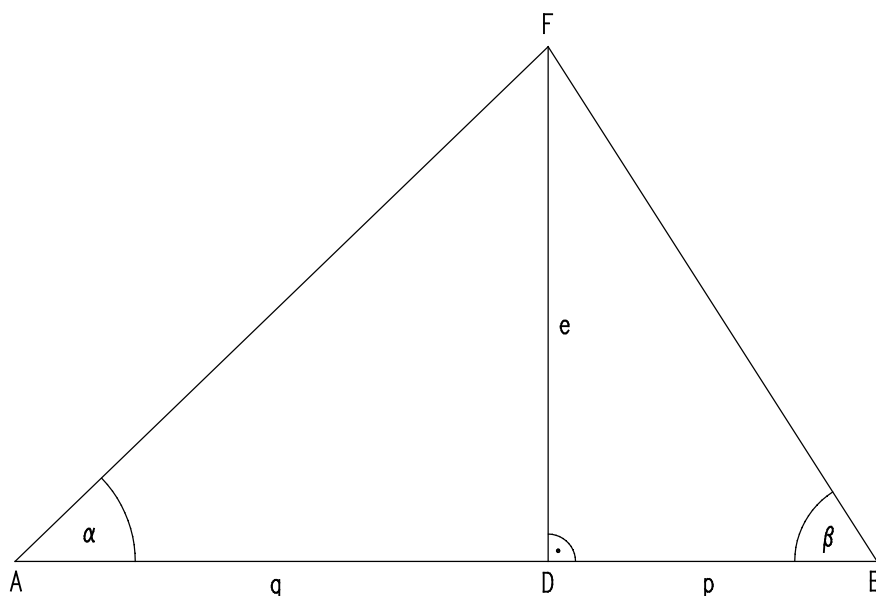
$$\beta = 74,5^\circ$$

$$\delta = 8,1^\circ$$

6.1 Berechnen Sie die Höhe des Leuchtturmes!

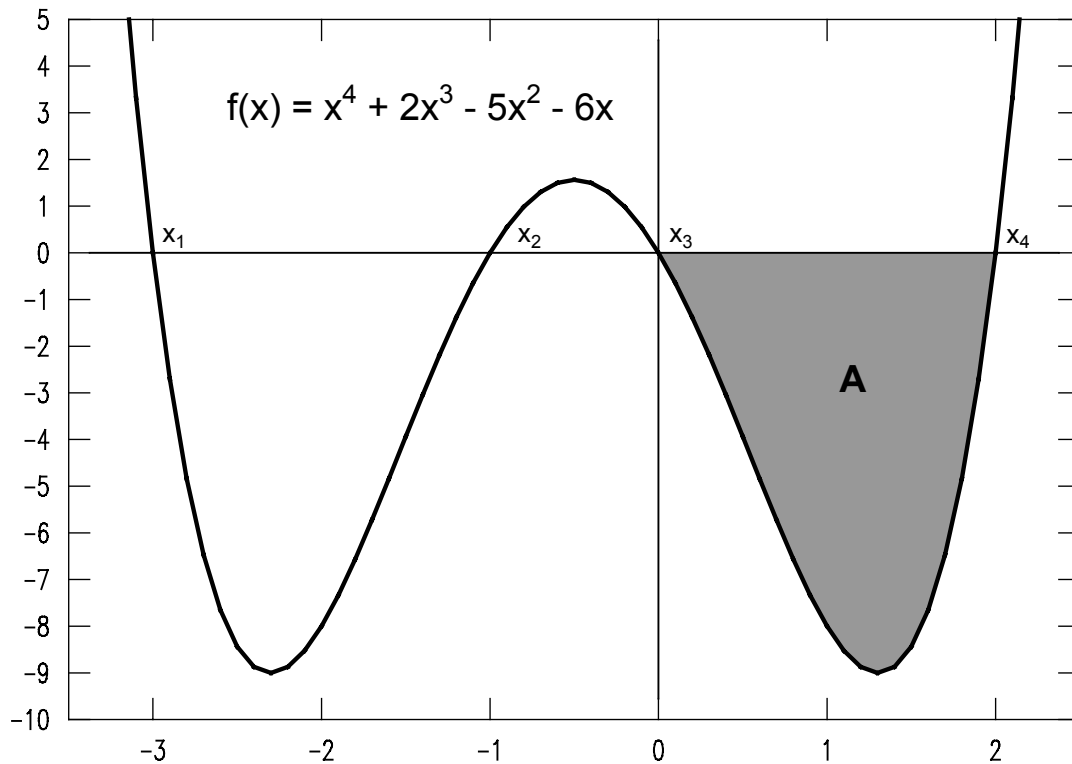
6.2 Berechnen Sie die Entfernung des Leuchtturmes von der Standlinie AB!

