

Grundlagen der Analysis und Vektorrechnung anwenden

Im Berufsfeld von Technikerinnen und Technikern gibt es Situationen, die eine wissenschaftlich exakte Beschreibung von technisch-naturwissenschaftlichen Vorgängen erfordern.

Dazu sind Grundkenntnisse der Analysis und Vektorrechnung notwendig.

Daher werden in diesem Lernmodul an ausgewählten Beispielen Rechenverfahren der höheren Mathematik dargestellt.

In dem Lernbereich 1 wird ein Überblick über die Grundlagen der Vektor- und Matrizenrechnung vermittelt. Der Lernbereich 2 führt in das Themengebiet der Differenzial- und Integralrechnung ein.

Alle notwendigen Informationen und Arbeitsunterlagen sind in diesem Lernmodul enthalten.

Dieses Lernmodul ist im häuslichen Studium zu erarbeiten.

Der benötigte Zeitaufwand liegt bei ca. 39 Stunden.

Zusätzlich finden in den semesterbezogenen Präsenzphasen 16 Stunden Festigung und Vertiefung fachspezifischer und fächerübergreifender Zusammenhänge sowie die Beschreibung typischer Aufgaben und Problemstellungen statt.

LERNMODUL 6

Ziele

Ausgangssituation

Planung

**Komplexaufgabe
des Lernmoduls****Konservendose**

Eine Herstellerfirma für Konservendosen erhält den Auftrag, die Dosen für ein Lebensmittelprodukt zu fertigen.

Das Lebensmittelprodukt ist hauptsächlich flüssig und soll mit einem bestimmten vorgegebenen Volumen abgefüllt werden.

Um einen möglichst geringen Materialverbrauch für die zylindrische Metalldose zu erhalten, ist die Frage zu beantworten, für welchen Radius diese Bedingung erfüllt wird. Für die Rechnung braucht der Materialverbrauch der Falzkanten nicht berücksichtigt zu werden.

Weiterhin wird aus werbetechnischen Gründen untersucht, für welchen Radius das Volumen der zylindrischen Dose maximal ist, wenn die bedruckbare Oberfläche der Dose vorgegeben ist.

In diesem Lernmodul werden alle Grundlagen zur Realisierung der Komplexaufgabe „Konservendose“ vorgestellt und analysiert.

1 Vektoren und Matrizen	4
1.1 Grundlagen der Vektorrechnung.....	4
1.2 Multiplikation von Vektoren	12
1.2.1 Skalarprodukt von Vektoren	12
1.2.2 Vektorprodukt	20
1.3 (2 x 2)-Matrizen	23
2 Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung	32
2.1 Differenzialrechnung	32
2.1.1 Differenzialquotient.....	33
2.1.2 Ableitungsfunktion	38
2.1.3 Eigenschaften spezieller Funktionen	58
2.2 Integralrechnung	75
2.2.1 Inhalt krummlinig begrenzter Flächen	75
2.2.2 Bestimmte Integrale	92
Lösungsanhang	101

Inhaltsverzeichnis

Lernbereich
1 Vektoren und Matrizen
1.1 Grundlagen der Vektorrechnung

Bei vielen technischen Größen reicht die Angabe der Größe alleine zur Beschreibung aus (z.B. bei der Temperatur oder der Leistung). Bei anderen wie z.B. der Kraft ist aber auch die Richtung und der Angriffspunkt wichtig zur vollständigen Beschreibung. Größen, die sich allein durch Maßzahl und Einheit beschreiben lassen, heißen **skalare Größen**, solche, die zusätzlich noch Richtung und Betrag zur vollständigen Angabe benötigen, werden gerichtete oder **vektorielle Größen** genannt. In der Formel werden vektorielle Größen durch einen Pfeil über dem Buchstaben gekennzeichnet: z.B. \vec{F} für die Kraft als vektorielle Größe.

skalare Größen		vektorielle Größen	
Größe	Formelzeichen	Größe	Formelzeichen
Masse	m	Kraft	\vec{F}
Zeit	t	Weg	\vec{s}
Temperatur	T	Elektrische Feldstärke	\vec{E}
Arbeit	W	Drehmoment	\vec{M}

Tabelle 1 Beispiele für skalare und vektorielle Größen

Ohne Vektorrechnung wurde auch schon mit Kräften, Wegen und Drehmomenten gerechnet. Es mussten nur jeweils Zusatzangaben gemacht werden oder die zusätzlichen Angaben ergaben sich in den einfachen Beispielen von selbst. Die Vektorrechnung liefert aber Werkzeuge, wie man durch einfache Rechnung auch andere Informationen wie Richtung und Angriffspunkt mit einbeziehen kann. Diese Werkzeuge sollen im Folgenden erarbeitet und angewandt werden.

Der Vektorbegriff

Die physikalischen Eigenschaften der Kraft lassen sich anschaulich durch ein mathematisches Gebilde - den Pfeil - beschreiben.

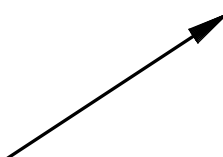
Eigenschaften einer Kraft	Grafische Darstellung durch einen Pfeil	Eigenschaften des Pfeils
Größe		Länge des Pfeils (auch Betrag genannt)
Richtung		Winkel des Pfeils gegenüber der Horizontalen
Angriffspunkt		Anfangspunkt des Pfeils

Tabelle 2 Gemeinsamkeiten zwischen der physikalischen Größe Kraft und dem mathematischen Pfeil

Werden viele Kompassnadeln nebeneinander gelegt, so zeigen alle Kompassnadeln in die selbe Richtung. Jede Einzelne von ihnen repräsentiert die Richtung der Feldlinien des magnetischen Feldes der Erde. Sie können durch Pfeile ersetzt werden. Die Stärke des Feldes kann durch die Länge der - zueinander parallelen - Pfeile angegeben werden. In der Mathematik werden alle solche Pfeile, die zueinander parallel ver-

laufen, die gleiche Orientierung haben und gleich lang sind zu einem sog. Vektor zusammengefasst.

Unter einem Vektor wird die Menge aller Pfeile verstanden, die gleiche Richtung, gleiche Länge und gleiche Orientierung haben. Einen beliebigen Pfeil aus dieser Menge nennt man Repräsentant des Vektors.

Das Magnetfeld der Erde kann also durch einen Vektor beschrieben werden.

Beschreibung eines Vektors

Ein Vektor lässt sich sehr einfach in einem kartesischen Koordinatensystem beschreiben. Es wird der Repräsentant des Vektors gewählt, dessen Anfangspunkt im Ursprung liegt. Und dann werden die Koordinaten des Endpunktes angegeben. Dies reicht zur Beschreibung des Vektors. Zur Verdeutlichung, dass es sich um einen Vektor handelt, und nicht um einen Punkt, werden die Komponenten als Spalten geschrieben. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Spaltenvektoren.

Der Vektor \vec{v} , dessen Pfeile eine Länge von 5 haben und mit der Horizontalen einen Winkel von 53° einschließen, wird folgendermaßen beschrieben.

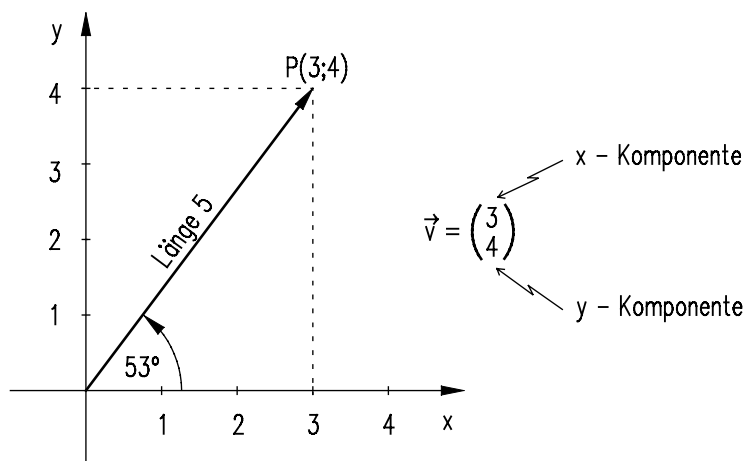
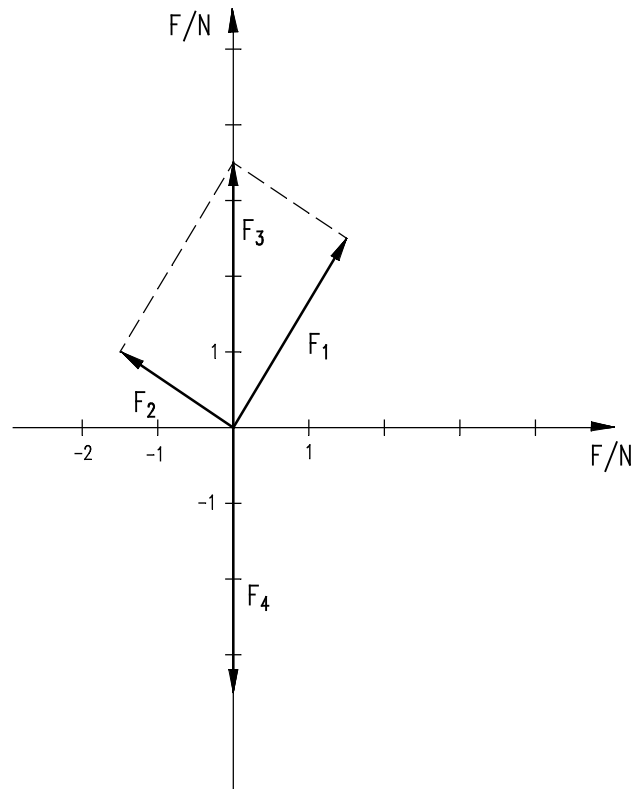


Abbildung 1 Komponentendarstellung eines Vektors

Meist führt es nicht zu Missverständnissen und es ist verbreiteter Sprachgebrauch, wenn man jeden Repräsentanten eines Vektors selbst als Vektor bezeichnet. Im Weiteren wird dieser Gebrauch auch hier angewandt.

Lehrbeispiel 1

Geben Sie die Komponentendarstellung der in der Abbildung gegebenen Vektoren an!

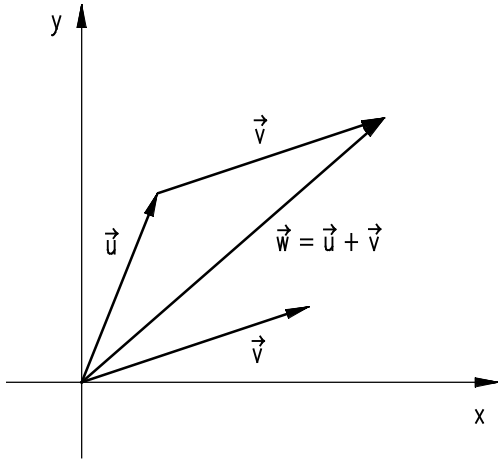


Lösung

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1,5 \text{ N} \\ 2,5 \text{ N} \end{pmatrix} ; \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \text{ N} \\ 1 \text{ N} \end{pmatrix} ; \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,5 \text{ N} \end{pmatrix} ; \quad \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3,5 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Addition von Vektoren**geometrisch**

Zwei Vektoren werden addiert, indem der Anfangspunkt des zweiten Vektors an die Spitze des ersten Vektors gehängt wird. Der Summenvektor zeigt dann vom Anfangspunkt des ersten Vektors zur Spitze des zweiten.

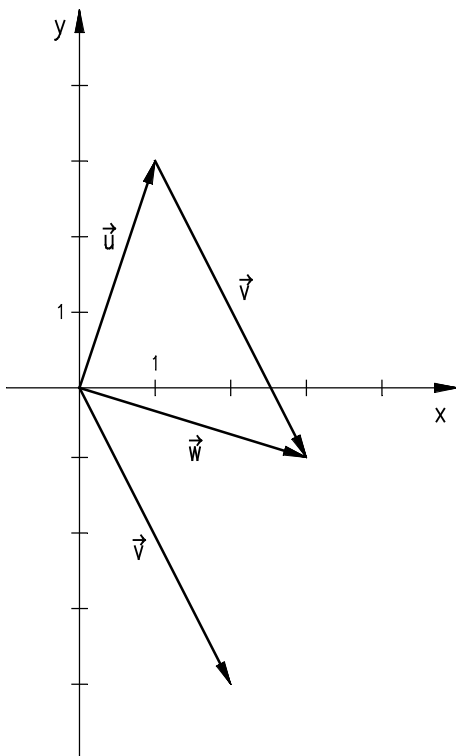
**rechnerisch**

Zwei Vektoren werden komponentenweise addiert.

$$\text{Sei } \vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dann ist } \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

$$\text{Beispiel } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

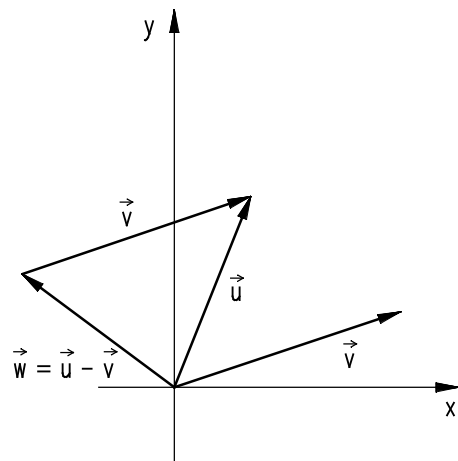


$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Subtraktion zweier Vektoren

geometrisch

Zwei Vektoren werden subtrahiert, indem die Spitze des zweiten Vektors an die Spitze des ersten Vektors gehängt wird. Der Differenzvektor zeigt dann vom Anfangspunkt des ersten Vektors zum Anfangspunkt des zweiten.



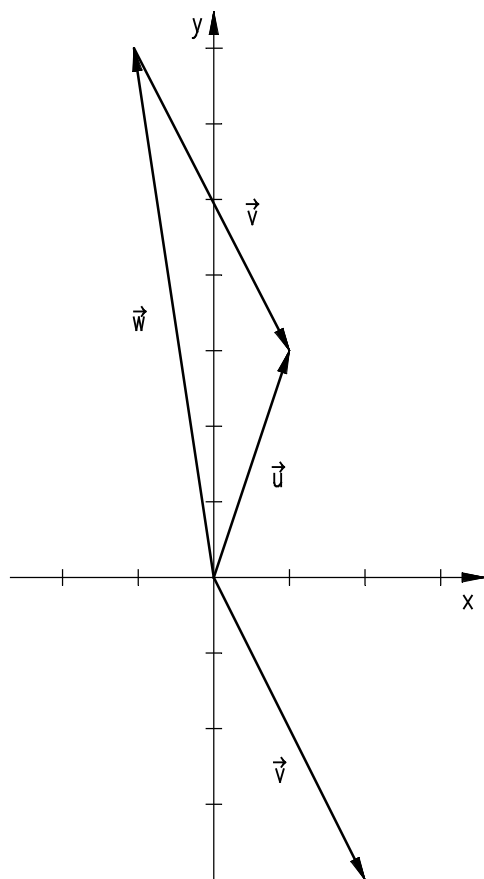
rechnerisch

Zwei Vektoren werden komponentenweise subtrahiert.

$$\text{Sei } \vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dann ist } \vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{pmatrix}$$

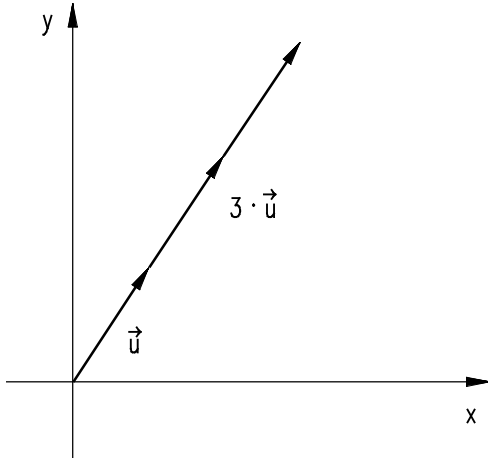
$$\text{Beispiel } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl**geometrisch**

Ein Vektor \vec{u} wird mit einer reellen Zahl c multipliziert, indem der Vektor c mal aneinander gehängt wird.

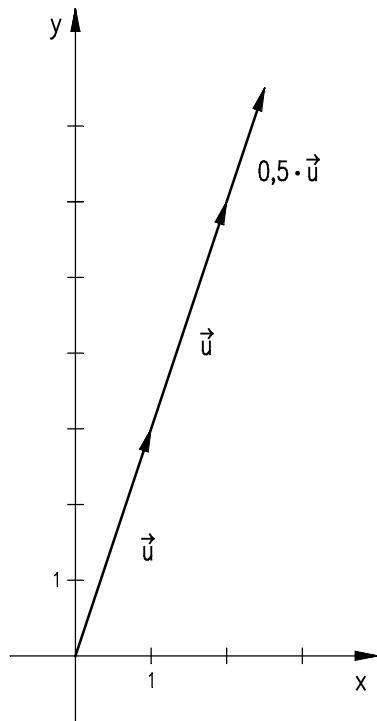
**rechnerisch**

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem jede Komponente mit der Zahl multipliziert wird.

Sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ und $c \in \mathbb{R}$.

Dann ist $\vec{w} = c \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} c \cdot u_x \\ c \cdot u_y \end{pmatrix}$.

Beispiel $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $c = 2,5$.



$$\vec{w} = 2,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \cdot 1 \\ 2,5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 7,5 \end{pmatrix}$$

Spezialfälle ergeben sich bei der Multiplikation mit 0 und -1.

Bei der Multiplikation mit -1 ergibt sich ein Vektor mit gleicher Länge, aber umgekehrter Orientierung. Man spricht hier vom inversen Vektor.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \Rightarrow (-1) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \end{pmatrix} = -\vec{u}$$

Bei der Multiplikation mit 0 ergibt sich der Nullvektor.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Anmerkung

Ist ein Vektor ein Vielfaches eines zweiten Vektors, entsteht der Vektor also durch eine Multiplikation des zweiten Vektors mit einer Zahl, so nennt man beide Vektoren kollinear. Kollinearität bedeutet also, dass die Vektoren zueinander parallel liegen, allerdings unterschiedliche Länge haben. Die Orientierung spielt auch keine Rolle.

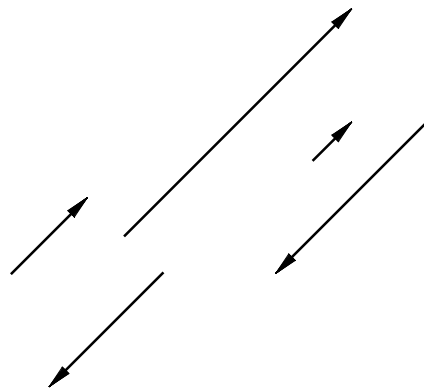


Abbildung 2 Kollineare Vektoren

Rechnerisch wird die Kollinearität überprüft, indem der Faktor gesucht wird, mit dem der eine Vektor multipliziert werden muss, um den anderen zu erhalten.

Lehrbeispiel 2

Weisen Sie nach, dass die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 24 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ kollinear sind!

Lösung

gesucht: c, so dass $\vec{u} = c \cdot \vec{v}$

Es muss insbesondere gelten:

$$\vec{u}_x = c \cdot \vec{v}_x \Rightarrow -6 = c \cdot 2 \Rightarrow c = -\frac{6}{2} = -3$$

Überprüfung, ob auch gilt

$$\vec{u}_y = -3 \cdot \vec{v}_y \Rightarrow 24 = -3 \cdot (-8) = 24$$

Damit ist ein c gefunden und es gilt

$$\vec{u} = -3 \cdot \vec{v}$$

und somit sind \vec{u} und \vec{v} kollinear.

Betrag eines Vektors

Alle Pfeile eines Vektors \vec{v} haben die gleiche Länge. Die Längenmaßzahl wird auch **Betrag des Vektors** genannt, und durch $|\vec{v}|$ bezeichnet.

Sind die Komponenten eines Vektors gegeben, so kann der Betrag nach dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

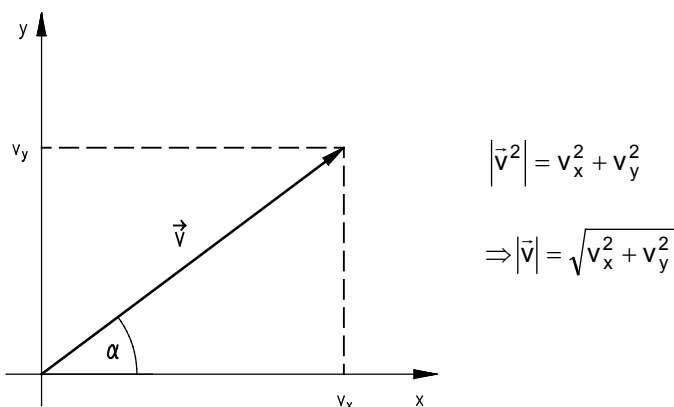


Abbildung 3 Betrag eines Vektors in Komponentendarstellung

Lehrbeispiel 3

Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$!

Lösung

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6,40$$

Antwort: Der Vektor hat eine Länge von 6,40.

Winkel eines Vektors mit den Achsen

Die Betragsdefinition gibt auch eine einfache Möglichkeit, den Winkel, den ein in Komponentenform gegebener Vektor mit der x-Achse bildet, zu berechnen. Aus Abbildung 3 kann abgelesen werden:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}$$

Lehrbeispiel 3

Welchen Winkel schließt der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit der x-Achse ein?

Lösung

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{4}{\sqrt{41}} \approx 0,6247 \Rightarrow \alpha = 51,3^\circ$$

1.2 Multiplikation von Vektoren

Es gibt 3 Arten von Multiplikationen mit Vektoren:

- **Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl**

Hier wird jede Komponente des Vektors mit der reellen Zahl multipliziert. Das Ergebnis ist wiederum ein Vektor. Typisches Beispiel ist hier der Geschwindigkeitsvektor. Wird er mit der Zeit multipliziert, so ergibt sich der Wegvektor.

- **Skalarprodukt**

Hier werden zwei Vektoren so multipliziert, dass eine reelle Zahl herauskommt. Typisches Beispiel hierfür ist die physikalische Arbeit, die mit dem Produkt des Kraftvektors mit dem Wegvektor gebildet wird. Die Arbeit selbst ist eine ungerichtete Größe.

- **Vektorprodukt**

Hier werden zwei Vektoren so multipliziert, dass das Produkt ein Vektor ist. Typisches Beispiel ist hier das Drehmoment. Dies ist eine gerichtete Größe, die aus dem Kraftvektor und dem Hebelarmvektor gebildet wird.

1.2.1 Skalarprodukt von Vektoren

In der Physik werden häufig zwei vektorielle Größen miteinander multipliziert, wobei das Ergebnis keine gerichtete Größe, sondern eine skalare Größe ist. Typisches Beispiel ist der physikalische Begriff der mechanischen Arbeit W . Die Arbeit ist eine skalare (ungerichtete) Größe; sie ist sinnvoll festgelegt als ein spezielles Produkt aus den vektoriellen Größen Kraft \vec{F} und Weg \vec{s} , das als **Skalarprodukt** $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ bezeichnet wird.

Die Berechnung des Skalarproduktes soll anhand des Beispiels der mechanischen Arbeit hergeleitet werden.

Wirkt auf einen Körper eine konstante Kraft \vec{F} und legt der Körper dadurch einen Weg \vec{s} in Richtung der wirkenden Kraft zurück, dann versteht man unter der an dem Körper verrichteten Arbeit das Produkt aus den Beträgen $F = |\vec{F}|$ und $s = |\vec{s}|$ der vektoriellen Größen Kraft und Weg.

$$W = F \cdot s$$

Stimmen Kraft- und Wegrichtung **nicht** überein, wie das z.B. beim schrägen Ziehen einer Karre der Fall ist, dann wird die Bewegung nur durch den Anteil der Kraft \vec{F} bewirkt, der in Wegrichtung liegt.

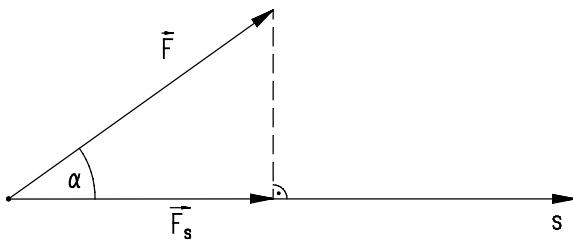


Abbildung 4 Kraftkomponente in Wegrichtung

Dieser Anteil, der mit \vec{F}_s bezeichnet werden soll, ist gleich der Projektion des Vektors \vec{F} auf die Wegrichtung. Für den Betrag F_s von \vec{F}_s kann abgelesen werden:

$$F_s = |\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha$$

Damit ergibt sich für die verrichtete mechanische Arbeit:

$$W = |\vec{F}_s| \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$

Der Ausdruck $|\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$ wird das **Skalarprodukt** der Vektoren \vec{F} und \vec{s} genannt.

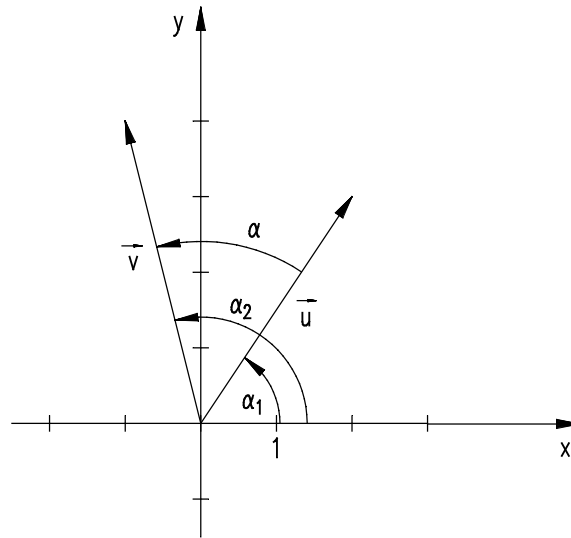
Für beliebige Vektoren wird definiert.

Das Skalarprodukt für beliebige Vektoren \vec{u} und \vec{v} ist $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, wobei α der kleinere Winkel ist, den beide Vektoren einschließen.

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie das Skalarprodukt von $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$!

Lösung



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{u_x}{|\vec{u}|} = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0,5547 \Rightarrow \alpha_1 = 56,31^\circ$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{17}} \approx -0,2425 \Rightarrow \alpha_2 = 104,01^\circ$$

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 104,01^\circ - 56,31^\circ = 47,7^\circ$$

$$\cos \alpha = \cos(47,7^\circ) = 0,673$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} \cdot 0,673 = 10$$

Antwort: Das Skalarprodukt beträgt 10.

Wenn die Vektoren \vec{u} und \vec{v} in Komponentendarstellung gegeben sind, lässt sich eine einfachere Berechnungsformel herleiten:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Lehrbeispiel 2

Berechnen Sie das Skalarprodukt aus Lehrbeispiel 1 aus der Komponentendarstellung!

Lösung

gegeben: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

gesucht: $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y \\ &= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Antwort: Das Skalarprodukt beträgt 10.

Lehrbeispiel 3

Gegeben ist die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} -29,4 \text{ N} \\ 19,6 \text{ N} \end{pmatrix}$.

Sie wirkt längs des Weges zwischen $P_1(5 \text{ m}; -2 \text{ m})$ und $P_2(-1 \text{ m}; 6 \text{ m})$.

Berechnen Sie die geleistete Arbeit!

Lösung

1. Berechnung des Weges

$$\vec{s} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \text{ m} \\ 6 \text{ m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \text{ m} \\ -2 \text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \text{ m} \\ 8 \text{ m} \end{pmatrix}$$

2. Berechnung der Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} -29,4 \text{ N} \\ 19,6 \text{ N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \text{ m} \\ 8 \text{ m} \end{pmatrix} \\ &= -29,4 \text{ N} \cdot (-6 \text{ m}) + 19,6 \text{ N} \cdot 8 \text{ m} \\ &= 333,2 \text{ Nm} \\ &\approx 333 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Antwort: Die Arbeit beträgt 333 Nm.

Winkelberechnung mithilfe des Skalarproduktes

Dadurch, dass es für das Skalarprodukt zwei Berechnungsmethoden gibt, eignet es sich gut zur Winkelberechnung.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y \quad | : (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|)$$

$$\cos \alpha = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Lehrbeispiel 4

Berechnen Sie den Winkel, den die Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 15\text{N} \\ 10\text{N} \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -3\text{N} \\ 2\text{N} \end{pmatrix}$ einschließen! Machen Sie die Probe durch eine Grafik!

Lösung

1. rechnerische Lösung

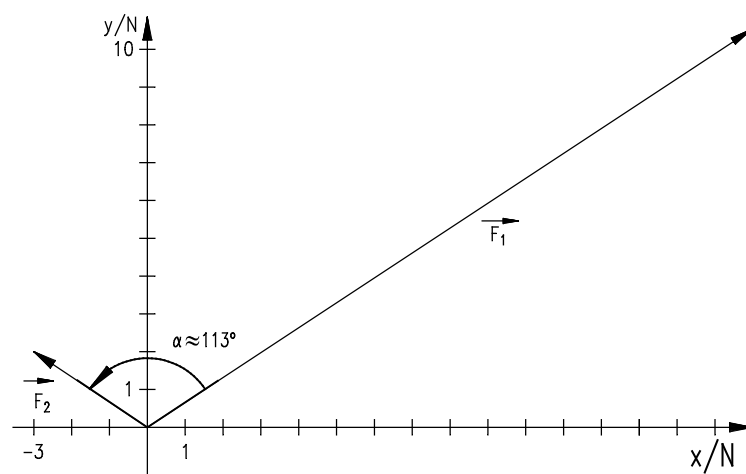
$$\cos \alpha = \frac{F_{1x} \cdot F_{2x} + F_{1y} \cdot F_{2y}}{|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2|}$$

$$\begin{aligned} |\vec{F}_1| &= \sqrt{(15\text{ N})^2 + (10\text{ N})^2} = \sqrt{325\text{ N}^2} = 5\sqrt{13}\text{ N} \\ |\vec{F}_2| &= \sqrt{(-3\text{ N})^2 + (2\text{ N})^2} = \sqrt{13\text{ N}^2} = \sqrt{13}\text{ N} \end{aligned}$$

$$= \frac{15\text{ N} \cdot (-3\text{ N}) + 10\text{ N} \cdot 2\text{ N}}{5\sqrt{13}\text{ N} \cdot \sqrt{13}\text{ N}}$$

$$= \frac{-25\text{ N}^2}{65\text{ N}^2} = -\frac{5}{13} \approx -0,38462$$

$$\Rightarrow \alpha = 112,62^\circ$$



Antwort: Der Winkel beträgt 112,62°.

Einheitsvektor

Wird ein Vektor \vec{v} mit dem Kehrwert $1/|\vec{v}|$ seines Betrages multipliziert, so erhält man einen zu \vec{v} kollinearen, das heißt hier richtungs- und orientierungsgleichen Vektor \vec{e}_v .

An einem Beispiel soll untersucht werden, welchen Betrag \vec{e}_v hat.

Lehrbeispiel 5

Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\vec{e}_v = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ und $|\vec{e}|$!

Lösung

$$\vec{e}_v = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \quad |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

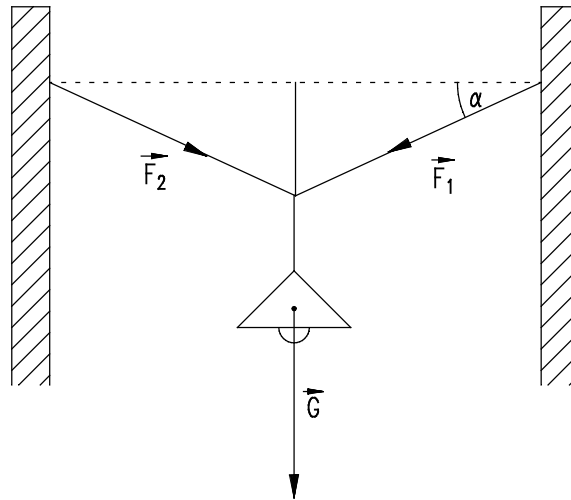
$$|\vec{e}_v| = \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{13} + \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1$$

Antwort: Der gesuchte Vektor lautet $\vec{e}_v = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ und hat den Betrag 1.

Ein Vektor mit dem Betrag 1 heißt **Einheitsvektor**. Es lässt sich analog zum Lehrbeispiel 5 zeigen: Wird ein beliebiger vom Nullvektor verschiedener Vektor mit dem Kehrwert seines Betrages multipliziert, so ergibt sich ein Einheitsvektor. Dieser Einheitsvektor hat dann die selbe Richtung und Orientierung wie der Ausgangsvektor, lediglich die Länge 1.

Lehrbeispiel 6

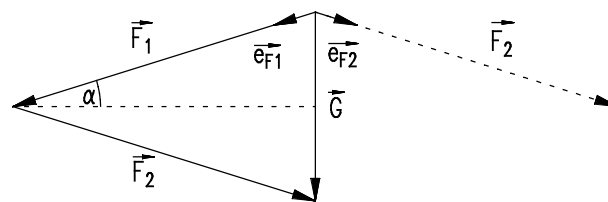
Eine Straßenlaterne der Masse $m = 2,5 \text{ kg}$ hängt in der Mitte eines Haltedrahtes, der an den Straßenseiten in gleicher Höhe an Masten befestigt ist. Die Masten sind 15 m voneinander entfernt und die Lampe hängt $0,5 \text{ m}$ durch.