**Hinweis:** Zu Ihrer Information ist das Grunddreieck noch einmal - allerdings nicht maßstäblich - gezeichnet.



**Aufgabe 7** (Thema: „Grundlagen der Analysis und Vektorrechnung anwenden“  
hier nur: Differenzial- und Integralrechnung)

In der folgenden Abbildung ist ein Bereich der Funktion  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$  dargestellt.  
Die Funktion hat Nullstellen bei  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$  und  $x_4 = 2$ .



7.1 Berechnen Sie mithilfe der Integralrechnung die Fläche zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen im Intervall  $x_3 = 0$  bis  $x_4 = 2$ !

7.2 Ermitteln Sie die erste, zweite und die dritte Ableitung der Funktion  $f(x)$ !

# MUSTERLÖSUNG

Fach: **Mathematik**

Zeit: 90 min

Hilfsmittel: Modul Formeln  
(vom Prüfling zur Prüfung mitzubringen)

---

## Prozentverteilung der Aufgaben

Aufgabe	1:	10
Aufgabe	2.1:	8
	2.2:	2
Aufgabe	3.1:	7
	3.2:	4
	3.3:	4
Aufgabe	4.1:	2
	4.2:	4
	4.3:	2
	4.4:	7
Aufgabe	5:	15
Aufgabe	6.1:	14
	6.2:	6
Aufgabe	7.1:	9
	7.2:	6
Summe:		100

## Notenschlüssel

Note	Prozentsatz
1	100 bis 92
2	kleiner 92 bis 81
3	kleiner 81 bis 67
4	kleiner 67 bis 50
5	kleiner 50 bis 30
6	kleiner 30



### Aufgabe 1

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x-y) + (x+y)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

$$= 1 - \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 1 + 1 - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1$$

$$= 0$$

### Aufgabe 2.1

Gerade g: P(0;1)      Q(5;2)

$$\text{Steigungsfaktor } m: m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{5 - 0} = \frac{1}{5}$$

$$g(x) = 0,2x + b$$

Für P gilt:  $g(x) = 1$

$$1 = 0,2x + b$$

$$1 = 0,2 \cdot 0 + b$$

$$b = 1$$

$$g(x) = 0,2x + 1$$

$$\text{Gerade h: } m = \frac{0 - 2}{5 - 2} = -\frac{2}{3}$$

$$h(x) = -\frac{2}{3}x + b$$

Für R gilt:  $h(x) = 2$

$$2 = -\frac{2}{3}x + b$$

$$2 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + b$$

$$b = 3\frac{1}{3}$$

$$h(x) = -\frac{2}{3}x + 3\frac{1}{3}$$



Für den Schnittpunkt S gilt:

$$g(x) = h(x)$$

$$0,2x + 1 = -\frac{2}{3}x + 3\frac{1}{3}$$

$$\frac{26}{30}x = \frac{7}{3} \quad | : \frac{26}{30}$$

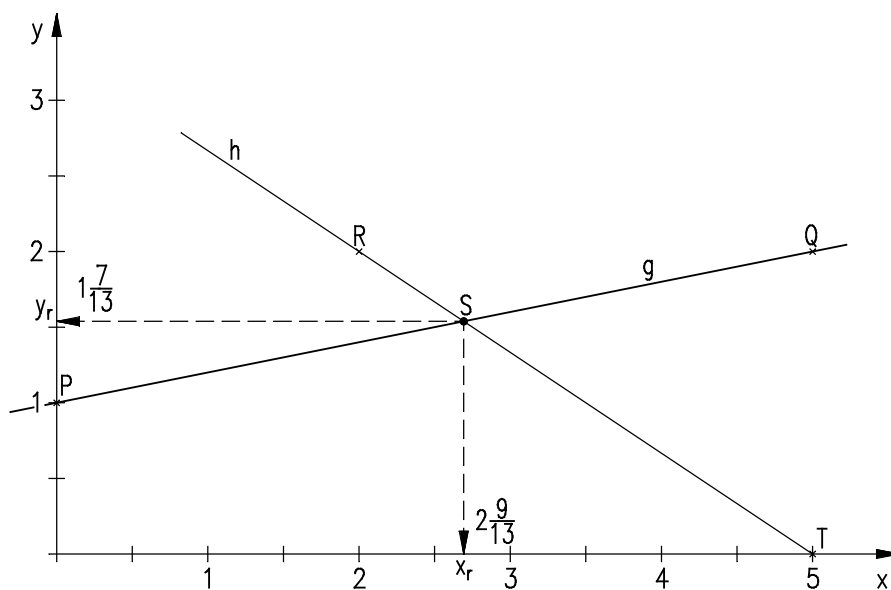
$$x = 2\frac{9}{13}$$

Eingesetzt in g(x):  $g(x) = y = 0,2 \cdot 2\frac{9}{13} + 1$

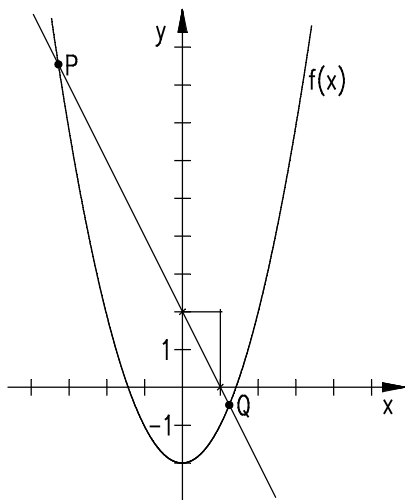
$$= 1\frac{7}{13}$$

Koordinaten S(2 9/13; 1 7/13)

### Aufgabe 2.2



### Aufgabe 3.1



Für die Schnittpunkte P und Q gilt:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 2 = -2x + 2$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{4 + 16}}{2}$$

$$x_1 \approx 1,24 \quad (= x_Q)$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{4 + 16}}{2}$$

$$x_2 \approx -3,24 \quad (= x_P)$$

Die x-Koordinaten in  $g(x) = -2x + 2$  eingesetzt:

$$y_Q = -2 \cdot x_Q + 2$$

$$y_Q = -2 \cdot 1,24 + 2$$

$$y_Q = -0,48$$

Koordinaten von Q(1,24;-0,48)

$$y_P = -2 \cdot x_P + 2$$

$$y_P = -2 \cdot (-3,24) + 2$$

$$y_P = 8,48$$

Koordinaten von P(-3,24;8,48)

### Aufgabe 3.2

Für die Bedingung: „ $g(x)$  ist Tangente an die Parabel“ muss folgende Bedingung erfüllt sein:

Diskriminante  $D = 0$

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 2 = -2x + b$$

$$x^2 + 2x - 2 - b = 0$$

$$x = -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

$$\text{wenn } D = 0 \quad (p/2)^2 - q = 0$$

$$(p/2)^2 = q$$

$$1 = -2 - b$$

$$b = -3$$

Tangentengerade  $g_T(x) = -2x - 3$

### Aufgabe 3.3

Für den Berührungspunkt T gilt:

$$f(x) = g_T(x)$$

$$x^2 - 2 = -2x - 3$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = x_T = -1$$