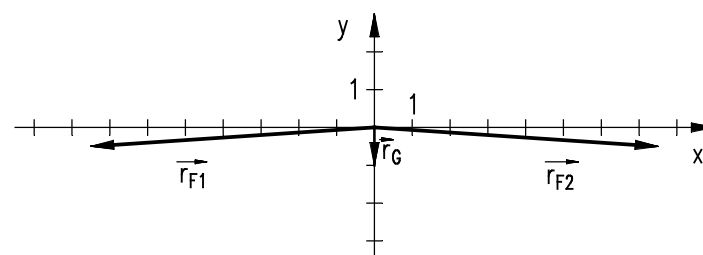
Berechnen Sie die Spannkraften in den Seilen und die Zug- und Druckkräfte in den Aufhängungen!

Lösung

1. Bestimmung der Einheitsvektoren zur Krafrichtung



Aus den Angaben der Aufgabe erhält man folgende Richtungsvektoren und die zugehörigen Einheitsvektoren.



$$\vec{r}_{F1} = \begin{pmatrix} -7,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}_{F1}| = \sqrt{7,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{\frac{113}{2}} \approx 7,517$$

$$\Rightarrow \vec{e}_{F1} = \frac{1}{7,517} \begin{pmatrix} -7,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,998 \\ -0,0665 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{F2} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{e}_{F2} = \begin{pmatrix} 0,998 \\ -0,0665 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmung der Kräfte

Aus obiger Abbildung entnimmt man folgende Bedingung für \vec{F}_1 und \vec{F}_2 :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{G} \quad \vec{F}_1 = a \cdot \vec{e}_{F1} \quad \vec{F}_2 = b \cdot \vec{e}_{F2} \text{ mit zwei zu bestimmenden Zahlen } a \text{ und } b$$

$$a \cdot \vec{e}_{F1} + b \cdot \vec{e}_{F2} = \vec{G}$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} -0,998 \\ -0,0665 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0,998 \\ -0,0665 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \cdot 9,81 \text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -24,53 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Dies ist ein Gleichungssystem für zwei Unbekannte

$$\begin{array}{ll} -0,998 \cdot a + 0,998 \cdot b = 0 & | : 0,998 \\ -0,0665 \cdot a - 0,0665 \cdot b = -24,53 \text{ N} & | : (-0,0665) \end{array}$$

$$\text{I} \quad -a + b = 0$$

$$\text{II} \quad a + b = 368,692 \text{ N}$$

$$\text{I} + \text{II} \quad 2 \cdot b = 368,692 \text{ N}$$

$$\Rightarrow b = 184,346 \text{ N}$$

Mit I ist $a = b = 184,346 \text{ N}$ (Wie zu erwarten war, da die Konstruktion symmetrisch ist).

$$\text{Also: } \vec{F}_1 = 184,346 \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} -0,998 \\ -0,0665 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -183,977 \text{ N} \\ -12,26 \text{ N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = 184,346 \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} 0,998 \\ -0,0665 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 183,977 \text{ N} \\ -12,26 \text{ N} \end{pmatrix}$$

3. Bestimmung der Beträge

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{(-183,977 \text{ N})^2 + (-12,26 \text{ N})^2} = 184,385 \text{ N} = |\vec{F}_2|$$

Das Ergebnis für die Beträge entspricht bis auf Rundungsungenauigkeiten den Werten der Koeffizienten, denn die Koeffizienten a und b geben die Verlängerung des Einheitsvektors an, also die Länge des gesuchten Vektors.

4. Kräfte in den Aufhängungen

Die Kräfte ergeben sich direkt aus den Komponentendarstellungen.

$F_{1x} = -183,98 \text{ N}$, also zieht die Lampe am rechten Befestigungspunkt mit $183,98 \text{ N}$ waagerecht und $F_{1y} = -12,26 \text{ N}$ senkrecht nach unten.

Schlussbemerkung

Eigentlich hätten die Lehrbeispiele auch mit einfacheren geometrischen Überlegungen gelöst werden können. Es stellt sich die Frage nach dem Sinn der Vektorrechnung.

Der große Vorteil dieser Rechenart ist, dass sich viele verschiedene Anwendungsgebiete und Aufgabentypen mit demselben Rechenverfahren, mit denselben Ideen lösen lassen. Es müssen keine Formeln entwickelt und hergeleitet werden, es werden lediglich die Begriffe und Verfahren der Vektorrechnung angewandt. Ein weiterer Vorteil ist, dass sich die hier gewonnenen Ergebnisse leicht auf den dreidimensionalen Raum erweitern lassen.

1.2.2 Vektorprodukt

Eine andere Verknüpfung von Vektoren ist das sog. **Vektorprodukt**. Sie wird so bezeichnet, weil sich hier - anders als beim Skalarprodukt - als Ergebnis der Verknüpfung ein Vektor ergibt. Das Vektorprodukt wird auch oft **Kreuzprodukt** genannt, weil das Verknüpfungssymbol ein „ \times “ ist, oder auch **äußeres Produkt**. Im Gegensatz dazu heißt das Skalarprodukt auch **inneres Produkt**. Die Berechnung des Vektorproduktes soll anhand des Beispiels des Drehmomentes hergeleitet werden. Das Drehmoment M ist das Produkt aus dem Hebelarm und dem Kraftanteil, der senkrecht zum Hebelarm wirkt.

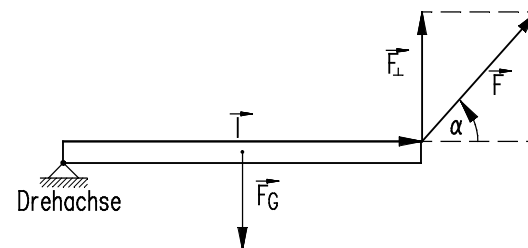


Abbildung 5 Drehmoment

Der Betrag des Drehmoments M , das die Kraft \vec{F} erzeugt, berechnet sich nach

$$M = |\vec{l}| \cdot |\vec{F}_\perp| = |\vec{l}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$$

Nun ist das Drehmoment eine vektorielle Größe. Die Richtung des Drehmoments \vec{M} stimmt mit der Richtung der Drehachse überein; das Drehmoment steht senkrecht auf den Vektoren \vec{F} und \vec{l} . Das Drehmoment zeigt also aus der x-y-Ebene heraus. Die Orientierung ergibt sich aus der sog. **Schraubenregel**: Dreht man auf kürzestem Wege \vec{l} nach \vec{F} (wobei die Angriffspunkte von \vec{l} und \vec{F} zusammengelegt werden), so bewegt sich das System wie eine rechtsgängige Schraube in Richtung von \vec{M} . In unserem Beispiel kommt also \vec{M} aus der Blattebene nach vorne heraus.

Auf Grund dieser Eigenschaften des Drehmoments wird in der Mathematik definiert:

Das **Vektorprodukt** $\vec{u} \times \vec{v}$ (sprich: Vektor u Kreuz Vektor v) zweier Vektoren \vec{u} und \vec{v} ist ein Vektor, der zu \vec{u} und \vec{v} senkrecht steht; seine Orientierung ergibt sich aus der Schraubenregel.

Für den Betrag des Vektorproduktes gilt

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha.$$

Beim Vektorprodukt kommt es auf die Reihenfolge der Vektoren an.

Der Betrag des Vektorproduktes ist gleich dem Flächeninhalt A des von den Vektoren \vec{I} und \vec{F} aufgespannten Parallelogramms.

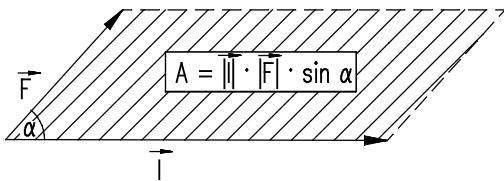


Abbildung 6 Betrag des Vektorprodukts

Sind die Vektoren in Komponentenform gegeben, so kann gezeigt werden, dass sich das Vektorprodukt berechnen lässt aus

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_x v_y - u_y v_x.$$

Lehrbeispiel 1

Gegeben sind die Vektoren $\vec{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75\text{m} \end{pmatrix}$ und $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3\text{N} \\ 5\text{N} \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie Betrag und Orientierung des Drehmoments!

Lösung

$$\vec{M} = \vec{I} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75\text{ m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3\text{ N} \\ 5\text{ N} \end{pmatrix} = 0 \cdot 5\text{ N} - 0,75\text{ m} \cdot 3\text{ N} = -2,25\text{ Nm}$$

$$\vec{M} = -2,25\text{ Nm}$$

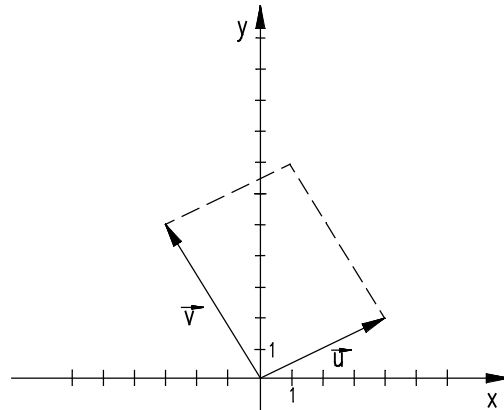
Antwort: Das Drehmoment beträgt 2,25 Nm und zeigt in die x-y-Ebene nach unten hinein (Schraubenregel).

Lehrbeispiel 2

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von \vec{u} und \vec{v} eingeschlossen wird auf zwei Arten vektoriell!

Lösung



Der Flächeninhalt ist gleich dem Betrag des Vektorprodukts.

1. Über die Komponenten

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = |u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x| = |4 \cdot 5 - 2 \cdot (-3)| = 26$$

2. Über die Beträge

$$A = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

α wird aus dem Skalarprodukt berechnet.

$$\cos \alpha = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4 \cdot (-3) + 2 \cdot 5}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{34}} = \frac{-12 + 10}{\sqrt{680}} = -0,07670$$

$$\Rightarrow \alpha = 94,399^\circ \Rightarrow \sin \alpha = 0,99705$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{20} \cdot \sqrt{34} \cdot 0,99705 = 26$$

Antwort: Der Flächeninhalt beträgt 26.

1.3 (2 x 2)-Matrizen

Unter einer Matrix wird in der Mathematik ein System von $m \cdot n$ Elementen verstanden, die in einem rechteckigen Schema von m Zeilen und n Spalten angeordnet sind. Die Elemente der Matrix werden z.B. durch Zahlen beschrieben. Mithilfe von Matrizen und deren speziellen Rechenregeln lassen sich unter anderem Vektortransformationen durchführen oder Gleichungssysteme lösen.

Definition einer (2 x 2)-Matrix

Unter einer 2x2-Matrix wird ein rechteckiges Schema mit 2 Zeilen und 2 Spalten verstanden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Die vier Zahlen a_{11} , a_{12} , a_{21} und a_{22} nennt man die **Elemente** der Matrix.

Die Spalten $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ werden auch als **Spaltenvektoren**, die Zeilen $(a_{11} \ a_{12})$ bzw. $(a_{21} \ a_{22})$ als **Zeilenvektoren** der Matrix bezeichnet.

Addition und Subtraktion zweier Matrizen

Mit Matrizen kann man - ähnlich wie mit Vektoren - rechnen. Die Addition und Subtraktion geschieht dabei komponentenweise.

Definition:

Zwei (2 x 2)-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ werden addiert bzw. subtrahiert, indem die entsprechenden Matrizenelemente addiert bzw. subtrahiert werden.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \text{ heißt die Summe aus A und B.}$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} \text{ heißt die Differenz von A und B.}$$

Lehrbeispiel 1

Bilden Sie die Summe und die Differenz von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$!

Lösung

$$C = A + B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + 2 & \frac{1}{4} + 3 \\ \frac{1}{5} + 4 & \frac{1}{6} + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{13}{4} \\ \frac{21}{5} & \frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 2 & \frac{1}{4} - 3 \\ \frac{1}{5} - 4 & \frac{1}{6} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{11}{4} \\ -\frac{19}{5} & -\frac{29}{6} \end{pmatrix}$$

Antwort: Die Summe beträgt $C = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{13}{4} \\ \frac{21}{5} & \frac{31}{6} \end{pmatrix}$ und die

Differenz beträgt $D = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{11}{4} \\ -\frac{19}{5} & -\frac{29}{6} \end{pmatrix}$.

Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz, d.h., es gilt:

$$A + B = B + A \text{ und}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Skalarmultiplikation

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar erfolgt komponentenweise, die einer Matrix elementweise.

Definition:

Eine Matrix A wird mit einer reellen Zahl c multipliziert, indem jedes Matricelement mit dieser Zahl multipliziert wird.

$$c \cdot A = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Besitzen alle Elemente einer Matrix einen gemeinsamen Faktor c , so kann dieser vor die Matrix gezogen werden (ausklammern).

Lehrbeispiel 2

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $B = 4A$ und $C = -3A$!

Lösung

$$B = 4 \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 4 & 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$$

$$C = -3 \cdot A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 & -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 4 & -3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}$$

Antwort: $B = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}$.

Multiplikation einer (2 x 2)-Matrix mit einem Vektor

Die Multiplikation soll an einem einfachen Beispiel eingeführt werden. Das Produkt aus $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden.

Das Ergebnis ist ein **Vektor** \vec{v} . Die Komponenten dieses Vektors sind das **Skalarprodukt** aus dem Vektor \vec{u} und den **Zeilenvektoren** von A.

Und zwar ist $v_1 = \vec{u} \cdot (5 \ 6)$ und $v_2 = \vec{u} \cdot (7 \ 8)$. Also ist

$$v_1 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 39$$

$$v_2 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 53$$

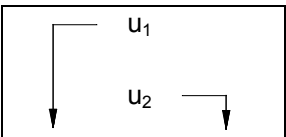
$$\rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 39 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Definition:

Das Produkt einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit einem Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor \vec{v} .

Dessen Komponenten sind das Skalarprodukt aus den Zeilenvektoren von A und \vec{u} .

Die Berechnung lässt sich einfach an einem Schema merken.

				
a_{11}	a_{12}	\rightarrow	$a_{11} \cdot u_1 + a_{12} \cdot u_2$	\leftarrow Skalarprodukt aus der oberen Zeile von A und \vec{u}
a_{21}	a_{22}	\rightarrow	$a_{21} \cdot u_1 + a_{22} \cdot u_2$	\leftarrow Skalarprodukt aus der unteren Zeile von A und \vec{u}

Lehrbeispiel 3

Berechnen Sie das Produkt \vec{v} von $A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$!

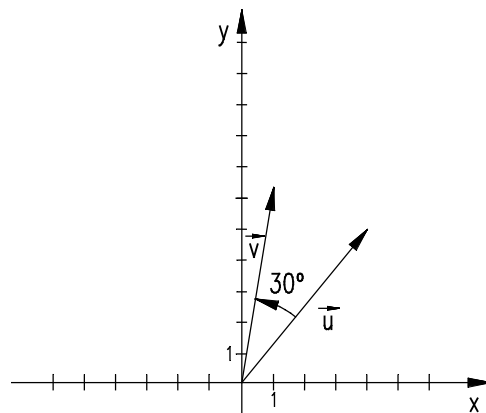
Zeichnen Sie \vec{u} und \vec{v} ! Was fällt auf?

Lösung

1. Rechnung

$$\begin{aligned} \vec{v} &= A \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} && | \text{Winkelfunktionen ausrechnen} \\ &= \begin{pmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} && | \text{Produkt ausführen} \\ &= \begin{pmatrix} 0,866 \cdot 4 & + (-0,5) \cdot 5 \\ 0,5 \cdot 4 & + 0,866 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9641 \\ 6,33 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,964 \\ 6,33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Skizze



3. Beobachtung

\vec{v} ist gegenüber \vec{u} um 30° gedreht. \vec{v} und \vec{u} haben gleiche Länge.

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \approx 6,403$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0,964^2 + 6,33^2} \approx 6,403$$

Bemerkung:

Da die Multiplikation der Matrix aus dem Lehrbeispiel eine Drehung des Vektors bedeutet, nennt man Matrizen vom Typ

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Drehmatrizen. Sie drehen einen Vektor bei der Multiplikation um den Winkel α .

Lehrbeispiel 4

Gegeben ist der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Er soll um 75° gedreht werden.

Geben Sie die Drehmatrix und den Ergebnisvektor an! Machen Sie eine Probe durch eine Skizze und durch die Berechnung der Beträge!

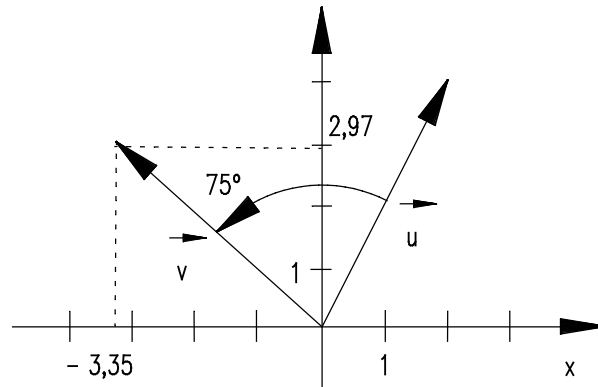
Lösung**1. Drehmatrix**

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2588 & -0,9659 \\ 0,9659 & 0,2588 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0,259 & -0,966 \\ 0,966 & 0,259 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Produkt

$$\begin{aligned} \vec{v} &= A \cdot \vec{u} \\ &= \begin{pmatrix} 0,2588 & -0,9659 \\ 0,9659 & 0,2588 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,2588 \cdot 2 + (-0,9659) \cdot 4 \\ 0,9659 \cdot 2 + 0,2588 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3,346 \\ 2,967 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3,35 \\ 2,97 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.Probe



$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4,472$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3,346)^2 + 2,967^2} \approx 4,472$$

Antwort: Die Drehmatrix lautet $A = \begin{pmatrix} 0,259 & -0,966 \\ 0,966 & 0,259 \end{pmatrix}$

und der gedrehte Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3,35 \\ 2,97 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1

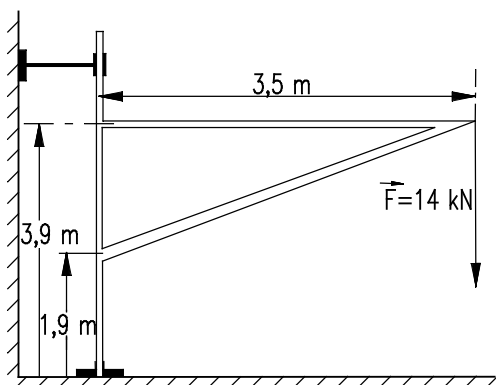
Auf den Schwerpunkt eines Körpers wirken die folgenden Kräfte.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 20 \text{ N} \\ 10 \text{ N} \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -60 \text{ N} \\ 20 \text{ N} \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 30 \text{ N} \\ 50 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie rechnerisch den resultierenden Kraftvektor sowie die Größe der Kraft und überprüfen Sie Ihr Ergebnis zeichnerisch!

Aufgabe 2

Der abgebildete Wendekran wird mit einer Kraft von 14 kN belastet.



Bestimmen Sie die Kraftvektoren der Kräfte, die auf die drei Trag- und Stützprofile wirken! Werden die Profile auf Zug oder auf Druck belastet? Überprüfen Sie Ihre Berechnungen zeichnerisch!

Aufgabe 3

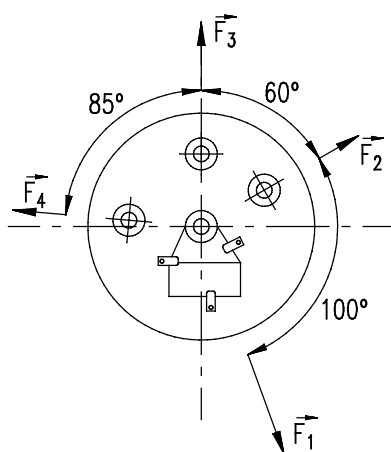
Auf einem CNC gesteuerten Bohrautomaten werden pro Werkstück 9 Bohrungen geradlinig hintereinander in gleichen Abständen ausgeführt. Durch eine Betriebsstörung sind nur noch die Koordinaten der dritten Bohrung mit $P_3(130 \text{ mm}; 85 \text{ mm})$ und der achten Bohrung mit $P_8(305 \text{ mm}; 185 \text{ mm})$ gegeben.

Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten! Welchen Weg hat der Bohrer von der ersten bis zur letzten Bohrung zurückgelegt?

Aufgaben

Aufgabe 4

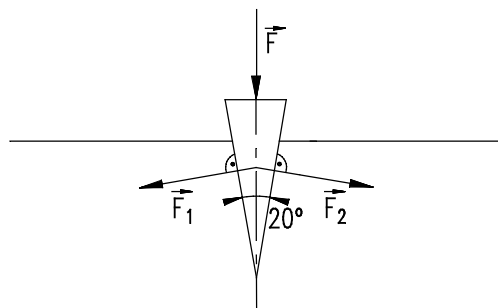
Die auf der Planscheibe einer Drehmaschine aufgespannten Teile (Werkstück, Spannraten, Gegengewichte) bewirken im Betrieb die in der Skizze dargestellten Fliehkräfte $F_1 = 1,4 \text{ kN}$; $F_2 = 0,6 \text{ kN}$; $F_3 = 0,9 \text{ kN}$; $F_4 = 0,7 \text{ kN}$.



Bestimmen Sie die Komponenten und den Betrag derjenigen Kraft, die auf das Radiallager der Arbeitsspindel wirkt!

Aufgabe 5

Auf einen Keil wirkt von oben die Kraft $F = 460 \text{ N}$.



Wie groß sind die Wangenkräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 , die das Holz spalten?

Aufgabe 6

Bestimmen Sie alle Winkel des Dreiecks, das durch die Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ gebildet wird!

Aufgabe 7

Ein Schrägaufzug wird durch ein Drahtseil bewegt. Die Kraft, die über ein Seil wirkt, lässt sich in der Form $\vec{F} = \begin{pmatrix} 6 \text{ kN} \\ 2 \text{ kN} \end{pmatrix}$ darstellen.

Der tiefste Punkt, den der Aufzug anfährt, hat die Koordinaten $P_0(550 \text{ m}; 300 \text{ m})$, der höchste Punkt die Koordinaten $P_1(670 \text{ m}; 350 \text{ m})$. Die Angaben der Koordinaten erfolgen bezogen auf einen Vermessungspunkt.

Hinweis: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Berechnen Sie, welche Arbeit bei einer Aufzugsfahrt erbracht wird!

Lernbereich

2 Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung

2.1 Differenzialrechnung

Die Differenzialrechnung stellt Hilfsmittel zur Verfügung, um bestimmte Eigenschaften von Funktionen zu untersuchen. Es ist zum Beispiel nicht nur interessant, welchen Funktionswert eine Funktion an einer Stelle hat, sondern wie sich die Funktionswerte ändern, wenn sich die Argumente ändern.

Es ist zum Beispiel für einen Widerstand R als Heißeiter nicht nur der Wert einer bestimmten Temperatur wichtig, sondern auch, wie sich der Widerstand bei einer Temperaturänderung verhält. Ändert er sich z.B. sehr wenig, so ist er für den Einsatz in einem Messgerät ungeeignet, da der Widerstand in einem Messgerät empfindlich - d.h. stark - reagieren sollte.

Bei einer Bewegung ist nicht nur der nach einer Zeit t zurückgelegte Weg interessant, sondern auch, welche Geschwindigkeit vorliegt, d.h. wie der zurückgelegte Weg sich bei einer längeren Zeitdauer ändert.

Zusammenhänge zwischen einer unabhängigen Größe (z.B. die Zeit t) und einer abhängigen (z.B. die in der Zeit zurückgelegte Wegstrecke s) werden in der Mathematik mit Funktionen beschrieben.

So wird z.B. bei freiem Fall unter idealen Bedingungen der Zusammenhang zwischen der Zeit und dem zurückgelegten Weg durch

$$s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (\text{mit der Erdbeschleunigung } g = 9,81 \text{ m/s}^2) \text{ beschrieben.}$$

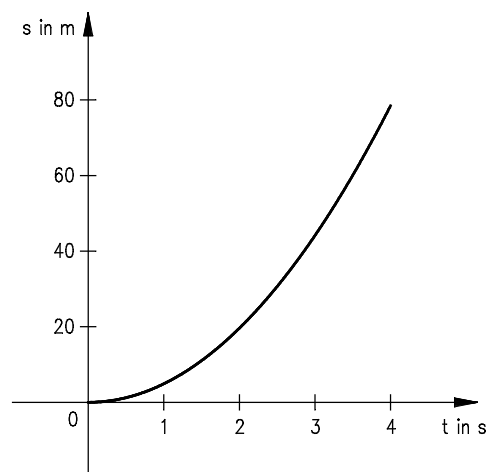


Abbildung 7 s-t-Diagramm des freien Falls

Hier lässt sich z.B. ablesen, dass nach 3 s der zurückgelegte Weg ca. 45 m ist.

Ein wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist die **Steigung** der Funktion. Am Grafen ist abzulesen, dass in der ersten Sekunde sich der Weg um 5 m ändert (von 0 auf 5 m). In der dritten Sekunde schon um 25 m (von 20 m auf 45 m). Würde der Graf fortgesetzt, so ließe sich z.B. ablesen, dass der Weg in der zehnten Sekunde sich um ca. 93 m ändern würde. Anders ausgedrückt, werden in der ersten Sekunde 5 m und in der zehnten Sekunde 93 m zurückgelegt. Die Wegänderung ist also in der ersten Sekunde deutlich geringer als in der Zehnten. Am Grafen ist die eingezeichnete Gerade deutlich **steiler**, was auch zu dem Begriff der Steigung geführt hat.

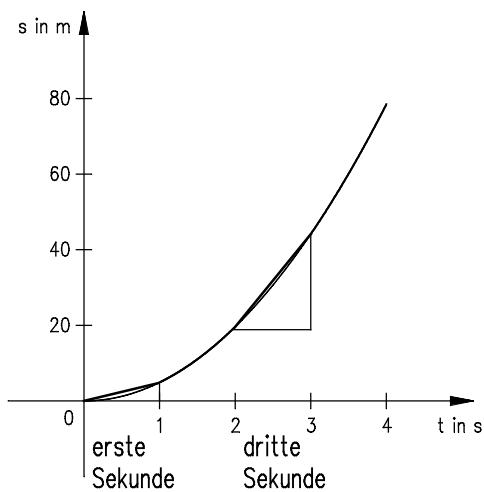


Abbildung 8 Steigungen im s-t-Diagramm

2.1.1 Differenzialquotient

Der Weg s , den ein Körper bei einer bestimmten Bewegung zurücklegt, soll sich zwischen $t = 0$ und $t = 6$ s durch die Funktion

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 30$$

beschreiben lassen (s wird in Meter gemessen).

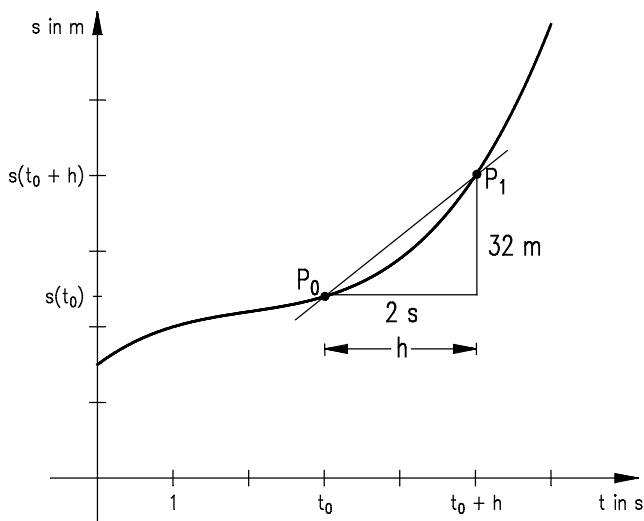


Abbildung 9 Graf der Funktion $s(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 30$

Der Graf dient nur der Veranschaulichung. Die genauen Werte werden der Funktionsgleichung entnommen.

Für $t = 3$ s ergibt sich $s(3) = 48$ m; nach 3 Sekunden beträgt der zurückgelegte Weg damit 48 Meter.

In den nächsten 2 Sekunden wird ein Weg von 32 Metern zurückgelegt, denn $s(5) = 80$ m. Das entspricht einem durchschnittlichen Wegzuwachs von 16 Metern pro Sekunde.

In der Physik wird dieser Wegzuwachs pro Zeit Durchschnitts-**Geschwindigkeit** v genannt. Der Körper bewegt sich in den nächsten zwei Sekunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $v = 16$ m/s.

Anschaulich ist diese Durchschnittsgeschwindigkeit die **Steigung m der Sekanten** durch P_0 und P_1 .

$$m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{32 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Bezeichnet wird dieser Wert als **Differenzenquotient** $\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$.

Beispiel: $\frac{s(3 + 2) - s(3)}{2} = \frac{80 \text{ m} - 48 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Alle drei Begriffe besagen also dasselbe.

Durchschnitts- geschwindigkeit	Sekantensteigung	Differenzenquotient
Der Körper legt in den nächsten 2 Sekunden 32 Meter zurück. $v = \frac{32 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Die Durchschnitts- geschwindigkeit beträgt also $16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	Die Sekanten zwischen P_0 (3 s; 48 m) und P_1 (5 s; 80 m) hat eine Steigung $m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80 \text{ m} - 48 \text{ m}}{5 \text{ s} - 3 \text{ s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Die Sekantensteigung beträgt also $16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.	Der Differenzenquotient für $t_0 = 3$ s und $h = 2$ s beträgt $\frac{s(3 + 2) - s(3)}{2} = \frac{80 \text{ m} - 48 \text{ m}}{2 \text{ s}}$ $= 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Tabelle 3 Gegenüberstellung Durchschnittsgeschwindigkeit, Sekantensteigung und Differenzenquotient

Lehrbeispiel 1

Ein Körper wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 35$ m/s reibungsfrei nach oben geworfen. Die Formel für die erreichte Höhe lautet $H(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, wobei $g = 9,81$ m/s² ist.

Berechnen Sie den Differenzenquotienten für $t_0 = 1$ s und $h = 2$ s!

Lösung

$$\begin{aligned}
 \frac{H(t_0 + h) - H(t_0)}{h} &= \frac{H(1\text{ s} + 2\text{ s}) - H(1\text{ s})}{2\text{ s}} \\
 &= \frac{H(3\text{ s}) - H(1\text{ s})}{2\text{ s}} \\
 &= \frac{35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3\text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3\text{ s})^2 - \left[35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1\text{ s})^2 \right]}{2\text{ s}} \\
 &= \frac{105\text{ m} - 44,145\text{ m} - [35\text{ m} - 4,905\text{ m}]}{2\text{ s}} \\
 &= \frac{60,855\text{ m} - 30,095\text{ m}}{2\text{ s}} \\
 &= 15,38 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Der Differenzenquotient beträgt $15,38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Bisher wurde die Durchschnittsgeschwindigkeit berechnet. Von Interesse ist aber meist die **Momentangeschwindigkeit**, d.h. die Geschwindigkeit, mit der der Körper sich zur Zeit $t = 3\text{ s}$ bewegt, die Geschwindigkeit, die z.B. der Tachometer im Auto anzeigt.

Im Anfangsbeispiel interessiert also die Frage, welche Geschwindigkeit der Körper zum Zeitpunkt $t = 3\text{ s}$ hat.

Die Idee dazu ist, den Punkt P_1 in Abbildung 9 immer näher an P_0 heranzubringen.

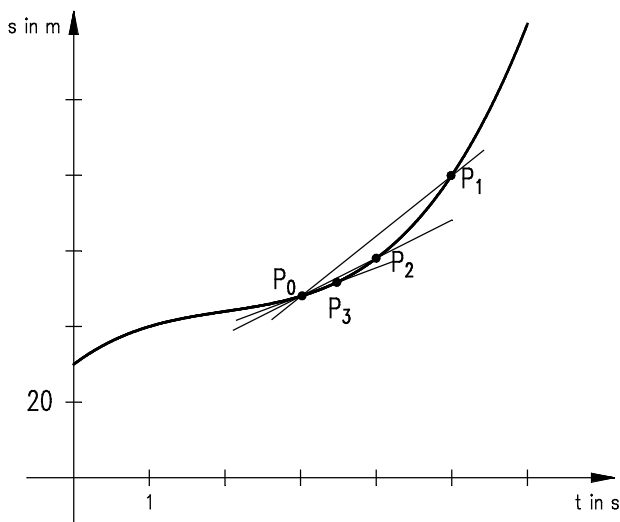


Abbildung 10 Sekantensteigungen für kleinere Intervalle

$$P_0 P_2 : t_0 = 3\text{ s} \quad h = 1\text{ s} \quad \frac{s(3+1) - s(3)}{1\text{ s}} = \frac{58\text{ m} - 48\text{ m}}{1\text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$P_0 P_3 : t_0 = 3\text{ s} \quad h = 0,5\text{ s} \quad \frac{s(3+0,5) - s(3)}{0,5\text{ s}} = \frac{51,875\text{ m} - 48\text{ m}}{0,5\text{ s}} = 7,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Weitere Punkte ohne Zeichnung:

$$t_0 = 3 \text{ s} \quad h = 0,1 \text{ s} \quad \frac{s(3 + 0,1) - s(3)}{0,1 \text{ s}} = \frac{48,631 \text{ m} - 48 \text{ m}}{0,1 \text{ s}} = 6,31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t_0 = 3 \text{ s} \quad h = 0,01 \text{ s} \quad \frac{s(3 + 0,01) - s(3)}{0,01 \text{ s}} = \frac{48,060 \text{ m} - 48 \text{ m}}{0,01 \text{ s}} = 6,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bei den Werten liegt die Vermutung nahe, dass die Momentangeschwindigkeit den Wert 6 m/s hat.