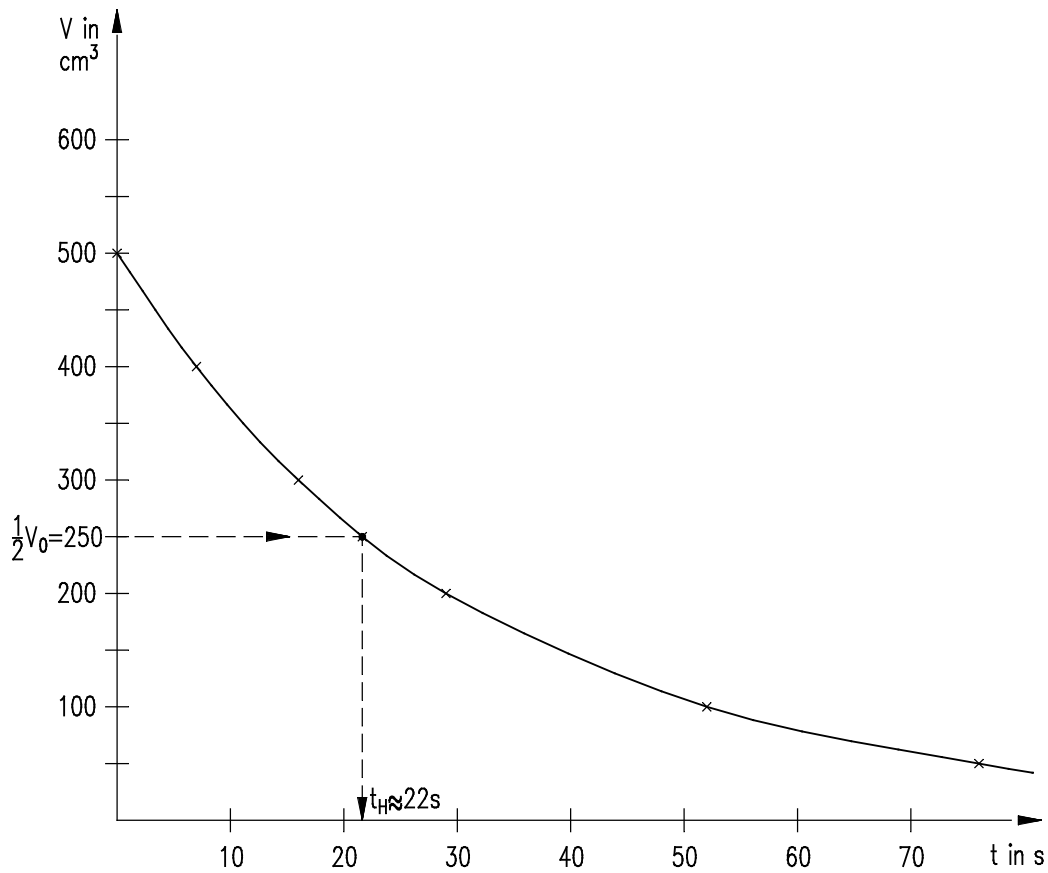
$$\text{Eingesetzt in } g_T(x) = y_T = -2x - 3$$

$$y_T = -2 \cdot (-1) - 3$$

$$y_T = -1$$

Koordinaten des Berührungspunktes  $T(-1; -1)$

#### Aufgabe 4



##### Aufgabe 4.1

Die Halbwertszeit  $t_H$  beträgt ungefähr 22 Sekunden:  $t_H \approx 22\text{ s}$ .

##### Aufgabe 4.2

$$V_t = V_0 (1/2)^{t/t_H}$$

##### Aufgabe 4.3

$$\begin{aligned} V_{20} &= V_0 \cdot (1/2)^{20/22} \\ &= 500\text{ cm}^3 \cdot (1/2)^{20/22} \\ &= 266,3\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

**Antwort:** Nach 20 Sekunden befinden sich noch 266,3 cm³ Wasser im Filter.

#### Aufgabe 4.4

$$V_t = 150 \text{ cm}^3$$

$$150 \text{ cm}^3 = 500 \text{ cm}^3 \cdot (1/2)^{t/t_H}$$

$$\frac{150}{500} = (1/2)^{t/t_H}$$

$$0,3 = (1/2)^{t/t_H}$$

$$\lg 0,3 = (t / t_H) \cdot \lg 0,5$$

$$\frac{\lg 0,3}{\lg 0,5} = t / t_H$$

$$t = \frac{t_H \cdot \lg 0,3}{\lg 0,5}$$

$$t \approx 38 \text{ s}$$

**Antwort:** Nach der Zeit von  $t \approx 38$  Sekunden befinden sich noch  $150 \text{ cm}^3$  Wasser im Filter.

#### Aufgabe 5

##### 1. Volumen der Halbkugel

$$V_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} d^3 = \frac{\pi}{12} \cdot (24 \text{ mm})^3 = 3619,1 \text{ mm}^3$$

##### 2. Volumen der Pyramide

$$V_P = \frac{1}{3} A_{gr} \cdot h$$

$A_{gr} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$ $= \frac{(17,32 \text{ mm})^2}{4} \sqrt{3}$ $= 129,9 \text{ mm}^2$	(gleichseitiges Dreieck)
--	--------------------------

$$= \frac{1}{3} \cdot 129,9 \text{ mm}^2 \cdot 10 \text{ mm}$$
$$= 433 \text{ mm}^3$$