Um das zu bestätigen, berechnet man den Differenzenquotienten für ein beliebiges h , das immer kleiner wird.

$$\begin{aligned} \frac{s(3+h) - s(3)}{h} &= \frac{(3+h)^3 - 6 \cdot (3+h)^2 + 15 \cdot (3+h) + 30 - (3^3 - 6 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 + 30)}{h} \\ &= \frac{27 + 27h + 9h^2 + h^3 - 6 \cdot (9 + 6h + h^2) + 45 + 15h + 30 - 48}{h} \\ &= \frac{48 + 6h + 3h^2 + h^3 - 48}{h} \\ &= \frac{6h + 3h^2 + h^3}{h} \quad | \text{ h ausklammern} \\ &= \frac{h \cdot (6 + 3h + h^2)}{h} \\ &= 6 + 3h + h^2 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile der Herleitung steht nun eine Formel, mit der die Steigung der Sekante durch den Punkt P_0 für jedes beliebige h berechnet werden kann. Insbesondere kann h sehr klein gewählt werden. Der Wert des Differenzenquotienten nähert sich immer mehr dem Wert 6 m/s.

Wird nun $h = 0$ gewählt, geht die Sekante in die **Tangente** über. Die Kurve wird durch die Tangente **berührt**. Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird zur **Momentangeschwindigkeit**, d.h. zu der Geschwindigkeit, die ein Tachometer anzeigen würde. Den Differenzenquotienten nennt man nun **Differenzialquotient** und bezeichnet ihn mit **ds/dt**.

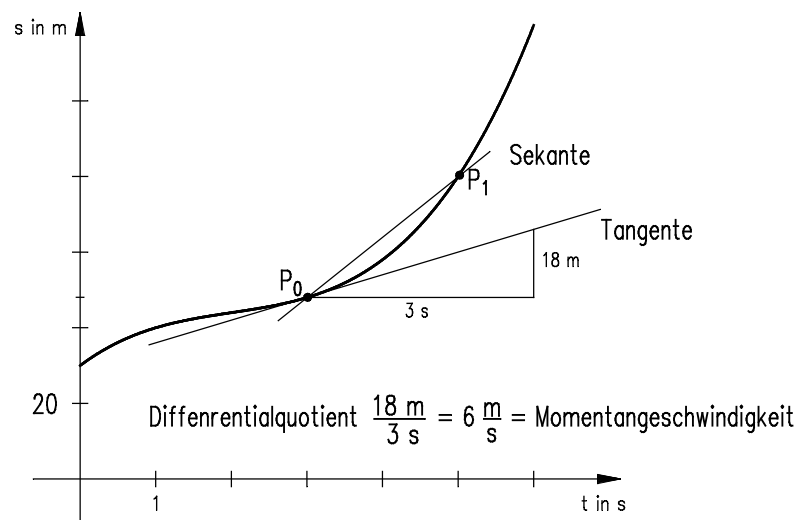


Abbildung 11 Sekante, Tangente, Momentangeschwindigkeit und Differenzialquotient

Bemerkung: Entscheidend für die Möglichkeit, $h = 0$ wählen zu können ist der drittletzte Schritt in obiger Herleitung, nämlich das Ausklammern von h .

Lehrbeispiel 2

Berechnen Sie mit den Werten von Lehrbeispiel 1 die Momentangeschwindigkeit nach einer Sekunde!

Lösung

Differenzenquotient:

$$\begin{aligned}
 \frac{H(1s+h)-H(1s)}{h} &= \frac{35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (1s+h) - \frac{9,81 \text{ m}}{2 \text{ s}^2} \cdot (1s+h)^2 - \left[35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1s - \frac{9,81 \text{ m}}{2 \text{ s}^2} \cdot (1s)^2 \right]}{h} \\
 &= \frac{35 \text{ m} + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot h - \frac{9,81 \text{ m}}{2 \text{ s}^2} \cdot (1s^2 + 2sh + h^2) - 30,095 \text{ m}}{h} \\
 &= \frac{35 \text{ m} + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot h - 4,905 \text{ m} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot h - \frac{9,81 \text{ m}}{2 \text{ s}^2} \cdot h^2 - 30,095 \text{ m}}{h} \\
 &= \frac{25,19 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot h - \frac{9,81 \text{ m}}{2 \text{ s}^2} \cdot h^2}{h} \quad | \text{ h ausklammern} \\
 &= \frac{h \cdot \left(25,19 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{9,81 \text{ m}}{2 \text{ s}^2} \cdot h \right)}{h} \quad | \text{ h kürzen} \\
 &= 25,19 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{9,81 \text{ m}}{2 \text{ s}^2} \cdot h
 \end{aligned}$$

Wenn $h = 0$ wird, erhält man die Momentangeschwindigkeit

$$v = 25,19 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 25,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Antwort: Die Momentangeschwindigkeit nach einer Sekunde beträgt 25,2 m/s.

Zusammenfassung

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$. Dann nennt man $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $h \rightarrow 0$ den Differenzialquotienten. Er gibt die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0; f(x_0))$ an.

2.1.2 Ableitungsfunktion

Mit dem Verfahren der Differenzialquotientenbestimmung kann die Steigung einer Funktion für einen beliebigen Punkt berechnet werden. Für jeden weiteren Punkt muss die komplette Rechnung wiederholt werden.

Hier wird im Folgenden ein Verfahren entwickelt, wie **einmal** aus der gegebenen Funktion eine neue Funktion abgeleitet wird, mit der man dann einfach für **jeden** Punkt der Ausgangsfunktion die Steigung berechnen kann.

Die Herleitung geschieht an einem Beispiel:

Gegeben sei $f(x) = 3x^2 - 12x$.

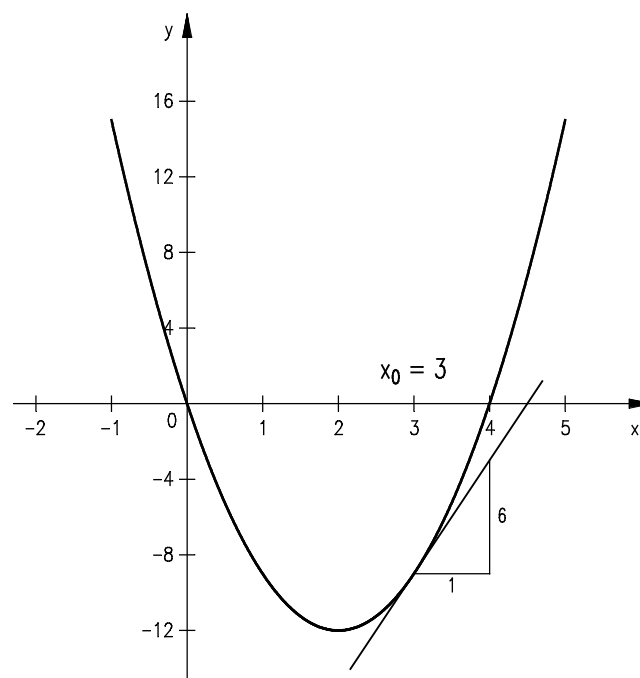


Abbildung 12 Graf zu $f(x) = 3x^2 - 12x$

Statt die Steigung der Tangenten an einem bestimmten Punkt zu berechnen, wird jetzt die Steigung an einer beliebigen, aber festen Stelle x_0 berechnet.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{3 \cdot (x_0 + h)^2 - 12 \cdot (x_0 + h) - [3x_0^2 - 12x_0]}{h} \\
&= \frac{3x_0^2 + 6x_0h + 3h^2 - 12x_0 - 12h - 3x_0^2 + 12x_0}{h} \\
&= \frac{6x_0h - 12h + 3h^2}{h} \\
&= \frac{h \cdot (6x_0 - 12 + 3h)}{h} \\
&= 6x_0 - 12 + 3h \\
\frac{dy}{dx} &= 6x_0 - 12 \quad (\text{für } h = 0)
\end{aligned}$$

Mit dem Ausdruck in der letzten Zeile kann jetzt zu dieser Funktion zu **jedem** x_0 -Wert durch einfaches Einsetzen die Steigung bestimmt werden.

Beispiel:

Die Steigung für $x_0 = 3$ ist $6 \cdot 3 - 12 = 6$. Die Steigung für $x_0 = -1$ ist $6 \cdot (-1) - 12 = -18$.

Dieser Ausdruck $6x_0 - 12$ kann wiederum als Funktion von f aufgefasst werden. Da sie von der Ausgangsfunktion abgeleitet wurde, wird sie **erste Ableitungsfunktion** genannt und mit **$f'(x)$** bezeichnet. Es gilt also für dieses Beispiel: $f'(x) = 6x_0 - 12$.

Durch Einsetzen von x -Werten in diese Funktion wird also die Steigung der Ausgangsfunktion an der eingesetzten Stelle bestimmt.

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie die erste Ableitungsfunktion von $f(x) = -2x^3 + 5x$ und bestimmen Sie damit die Steigung der Funktion f an der Stelle -1 !

Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{-2 \cdot (x_0 + h)^3 + 5 \cdot (x_0 + h) - [-2(x_0)^3 + 5x_0]}{h} \\
&= \frac{-2 \cdot (x_0^3 + 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3) + 5x_0 + 5h + 2x_0^3 - 5x_0}{h} \\
&= \frac{-6hx_0^2 - 6h^2x_0 - 2h^3 + 5h}{h} \\
&= \frac{h \cdot (-6x_0^2 + 5 - 6hx_0 - 2h^2)}{h} \\
&= -6x_0^2 + 5 - 6x_0h - 2h^2
\end{aligned}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 5$$

$$f'(-1) = -6 \cdot (-1)^2 + 5 = -6 + 5 = -1$$

Antwort: Die erste Ableitungsfunktion lautet $f'(x) = -6x^2 + 5$. Und damit hat die Steigung an der Stelle -1 den Wert -1 .

Bietet die Bestimmung der Ableitungsfunktion schon eine erste Vereinfachung, gibt es noch eine weitere Idee, die das Bestimmen der Ableitungsfunktion vereinfacht. Zwar muss mit dem oben beschriebenen Verfahren nicht mehr zu jedem x -Wert die Steigung bestimmt werden, sondern es wird eine zu der Funktion passende Ableitungsfunktion bestimmt, mit der dann die Steigungen an beliebigen Punkten berechnet werden können. Allerdings muss noch zu jeder Funktion einzeln die Ableitung bestimmt werden.

Es gibt aber Regeln, die sog. Ableitungsregeln, welche dieses Verfahren abkürzen. Die Idee dabei ist folgende:

1. Zu einigen Grundfunktionen wie x^2 , x^3 , x^n , $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln x$ werden die Ableitungsfunktionen bestimmt.
2. Weiterhin werden einfache Regeln entwickelt, aus denen man aus diesen Grundfunktionen zusammengesetzte Funktionen, wie z.B. $f(x) = 5x^4 - \sin x$ oder $g(x) = e^{-2x} \cdot \sin(\omega x - \varphi)$ relativ leicht ableiten kann.

Ableitungsfunktionen einiger Grundfunktionen

1. **$f(x) = c$** , mit einer reellen Zahl c

Da es sich hier um eine konstante Funktion handelt, also um eine Parallele zur x -Achse, liegt die Steigung 0 vor. Also gilt **$f'(x) = 0$** .

2. **$f(x) = x$**

Hier benötigt man keine Rechnung, denn $f(x) = x$ ist die Winkelhalbierende im I. Quadranten und hat damit die Steigung 1 . Also ist **$f'(x) = 1$** .

3. **$f(x) = x^2$**

Die Ableitungsfunktion wird nach obigem Verfahren bestimmt.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\
 &= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\
 &= \frac{2x_0h + h^2}{h} \\
 &= \frac{h \cdot (2x_0 + h)}{h} \\
 &= 2x_0 + h
 \end{aligned}$$

$$\text{d.h. : } f'(x) = 2x$$

4. $f(x) = x^3$

Die Ableitungsfunktion wird nach obigem Verfahren bestimmt.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} \\ &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h} \\ &= \frac{h \cdot (3x_0^2 + 3x_0 h + h^2)}{h} \\ &= 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2\end{aligned}$$

$$\text{d.h.: } f'(x) = 3x^2$$

5. $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Q}$

Es kann gezeigt werden, dass $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ gilt. Damit gilt z.B.:

$$f(x) = x^{10} \Rightarrow f'(x) = 10 \cdot x^9 \text{ und}$$

$$f(x) = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5 \cdot x^{-6}$$

Diese Ableitungsregel wird auch **Potenzregel** genannt, weil sie für eine ganze Funktionenklasse, nämlich die Potenzfunktionen, gilt.

In der folgenden Tabelle sind die ersten Ableitungsfunktionen einiger Grundfunktionen zusammengestellt.

Funktion	$f(x)$	Erste Ableitungsfunktion $f'(x)$
Konstante Funktion	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
reziproke Funktion	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Potenzfunktion	$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Q}$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Wurzelfunktion	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Sinusfunktion	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
Kosinusfunktion	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
e-Funktion	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Logarithmusfunktion	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Tabelle 4 Erste Ableitungsfunktionen einiger Grundfunktionen

Ableitungsregeln für zusammengesetzte Funktionen

1. Faktorregel

Regel: Wenn $f(x) = c \cdot g(x)$, sich also $f(x)$ durch Multiplikation einer Funktion $g(x)$ mit einer konstanten Zahl schreiben lässt, dann gilt $f'(x) = c \cdot g'(x)$. D.h. man findet die erste Ableitungsfunktion von $f(x)$, indem man $g(x)$ ableitet und diese mit der Konstanten multipliziert.

Bevor die Regel bewiesen wird, ein Lehrbeispiel:

Lehrbeispiel 2

Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von $f(x)=5x^4$!

Lösung

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (5 \cdot x^4)' && | \text{Faktorregel anwenden} \\
 &= 5 \cdot (x^4)' && | \text{Grundfunktion ableiten} \\
 &= 5 \cdot 4x^3 && | \text{Zusammenfassen} \\
 &= 20x^3
 \end{aligned}$$

Beweis der Regel:

Sei $f(x) = c \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{c \cdot g(x_0 + h) - c \cdot g(x_0)}{h} \\ &= \frac{c \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \\ &= c \cdot \underbrace{\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

2. Summenregel

Regel: Wenn $f(x) = g(x) + h(x)$, also $f(x)$ als Summe zweier Funktionen geschrieben werden kann, dann gilt für die erste Ableitungsfunktion von $f(x)$: $f'(x) = g'(x) + h'(x)$, d.h. man findet die erste Ableitungsfunktion einer Summe zweier Funktionen, indem man die Summanden einzeln ableitet und addiert.

Lehrbeispiel 3

Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von $f(x) = x^4 + x^{-2}$!

Lösung

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^4 + x^{-2})' && | \text{Summenregel} \\ &= (x^4)' + (x^{-2})' && | \text{Grundfunktion ableiten} \\ &= 4x^3 + (-2)x^{-3} \\ &= 4x^3 - 2x^{-3}\end{aligned}$$

Bemerkungen

- Diese Regel gilt auch für Differenzen, d.h. aus $f(x) = g(x) - h(x)$ folgt $f'(x) = g'(x) - h'(x)$.
- Diese Regel gilt auch für mehrere Summanden.

Lehrbeispiel 4

Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von $f(x) = 5x^4 - 7x^2$!

Lösung

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (5x^4)' - (7x^2)' && \text{nach Summenregel} \\
 &= 5 \cdot (x^4)' - 7 \cdot (x^2)' && \text{nach Faktorregel} \\
 &= 5 \cdot 4x^3 - 7 \cdot 2x && \text{nach Potenzregel} \\
 &= 20x^3 - 14x
 \end{aligned}$$

Antwort: Die Ableitungsfunktion lautet $f'(x) = 20x^3 - 14x$.

3. Produktregel

Regel: Wenn $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, also $f(x)$ als Produkt zweier Funktionen geschrieben werden kann, dann gilt für die erste Ableitungsfunktion von $f(x)$:
 $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.

Lehrbeispiel 5

Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von $f(x) = x^2 \cdot \sin x$!

Lösung

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 \cdot \sin x \\
 &\quad | \quad | \\
 &\quad g(x) \quad h(x) \\
 f'(x) &= (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' \\
 &= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x
 \end{aligned}$$

Antwort: Die erste Ableitungsfunktion lautet $f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$.

4. Kettenregel

Die Funktion $f(x) = \sin(3x^2 + 5x - 3)$ nennt man **verkettet**. Der Sinuswert wird hier nicht von x , sondern von $g(x) = 3x^2 + 5x - 3$ gebildet. $g(x)$ wird die **innere** Funktion genannt, die Sinusfunktion die **äußere** Funktion.

Die erste Ableitung solch einer verketteten Funktion wird bestimmt, indem die Ableitung der äußeren Funktion gebildet wird - statt für x für $g(x)$. Danach wird der Term mit der Ableitung der inneren Funktion multipliziert. Also im Beispiel:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \underbrace{\cos(3x^2 + 5x - 3)}_{\text{Ableitung von } \sin(g(x))} \cdot \underbrace{(6x + 5)}_{\text{Ableitung von } g(x)} \\
 &\quad \text{Ableitung der äußeren Funktion} \quad \cdot \quad \text{Ableitung der inneren Funktion}
 \end{aligned}$$

An einigen Lehrbeispielen wird die Anwendung der Regel erläutert.

Lehrbeispiel 6

Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von $f(x) = \sin(2x)$!

Lösung

		deren Ableitung
äußere Funktion:	$\sin x$	$\cos x$
innere Funktion:	$2x$	2

$$f'(x) = \cos(2x) \cdot 2$$

Lehrbeispiel 7

Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von $f(x) = (2x^3 + 5)^7$!

Lösung

		deren Ableitung
äußere Funktion:	x^7	$7x^6$
innere Funktion:	$2x^3 + 5$	$6x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7 (2x^3 + 5)^6 \cdot 6x^2 \\ &= 42x^2 (2x^3 + 5)^6 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 8

Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von $f(x) = \sqrt{\sin x}$!

Lösung

		deren Ableitung
äußere Funktion:	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
innere Funktion:	$\sin x$	$\cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x \\ &= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \end{aligned}$$

Oft müssen auch die Regeln kombiniert angewendet werden.

Lehrbeispiel 9

Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von $f(x) = (\sin x \cdot e^{2x})^6$!

Lösung

Stufe I

äußere Funktion:	x^6	deren Ableitung $6x^5$
innere Funktion:	$\sin x \cdot e^{2x}$	$\underbrace{(\sin x \cdot e^{2x})'}_{g(x)}$

$$g'(x) = (\sin x)' \cdot e^{2x} + \sin x \cdot \underbrace{(e^{2x})'}_{h(x)} \quad \text{wieder Kettenregel!}$$

äußere Funktion:	e^x	deren Ableitung e^x
innere Funktion:	$2x$	2

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(x) &= \cos x \cdot e^{2x} + \sin x \cdot \underbrace{e^{2x}}_{h'(x)} \cdot 2 \\ &= e^{2x} \cdot (\cos x + 2 \sin x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{6 \cdot (\sin x \cdot e^{2x})^5}_{\text{Ableitung der äußeren Funktion}} \cdot \underbrace{e^{2x} \cdot (\cos x + 2 \sin x)}_{\text{Ableitung der inneren Funktion}}$$

In der folgenden Tabelle sind die Regeln noch einmal zusammengestellt.

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = c \cdot g(x)$	Faktorregel $f'(x) = c \cdot g'(x)$
$f(x) = g(x) + h(x)$	Summenregel $f'(x) = g'(x) + h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	Produktregel $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$f(x) = f(g(x))$	Kettenregel $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Tabelle 5 Ableitungsregeln

Höhere Ableitungen

Die jeweils berechnete Ableitungsfunktion kann als eigenständige Funktion aufgefasst werden und wiederum abgeleitet werden. Sie wird dann **zweite** Ableitungsfunktion genannt. Ebenso gibt es die **dritte** und weitere Ableitungsfunktionen. Die zweite Ableitung ist die Ableitung von f' und wird mit f'' bezeichnet, analog die dritte mit f''' . Ab der vierten Ableitung werden römische Zahlen benutzt, also f^{IV} , f^V , ...

Lehrbeispiel 10

Berechnen Sie alle Ableitungen von $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 17$!

Lösung

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 4$$

$$f'''(x) = 24x - 18$$

$$f^{IV}(x) = 24$$

$$f^V(x) = 0$$

Alle weiteren Ableitungen sind ebenfalls 0.

Hoch- und Tiefpunkte

Mithilfe der ersten Ableitungsfunktion lassen sich leicht Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion berechnen.

Die erste Ableitungsfunktion gibt zu jedem x -Wert die Steigung der Ausgangsfunktion an. Hoch- oder Tiefpunkte haben aber die Eigenschaft, dass sie die Steigung 0 aufweist, d.h. sie haben eine waagerechte Tangente.

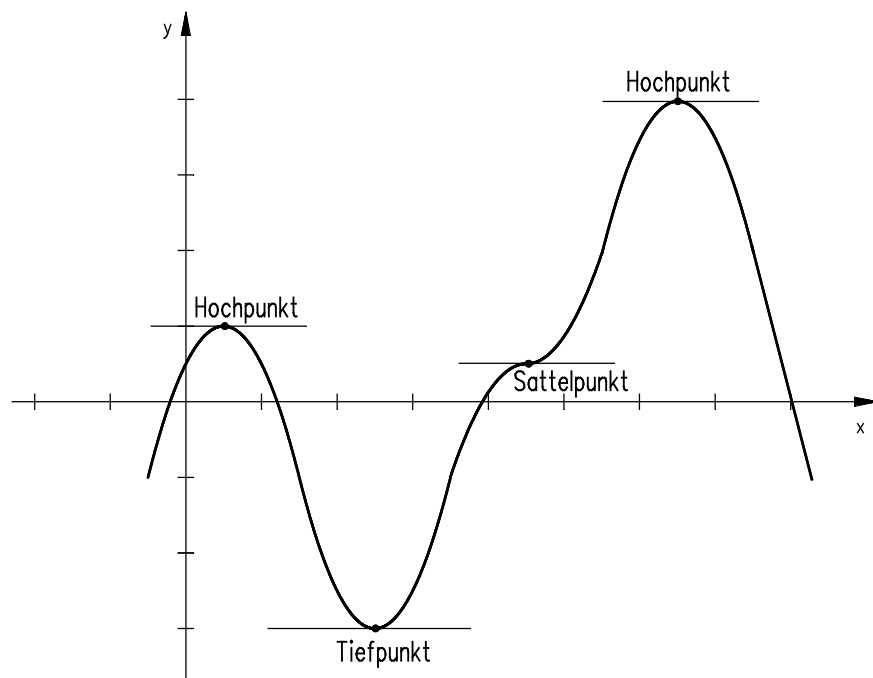


Abbildung 13 Hoch-, Tief- und Sattelpunkte einer Funktion

Stellen für Hoch- oder Tiefpunkte lassen sich also berechnen, wenn die Stellen gesucht werden, an denen die erste Ableitung den Wert 0 hat.

Bedingung für Hoch- oder Tiefpunkte: $f'(x) = 0$

Lehrbeispiel 11

Berechnen Sie mögliche Stellen für Hoch- oder Tiefpunkte von

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x !$$

Lösung

1. Bestimmung von $f'(x)$

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18$$

2. Bestimmung der Nullstellen x_E von $f'(x)$

$$\text{Bed.: } f'(x_E) = 0$$

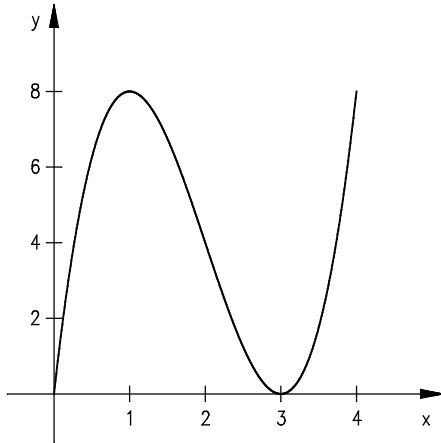
$$\text{d.h.: } 6x_E^2 - 24x_E + 18 = 0 \quad | :6$$

$$x_E^2 - 4x_E + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{E1,2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\ &= 2 \pm 1 \end{aligned}$$

$$x_{E_1} = 2 + 1 = 3$$

$$x_{E_2} = 2 - 1 = 1$$



Antwort: Mögliche Stellen für Extrema liegen bei 3 und 1.

Ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt, entnimmt man dem Grafen.

Bemerkung:

Es gibt noch eine weitere Art von Punkten, an denen die Steigung 0 ist, die sog. **Sattelpunkte**. Diese lassen sich aber am Verlauf des Grafen erkennen. Wichtig ist nur, dass man durch das Bestimmen der Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion **alle möglichen** Stellen berechnet, an denen ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegen kann.

Lehrbeispiel 12

Bestimmen Sie von $f(x) = \frac{1}{64}(6x^5 + 45x^4 + 80x^3)$ die Stellen, an denen die erste Ableitung 0 wird. Um welche Art von Punkten handelt es sich?

Lösung

1. Bestimmung von $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{64}(30x^4 + 180x^3 + 240x^2) \\ &= \frac{30}{64}(x^4 + 6x^3 + 8x^2) \\ &= \frac{15}{32}x^2(x^2 + 6x + 8) \end{aligned}$$

2. Bestimmung der Nullstellen x_E von $f'(x)$

$$\text{Bed.: } f'(x_E) = 0$$

$$\text{d.h.: } \frac{15}{32} x_E^2 (x_E^2 + 6x_E + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{E_1} = 0 \quad \vee \quad x_E^2 + 6x_E + 8 = 0$$

$$x_{E_{2,3}} = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1$$

$$x_{E_2} = -3 + 1 = -2$$

$$x_{E_3} = -3 - 1 = -4$$

3. Bestimmung der Funktionswerte der Extremstellen

$$x_{E_1} = 0 : f(0) = 0$$

$$P_1 (0;0)$$

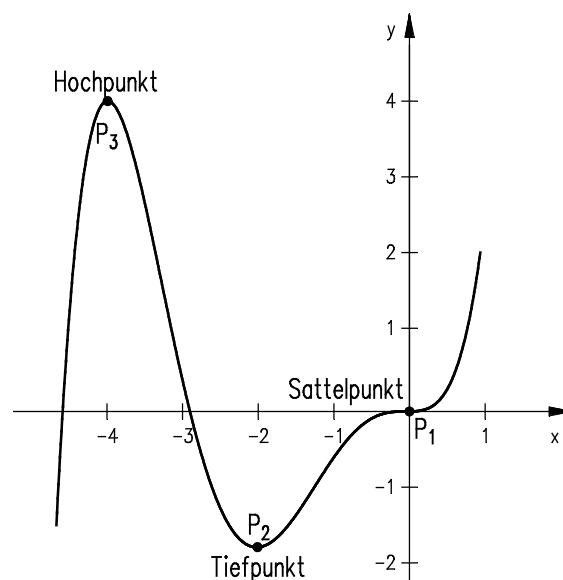
$$\begin{aligned} x_{E_2} = -2 : f(-2) &= \frac{1}{64} (6 \cdot (-2)^5 + 45(-2)^4 + 80(-2)^3) \\ &= -1,75 \end{aligned}$$

$$P_2 (-2;-1,75)$$

$$\begin{aligned} x_{E_3} = -4 : f(-4) &= \frac{1}{64} (6 \cdot (-4)^5 + 45(-4)^4 + 80(-4)^3) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$P_3 (-4;4)$$

4. Bestimmung der Art der Extrema aus dem Grafen



Antwort: Die erste Ableitung der Funktion wird an den Stellen $x_{E_1} = 0$, $x_{E_2} = -2$ und $x_{E_3} = -4$ gleich Null. Sie hat in $P_1 (0;0)$ einen Sattelpunkt, in $P_2 (-2;-1,75)$ einen Tiefpunkt und in $P_3 (-4;4)$ einen Hochpunkt.

Bedeutung der Ableitungsfunktion in der Technik

Vorbemerkung

1. In der Technik werden die dort auftretenden Größen meist mit anderen Buchstaben als mit f bezeichnet. So steht s für den Weg, t für die Zeit, F für die Kraft, i für die Stromstärke. In Anlehnung dazu werden die in der Technik auftretenden Funktionen auch durch die Formelsymbole bezeichnet. So lautet z.B. das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Mathematisch wird dadurch die Funktion s als Funktion der Zeit definiert.
2. In der Technik treten häufig zeitabhängige Vorgänge auf. Wenn von diesen Funktionen die erste Ableitungsfunktion bestimmt werden soll, wird das statt des Striches durch einen Punkt verdeutlicht. Die erste Ableitung des Weg-Zeit-Gesetzes des freien Falls würde also mit $\dot{s}(t)$ (sprich: s Punkt von t) bezeichnet.

In der Physik und der Technik sind viele physikalische Größen über die Ableitung miteinander verknüpft. Die folgende Tabelle zeigt eine Zusammenstellung einiger Größen:

Ausgangsfunktion	Ableitung	Zusammenhang
Ladung $q(t)$	$i(t) = \dot{q}(t)$	Beim Stromfluss durch einen elektrischen Leiter ist die Stromstärke $i(t)$ die erste Ableitung der elektrischen Ladung $q(t)$ nach der Zeit t .
Stromstärke $i(t)$	$u(t) = L \cdot \dot{i}(t)$	Fließt durch eine Spule der Induktivität L ein zeitlich veränderlicher Strom der Stromstärke $i(t)$, so ergibt sich die elektrische Spannung $u(t)$ als Produkt aus Induktivität und der Ableitung der Stromstärke nach der Zeit t .
Weg $s(t)$	$v(t) = \dot{s}(t)$	Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ gleich der ersten Ableitung des Weges $s(t)$ nach der Zeit t .
Geschwindigkeit $v(t)$	$a(t) = \dot{v}(t)$	Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Beschleunigung $a(t)$ gleich der ersten Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$ nach der Zeit t .
Weg $s(t)$	$a(t) = \ddot{s}(t)$	Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Beschleunigung $a(t)$ gleich der zweiten Ableitung des Weges $s(t)$ nach der Zeit t .
Drehwinkel $\varphi(t)$	$\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$	Die augenblickliche Lage eines Massenpunktes bei einer Drehbewegung wird durch den zeitabhängigen Winkel $\varphi(t)$ beschrieben. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ ist die erste Ableitung des Drehwinkels $\varphi(t)$ nach der Zeit t .
Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$	$\alpha(t) = \dot{\omega}(t)$	Die Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ ist die erste Ableitung der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ nach t .
Drehwinkel $\varphi(t)$	$\alpha(t) = \ddot{\varphi}(t)$	Die Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ ist die zweite Ableitung des Drehwinkels $\varphi(t)$ nach der Zeit t .

Tabelle 6 Einige physikalische Größen als Ableitungen

Lehrbeispiel 13

Das Weg-Zeit-Gesetz für den senkrechten Wurf aus der Höhe h_0 mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 lässt sich durch die Funktion $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t - 0,5 \cdot g \cdot t^2$ beschreiben, wobei $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung ist. Die Anfangsgeschwindigkeit sei 30 m/s und die Anfangshöhe 100 m .

13.1 In welcher Höhe befindet sich der Ball nach 4 s ?

13.2 Welche Geschwindigkeit hat er zu diesem Zeitpunkt?

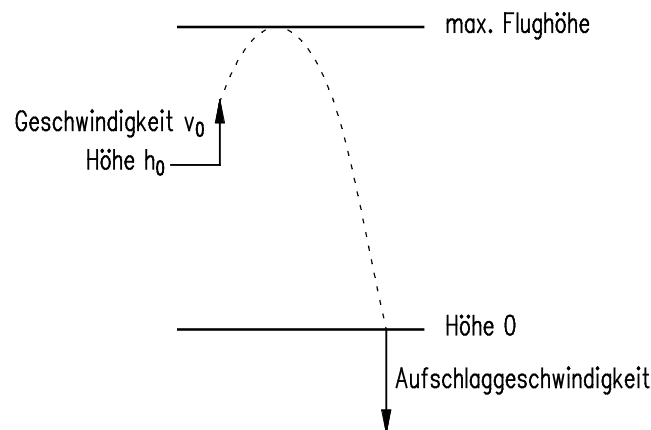
13.3 Wann erreicht der Ball seine höchste Flughöhe?