### 3. Gesamtvolumen

$$\begin{aligned} V &= V_H - V_P \\ &= 3619,1 \text{ mm}^3 - 433 \text{ mm}^3 \\ &= 3186,1 \text{ mm}^3 \approx 3,19 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

**Antwort:** Das Volumen der Kunststoffkappe beträgt  $3,19 \text{ cm}^3$ .

### Aufgabe 6.1

#### a) Berechnung von $\overline{AF}$

$$\begin{aligned} \angle AFB &= 180^\circ - \alpha - \beta \text{ (wegen Winkelsumme im } \triangle ABF) \\ &= 180^\circ - 53,4^\circ - 74,5^\circ \\ &= 52,1^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \beta}{\sin \angle AFB} \quad (\text{Sinussatz im } \triangle ABF)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \overline{AF} &= \frac{\sin \beta}{\sin \angle AFB} \cdot \overline{AB} \\ &= \frac{\sin 74,5^\circ}{\sin 52,1^\circ} \cdot 190 \text{ m} \\ &= 232,028 \text{ m} \end{aligned}$$

#### b) Berechnung von $\overline{FS} = h$

$$\frac{\overline{FS}}{\overline{AF}} = \tan \delta \text{ (Tangens im rechtwinkligen Dreieck } \triangle AFS)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \overline{FS} &= \overline{AF} \cdot \tan \delta \\ &= 232,028 \text{ m} \cdot \tan 8,1^\circ \\ &= 33,023 \text{ m} \\ &= 33 \text{ m} \end{aligned}$$

**Antwort:** Der Leuchtturm ist 33 m hoch.

### Aufgabe 6.2

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}} &= \sin \alpha \\ \overline{DF} &= \overline{AF} \cdot \sin \alpha \\ &= 232,028 \text{ m} \cdot \sin 53,4^\circ \\ &= 186,276 \text{ m} \approx 186 \text{ m}\end{aligned}$$

**Antwort:** Die Entfernung beträgt 186 m.

Alternative (falls  $\overline{AF}$  in Aufgabe 6.1 nicht berechnet wurde):

$$\begin{aligned}\frac{e}{p} &= \tan \beta \quad \frac{e}{q} = \tan \alpha \quad (\text{Tangensdefinition}) \\ \Rightarrow p &= \frac{e}{\tan \beta} \rightarrow \frac{e}{\overline{AB} - \frac{e}{\tan \beta}} = \tan \alpha & \left| \cdot \left( \overline{AB} - \frac{e}{\tan \beta} \right) \right. \\ e &= \tan \alpha \cdot \left( \overline{AB} - \frac{e}{\tan \beta} \right) & \\ &= \overline{AB} \tan \alpha - e \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} & \left| + e \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \right. \\ e + e \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} &= \overline{AB} \tan \alpha \\ e \cdot \left( 1 + \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \right) &= \overline{AB} \tan \alpha & \left| : \left( 1 + \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \right) \right. \\ e &= \frac{\overline{AB} \tan \alpha}{1 + \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}} \\ &= \frac{190 \text{ m} \cdot \tan 53,4^\circ}{1 + \frac{\tan 53,4^\circ}{\tan 74,5^\circ}} \\ &= 186,276 \text{ m} \approx 186 \text{ m}\end{aligned}$$

**Antwort:** Die Entfernung beträgt 186 m.



### Aufgabe 7.1

$$A = \int_{x_{03}}^{x_{04}} f(x) dx = \int_0^2 (x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x) dx$$

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 5 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 3x^2$$

$$A = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 \quad \Big|_0^2$$

$$A = \frac{1}{5}(2)^5 + \frac{1}{2}(2)^4 - \frac{5}{3}(2)^3 - 3(2)^2 - \left( \frac{1}{5}(0)^5 + \frac{1}{2}(0)^4 - \frac{5}{3}(0)^3 - 3(0)^2 \right)$$

$$A = -10,93 - 0 = \underline{\underline{-10,93 \text{ Flächeneinheiten}}}$$

### Aufgabe 7.2

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x - 6 = 4x^3 + 6x^2 - 10x - 6$$

$$f''(x) = 4 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x - 10 = 12x^2 + 12x - 10$$

$$f'''(x) = 12 \cdot 2x + 12 = 24x + 12$$