13.4 Wie hoch ist er dann?

13.5 Wann schlägt der Ball auf?

13.6 Welche Geschwindigkeit hat er dann?

13.7 Zeichnen Sie das s - t -Diagramm bis zum Aufschlag!



Lösung

Mit den Werten lautet $s(t)$:

$$s(t) = 100 \text{ m} + 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 0,5 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

Lehrbeispiel 13.1

Die Höhe nach H_S wird berechnet, indem in $s(t)$ für t der Wert H_S eingesetzt wird, also $s(H_S)$ gebildet wird.

$$\begin{aligned} s(4 \text{ s}) &= 100 \text{ m} + 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \text{ s} - 0,5 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 16 \text{ s}^2 \\ &= 141,52 \text{ m} \\ &\approx 141,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Antwort: Der Körper befindet sich nach 4 Sekunden in $141,5 \text{ m}$ Höhe.

Lehrbeispiel 13.2

Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung von $s(t)$.

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{s}(t) \\ &= 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \cdot 0,5 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \\ &= 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(4 \text{ s}) &= 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ s} \\ &= -9,24 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Körpers nach 4 Sekunden beträgt $-9,24 \text{ m/s}$; d.h. der Körper bewegt sich schon nach unten.

Lehrbeispiel 13.3

Der Ball erreicht seine höchste Flughöhe, wenn das Ansteigen beendet ist, d.h., wenn seine Geschwindigkeit 0 wird. Zunächst wird die Zeit t_M berechnet, bei der v den Wert 0 hat.

$$\begin{aligned} \text{Bed.: } v(t_M) &= 0 \\ \text{d.h.: } 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t_M &= 0 & \left| + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t_M \right. \\ 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} &= 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t_M & \left| : 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right. \\ \frac{30 \text{ m} \cdot \text{s}^2}{\text{s} \cdot 9,81 \text{ m}} &= t_M \\ t_M &= 3,058 \text{ s} \end{aligned}$$

Antwort: Nach 3,06 s erreicht der Ball seine höchste Flughöhe.

Lehrbeispiel 13.4

Die Höhe s_M wird berechnet, indem t_M in $s(t)$ eingesetzt wird.

$$\begin{aligned} s_M &= s(t_M) = 100 \text{ m} + 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,058 \text{ s} - 0,5 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3,058 \text{ s})^2 \\ &= 145,87 \text{ m} \\ &\approx 145,9 \text{ m} \end{aligned}$$

Antwort: Die maximale Flughöhe beträgt 145,9 m.

Lehrbeispiel 13.5

Der Körper schlägt zum Zeitpunkt t_A auf, zu dem $s(t_A) = 0$ ist.

$$\text{Bed.: } s(t_A) = 0$$

$$\text{d.h.: } 100 \text{ m} + 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_A - 0,5 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t_A^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung für t_A wird auf die Normalform gebracht und dann mit der p-q-Formel gelöst.

$$t_A^2 - \frac{30 \text{ m} \cdot \text{s}^2}{\text{s} \cdot 0,5 \cdot 9,81 \text{ m}} \cdot t_A - \frac{100 \text{ m} \cdot \text{s}^2}{0,5 \cdot 9,81 \text{ m}} = 0$$

$$t_A^2 - 6,1162 \text{ s} \cdot t_A - 20,387 \text{ s}^2 = 0$$

$$t_{A,1,2} = \frac{6,1162 \text{ s}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6,1162 \text{ s}}{2}\right)^2 + 20,387 \text{ s}^2}$$

$$= 3,0581 \text{ s} \pm 5,4534 \text{ s}$$

$$t_{A,1} = 3,0581 \text{ s} + 5,4534 \text{ s} = 8,5115 \text{ s} \approx 8,51 \text{ s}$$

Die zweite Lösung kommt zu einer negativen Zeit und ist deshalb unbrauchbar.

Antwort: Der Ball schlägt nach 8,51 s auf.

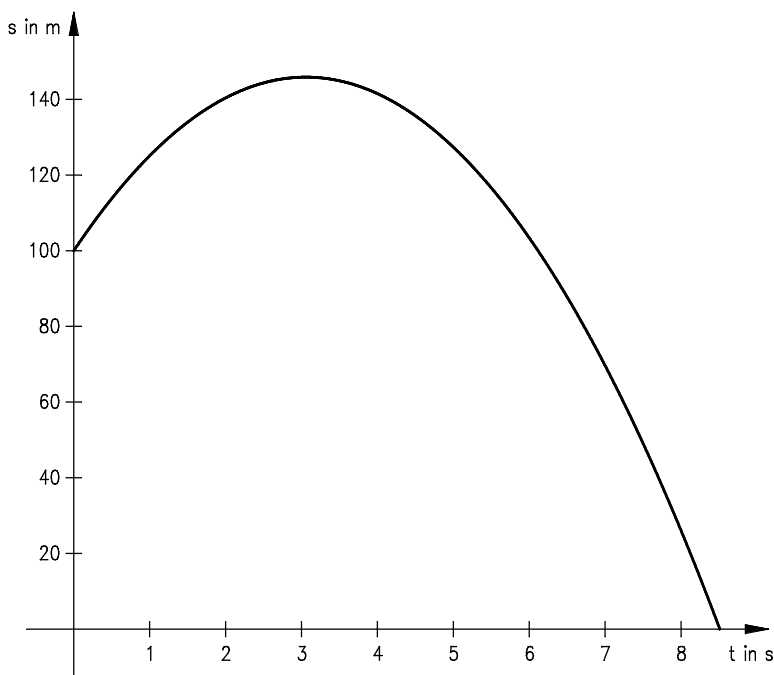
Lehrbeispiel 13.6

$$v(t_A) = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8,5115 \text{ s}$$

$$= -53,498 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\approx -53,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Antwort: Der Körper schlägt mit 53,5 m/s auf.

**Lehrbeispiel 14**

Gegeben ist die Ladungsverteilung $q(t)$, die durch einen Leitungsquerschnitt fließt

$$q(t) = 20 \text{ C} \sin\left(\frac{1}{20 \text{ s}} \cdot t\right) \quad (\text{Angaben im Bogenmaß}).$$

Bestimmen Sie die Stromstärke und die zeitliche Änderung der Stromstärke zum Zeitpunkt $t = 6 \text{ s}$!

Lösung

1. Stromstärke

Nach Tabelle 6 gilt für die Stromstärke

$$i(t) = \dot{q}(t).$$

Also ist:

$$\begin{aligned} i(t) &= \dot{q}(t) \\ &= 20 \text{ C} \cdot \cos\left(\frac{1}{20 \text{ s}} \cdot t\right) \cdot \frac{1}{20 \text{ s}} \\ &= 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{1}{20 \text{ s}} \cdot t\right) \quad \left| \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A} \right. \\ &= 1 \text{ A} \cdot \cos\left(\frac{1}{20 \text{ s}} \cdot t\right) \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 6 \text{ s}$ gilt also

$$\begin{aligned} i(6 \text{ s}) &= 1 \text{ A} \cdot \cos\left(\frac{1}{20 \text{ s}} \cdot 6 \text{ s}\right) \\ &= 1 \text{ A} \cdot \cos\left(\frac{6}{20}\right) \\ &= 0,9553 \text{ A} \\ &\approx 0,955 \text{ A} \end{aligned}$$

Antwort: Die Stromstärke beträgt zum Zeitpunkt $t = 6 \text{ s}$ $0,955 \text{ A}$.

2. zeitliche Änderung der Stromstärke

$$\begin{aligned} i(t) &= -\frac{1}{20 \text{ s}} \cdot A \cdot \sin\left(\frac{1}{20 \text{ s}} \cdot t\right) \\ &= -\frac{1}{20} \cdot \frac{\text{A}}{\text{s}} \cdot \sin\left(\frac{1}{20 \text{ s}} \cdot t\right) \end{aligned}$$

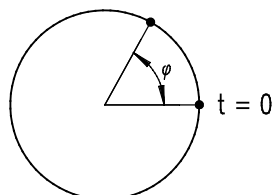
$$\begin{aligned} i(6 \text{ s}) &= -\frac{1}{20} \cdot \frac{\text{A}}{\text{s}} \cdot \sin\left(\frac{1}{20 \text{ s}} \cdot 6 \text{ s}\right) \\ &= -0,014776 \frac{\text{A}}{\text{s}} \\ &\approx -0,01478 \frac{\text{A}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Antwort: Die zeitliche Änderung der Stromstärke beträgt zum Zeitpunkt $t = 6 \text{ s}$ $-0,01478 \frac{\text{A}}{\text{s}}$.

Lehrbeispiel 15

Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn gegen den Uhrzeigersinn nach

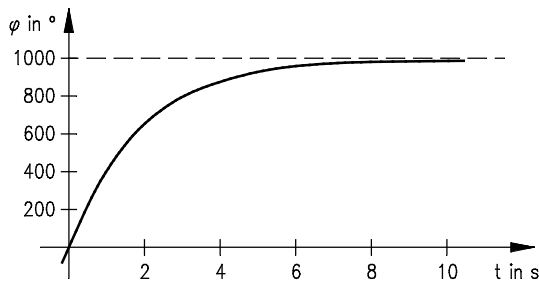
dem Gesetz $\varphi(t) = 1000^\circ \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{2\text{s}}t}\right)$.



15.1 Zeichnen Sie das Winkel-Zeit-Diagramm im Intervall $[0; 10\text{s}]$!

15.2 Berechnen Sie $\varphi(9\text{s})$, $\omega(9\text{s})$, $\alpha(9\text{s})$!

15.3 Beschreiben Sie die Bewegung mit Worten!

Lösung**Lehrbeispiel 15.1** φ -t-Diagramm**Lehrbeispiel 15.2**

$$\begin{aligned}\varphi(9\text{ s}) &= 1000^\circ \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{2\text{ s}} \cdot 9\text{ s}}\right) \\ &= 988,89^\circ \\ &\approx 989^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \dot{\varphi}(t) \\ &= \left(1000^\circ - 1000^\circ e^{-\frac{1}{2\text{ s}} t}\right) \\ &= -1000^\circ \cdot e^{-\frac{1}{2\text{ s}} t} \cdot \left(-\frac{1}{2\text{ s}}\right) \\ &= 500^\circ \cdot \frac{1}{\text{ s}} \cdot e^{-\frac{1}{2\text{ s}} t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(9\text{ s}) &= \frac{500^\circ}{\text{ s}} \cdot e^{-\frac{1}{2\text{ s}} \cdot 9\text{ s}} \\ &= \frac{5,554^\circ}{\text{ s}} \approx \frac{5,55^\circ}{\text{ s}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \dot{\omega}(t) \\ &= \frac{500^\circ}{\text{ s}} \cdot e^{-\frac{1}{2\text{ s}} t} \cdot \left(-\frac{1}{2\text{ s}}\right) \\ &= -\frac{250^\circ}{\text{ s}^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\text{ s}} t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(9\text{ s}) &= -\frac{250^\circ}{\text{ s}^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\text{ s}} \cdot 9\text{ s}} \\ &= \frac{-2,777^\circ}{\text{ s}^2} \approx -\frac{2,78^\circ}{\text{ s}^2}\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 15.3

Es handelt sich um eine abgebremste Drehbewegung. Nach 9 s ist schon fast der Endwinkel von 1000° erreicht.

2.1.3 Eigenschaften spezieller Funktionen

Die Untersuchung von Funktionen, d.h. die Beantwortung von Fragen wie z.B.

- welches Grenzverhalten hat die Funktion?
- hat die Funktion Null- bzw. Polstellen?
- hat die Funktion Extrempunkte (Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte)?
- wie ist das Krümmungsverhalten und gibt es Wendepunkte?

gibt Aufschlüsse über die Eigenschaften von Funktionen. Die Antworten zu den Untersuchungsfragen erhält man u.a. mithilfe von Ableitungen dieser Funktionen.

Die Eigenschaften spezieller Funktionen wie

- gebrochen rationale Funktionen
- Wurzelfunktionen
- Sinusfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen

werden im Folgenden beispielhaft untersucht.

Gebrochen rationale Funktionen

Hat eine Funktion die Form

$$f(x) = \frac{Z_n(x)}{N_m(x)},$$

nennt man $f(x)$ eine gebrochen rationale Funktion, wobei der Zähler $Z_n(x)$ und der Nenner $N_m(x)$ Polynome vom Grad n bzw. m sind.

Lehrbeispiel 1

Untersuchen Sie die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x}$ hinsichtlich ihrer Grenzwerte und Stetigkeit!

Lösung

1. Grenzwerte

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x}$ hat bei $x_0 = 2$ eine Definitionslücke. Der Funktionsterm ergibt für alle reellen Zahlen, die sich von 2 unterscheiden, einen bestimmbaren Wert. Nur für $x_0 = 2$ wird der Nennerterm null und es existiert kein Funktionswert für $f(x)$. Für die Definitionsmenge gilt daher: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Setzt man in die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x}$ für x Werte ein, die sehr nahe links (z.B. $x_L = 1,9$) bzw. rechts (z.B. $x_R = 2,1$) neben $x_0 = 2$ liegen, so erhält man Funktionswerte $f(x_L)$ bzw. $f(x_R)$, die in der Nähe des Wertes $gw = -1$ liegen.

Diesem Wert gw nähert sich der Funktionswert von $f(x)$ um so mehr, je dichter die Werte von x an die Stelle $x_0 = 2$ von links bzw. von rechts heranrücken.

$$x_{L1} = 1,9, x_{R2} = 2,1 \quad \Rightarrow \quad f(1,9) = -0,9 \quad \text{und} \quad f(2,1) = -1,1$$

$$x_{L1} = 1,99, x_{R2} = 2,01 \quad \Rightarrow \quad f(1,99) = -0,99 \quad \text{und} \quad f(2,01) = -1,01$$

$$x_{L1} = 1,999, x_{R2} = 2,001 \quad \Rightarrow \quad f(1,999) = -0,999 \quad \text{und} \quad f(2,001) = -1,001$$

USW.

Obwohl bei der Funktion eine Definitionslücke an der Stelle $x_0 = 2$ besteht, strebt $f(x)$ gegen einen eindeutig bestimmten Wert $gw = -1$, wenn man sich der Stelle x_0 von links oder von rechts immer mehr nähert. Den Wert gw bezeichnet man als **Grenzwert** der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 .

2. Stetigkeit

Hat eine Funktion, z.B. $f(x) = x$, die Eigenschaft, dass an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches der Grenzwert der Funktion mit dem Funktionswert übereinstimmt, dann nennt man diese Funktionen **stetig**. Anschaulich bedeutet dies, dass sich der Graf einer stetigen Funktion ohne abzusetzen in einem Zuge zeichnen lässt.

Die Beispielfunktion $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x}$ weist an der Stelle $x_0 = 2$ eine Lücke auf und ist daher **nicht** in einem Zuge zeichenbar. Weil die Funktion aber auch an ihrer Definitionslücke einen Grenzwert ($gw = -1$) besitzt, ist diese Funktion stetig ergänzbar und die Definitionslücke ist **stetig behebbar**.

Soll einer Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 gebildet werden, muss die Funktion an der Stelle x_0 stetig sein. Die Stetigkeit ist eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit einer Funktion.

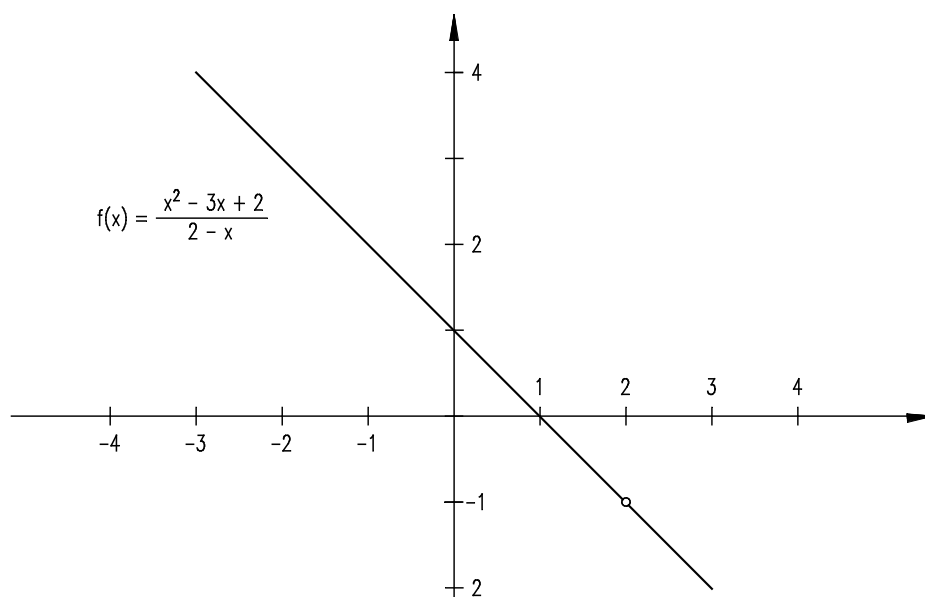


Abbildung 14 Graf einer Funktion mit stetig behebbarer Definitionslücke

Lehrbeispiel 2

Untersuchen Sie die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{0,8x^2 - 1,2x}{|x - 1,5|} - 0,5$ hinsichtlich ihrer Grenzwerte und Stetigkeit!

Lösung

Grenzwerte und Stetigkeit

Die Funktion $f(x) = \frac{0,8x^2 - 1,2x}{|x - 1,5|} - 0,5$ hat bei $x_0 = 1,5$ eine Definitionslücke. Für $x_0 = 1,5$ wird der Nennerterm null und es existiert kein Funktionswert für $f(x)$. Für die Definitionsmenge gilt daher: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$.

Wählt man x -Werte, die dicht links bzw. rechts neben $x_0 = 1,5$ liegen, erhält man

$$x_{L1} = 1,49, x_{R2} = 1,51 \quad \Rightarrow \quad f(1,49) = -1,692 \quad \text{und} \quad f(1,51) = 0,708$$

$$x_{L1} = 1,499, x_{R2} = 1,501 \quad \Rightarrow \quad f(1,499) = -1,6992 \quad \text{und} \quad f(1,501) = 0,7008$$

$$x_{L1} = 1,4999, x_{R2} = 1,5001 \quad \Rightarrow \quad f(1,4999) = -1,69992 \quad \text{und} \quad f(1,5001) = 0,70008$$

usw.

Je näher die x -Werte links an der Stelle x_0 liegen, um so geringer unterscheiden sie sich vom Wert $gw_L = -1,7$. Nähern sich die x -Werte von rechts der Stelle x_0 , um so geringer unterscheiden sie sich vom Wert $gw_R = 0,7$.

Die Funktion $f(x) = \frac{0,8x^2 - 1,2x}{|x - 1,5|} - 0,5$ hat einen linksseitigen Grenzwert $gw_L = -1,7$ und einen rechtsseitigen Grenzwert $gw_R = 0,7$.

Hat eine Funktion an einer Stelle x_0 sowohl einen linksseitigen wie auch einen rechtsseitigen Grenzwert, wobei die Grenzwerte verschieden groß und endlich sind, bezeichnet man die Definitionslücke als endliche **Sprungstelle**.

Da an der Stelle x_0 kein eigentlicher Grenzwert vorhanden ist, sondern nur ein linksseitiger Grenzwert $gw_L = -1,7$ und rechtsseitiger Grenzwert $gw_R = 0,7$, ist die Ausgangsfunktion $f(x) = \frac{0,8x^2 - 1,2x}{|x - 1,5|} - 0,5$ **unstetig**.

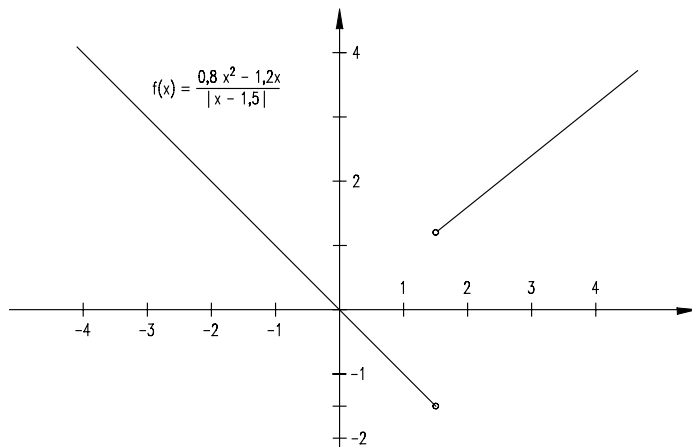


Abbildung 15 Graf einer unstetigen Funktion

Lehrbeispiel 3

Untersuchen Sie die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ hinsichtlich ihrer

Definitionsmenge, Nullstellen, Symmetrie, Asymptoten, Extremwerte und Wendepunkte!

Lösung

1. Definitionsmenge und Nullstellen

Um die Definitionsmenge zu bestimmen, werden die Nullstellen des Zähler- und des Nennerpolynoms ermittelt.

Zähler:	$Z(x) \neq 0$	für alle x
Nenner:	$N(x) = 0 \quad (x^2 - 4) = 0$	für $x = 2$ oder $x = -2$

An den Stellen, an denen der Nenner = 0 wird, d.h. für $x = 2$ und $x = -2$, liegen Definitionslücken vor. Diese Stellen bezeichnet man auch als **Polstellen**, da die rechts- und linksseitigen Grenzwerte der Funktion $f(x)$ bei $+\infty$ bzw. bei $-\infty$ liegen.

Daher ergibt sich für $f(x) = \frac{1}{(x+2) \cdot (x-2)}$

die **Definitionsmenge** $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Da der Zähler nicht null wird, hat die Funktion $f(x)$ keine **Nullstellen**.

2. Symmetrie

Funktionen bezeichnet man als achsensymmetrisch zur y-Achse oder „gerade“ Funktion, wenn gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

Ist dagegen

$$f(-x) = -f(x)$$

nennt man diese Funktion punktsymmetrisch zum Nullpunkt oder „ungerade“ Funktion.

Für die Symmetrie einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{Z_n(x)}{N_m(x)}$ gelten folgende Aussagen:

- Sind $Z_n(x)$ und $N_m(x)$ gerade Funktionen, dann ist auch $f(x)$ eine gerade Funktion.
- Sind $Z_n(x)$ und $N_m(x)$ ungerade Funktionen, dann ist auch $f(x)$ eine gerade Funktion.
- Ist $Z_n(x)$ oder $N_m(x)$ eine ungerade Funktion, dann ist auch $f(x)$ eine ungerade Funktion.
- Ist eine der Funktionen $Z_n(x)$ oder $N_m(x)$ weder gerade noch ungerade, dann ist auch $f(x)$ weder eine gerade noch eine ungerade Funktion.

Da $Z_n(x)$ und $N_m(x)$ der Beispielfunktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

gerade Funktionen sind, ist auch $f(x)$ eine gerade Funktion und damit symmetrisch zur y-Achse.

3. Asymptoten

Asymptoten sind Geraden, an die sich die Funktionswerte einer Funktion, die sich ins Unendliche erstreckt, annähern. Der Abstand zwischen der Asymptote und dem Funktionswert wird im Unendlichen gleich null.

Für gebrochen rationale Funktionen der Form $f(x) = \frac{Z_n(x)}{N_m(x)}$ unterscheidet man drei Fälle:

Fall $n < m$: Der Graf der Funktion $f(x)$ nähert sich für $x \rightarrow \pm \infty$ der x-Achse, d.h. die x-Achse ist die Asymptote der Funktion $f(x)$.

Fall $n = m$: Die Asymptote ist eine Gerade parallel zur x-Achse mit $y = \frac{a_n}{b_m}$. Dabei ist a_n der Koeffizient der höchsten Potenz von x im Zähler und b_m der Koeffizient der höchsten Potenz von x im Nenner.

Für z.B. $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 1}$ ist die Gerade $y = \frac{2}{3}$ die Asymptote.

Fall $n > m$ Die Funktion $f(x)$ ist dann eine unecht gebrochene Funktion. Solche Funktionen lassen sich in einen ganzen und einen echt gebrochenen Anteil umformen. Die Asymptote ist dann der ganze Anteil der Funktion $f(x)$.

Für z.B. $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 9x} = (x + 9) + \frac{81x + 2}{x^2 - 9x}$ ist der ganze Anteil, die Gerade $y = x + 9$, die Asymptote.

Bei der Beispielfunktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

ist der Nennergrad größer als der Zählergrad (Fall $n < m$). Die x -Achse ist daher die Asymptote der Funktion $f(x)$.

4. Extremwerte

Für die Extremwerte (Hoch- und Tiefpunkte) einer Funktion $f(x)$ wird die Steigung 0. Die Extremwerte befinden sich daher an den Stellen, an denen die erste Ableitung der Ausgangsfunktion den Wert 0 hat.

Bildet man zusätzlich die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion, kann die Art des Extremwertes bestimmt werden.

Hochpunkte (Maxima) an der Stelle $x = x_0$ liegen vor, wenn die Bedingung

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \quad \text{d.h. } f''(x_0) \text{ ist negativ}$$

erfüllt ist und

Tiefpunkte (Minima) liegen vor, wenn gilt:

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \quad \text{d.h. } f''(x_0) \text{ ist positiv}$$

Aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung lässt sich die Art des Extremwertes ablesen. Ist $f''(x_0)$ negativ, ist die Funktion $f(x)$ konvex (rechts) gekrümmt und es handelt sich um ein Maximum. Von einem Minimum spricht man dagegen, wenn $f''(x_0)$ positiv bzw. konkav (links) gekrümmt ist.

Bei gebrochen rationalen Funktionen ist es darüber hinaus nicht notwendig, zur Bestimmung des Vorzeichens die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion zu bestimmen. Es lässt sich zeigen, dass $f''(x_0) < 0$ wenn $Z''(x) < 0$ und $f''(x_0) > 0$ wenn $Z''(x) > 0$. Die Art des Extremwertes ist daher auch aus der **zweiten Ableitung des Zählerpolynoms** bestimmbar.

Für die Beispielfunktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = (x^2 - 4)^{-1}$$

ergibt sich mit der Kettenregel:

$$f'(x) = 2x \cdot (-1) \cdot (x^2 - 4)^{-2} = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \text{ wenn } -2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

Die Funktion hat einen Extremwert bei $x_0 = 0$. Zur Klärung der Frage, ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt, wird die zweite Ableitung des Zählerpolynoms bestimmt:

$$Z'(x) = -2x$$

$$\Rightarrow Z''(x) = -2$$

Die zweite Ableitung des Zählerpolynoms ist negativ, d.h. es liegt ein **Maximum** vor.

5. Wendepunkte

Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn die Funktion rechts und links von dieser Stelle ein entgegengesetztes Krümmungsverhalten aufweist.

Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes ist, dass die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion gleich 0 wird und die dritte Ableitung verschieden von 0 sein muss, d.h.:

$$f''(x) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x) \neq 0$$

Wenn an einem Wendepunkt neben $f''(x) = 0$ auch für die erste Ableitung $f'(x) = 0$ gilt, spricht man von einem **Sattelpunkt**.

Für die Beispielfunktion ergibt sich mit Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = -2x \cdot (x^2 - 4)^{-2} = g(x) \cdot h(x)$$

$$f''(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot [h'(u(x)) \cdot u'(x)]$$

$$f''(x) = -2 \cdot (x^2 - 4)^{-2} + (-2x) \cdot (-2) \cdot (x^2 - 4)^{-3} \cdot 2x$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(x^2 - 4)^2} + \frac{8x^2}{(x^2 - 4)^3} = \frac{-2 \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^3} + \frac{8x^2}{(x^2 - 4)^3} = \frac{6x^2 + 8}{(x^2 - 4)^3}$$

Die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion wird nur dann gleich 0, wenn das Zählerpolynom gleich 0 wird.

$$\Rightarrow 6x^2 + 8 = 0$$

$$x^2 + 4/3 = 0$$

$$x^2 = -4/3$$

Da diese Gleichung keine reelle Lösung besitzt, hat die Funktion $f(x)$ **keine Wendepunkte**.

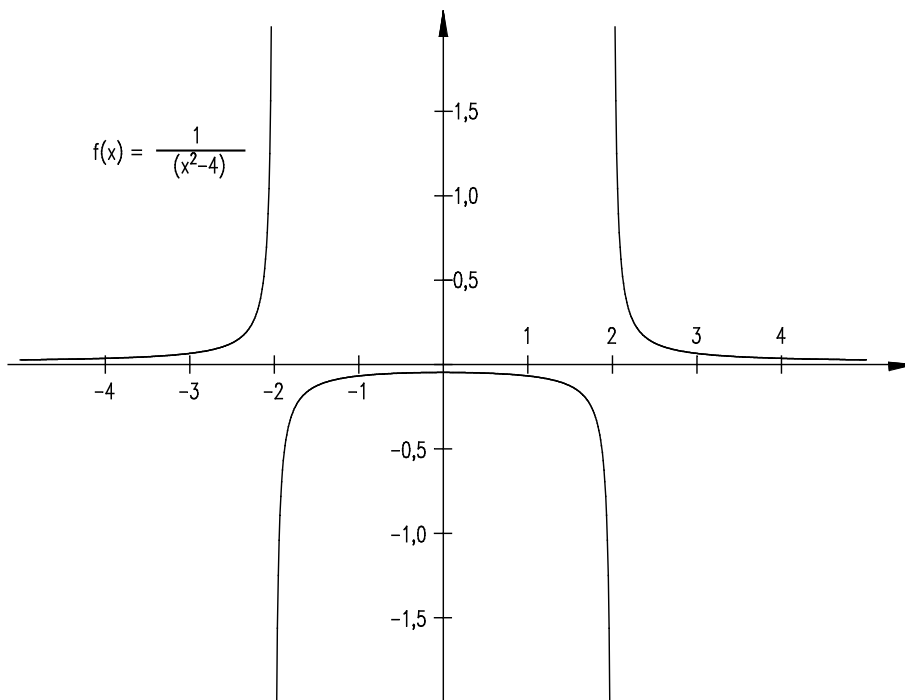


Abbildung 16 Graf der gebrochen rationalen Funktion

Wurzelfunktionen

Hat eine Funktion die Form

$$f(x) = \sqrt{ax + b}$$

nennt man $f(x)$ eine Quadratwurzelfunktion.

Lehrbeispiel 4

Untersuchen Sie die Quadratwurzelfunktion $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ hinsichtlich ihrer Definitionsmenge, Nullstellen, Symmetrie, Extremwerte und Wendepunkte!

Lösung

1. Definitionsmenge und Nullstellen

Da die Wurzel aus einer negativen Zahl nicht bestimmbar ist, ist die Definitionsmenge einer Wurzelfunktion allg. auf positive reelle Zahlen beschränkt. Eine weitere Einschränkung ist hier durch den Ausdruck unter der Wurzel, der nicht negativ werden darf, gegeben.

$$\Rightarrow 2x - 1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq 1/2$$

Für die Funktion $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ergibt sich daher die **Definitionsmenge** $D(f) = \{1/2 \dots +\infty\}$ und eine **Nullstelle** bei $x_0 = 1/2$.

2. Symmetrie

Die Quadratwurzelfunktion ist weder gerade noch ungerade. Die Funktion $f(x) = \sqrt{2x-1}$ besitzt daher **keine Symmetrie**.

3. Extremwerte

Zur Bestimmung der Extremwerte wird die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sqrt{2x-1} = (2x-1)^{1/2} = f(g(x))$$

unter Verwendung der Kettenregel gebildet.

$$f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x-1)^{(1/2)-1} \cdot (2)$$

$$f'(x) = (2x-1)^{-1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

Die erste Ableitung $f'(x)$ wird für beliebige x nie null. Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{2x-1}$ hat daher **keine Extremwerte**.

4. Wendepunkte

Für die Existenz eines Wendepunktes ist die Bedingung $f''(x) = 0$ notwendig. Die zweite Ableitung der Wurzelfunktion ergibt sich zu:

$$f''(x) = ((2x-1)^{-1/2})'$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} (2x-1)^{-3/2} \cdot 2$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$$

Auch diese Ableitung nimmt für beliebige x niemals den Wert 0 an. Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{2x-1}$ hat daher auch **keine Wendepunkte**.

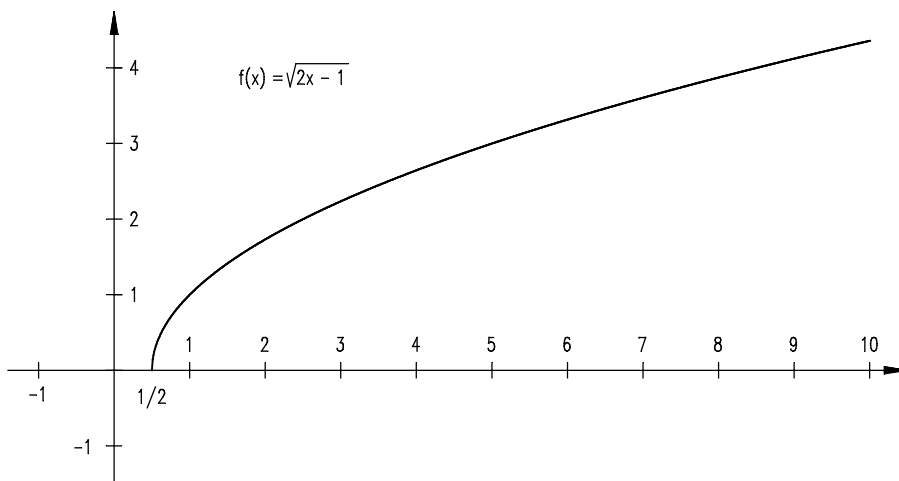


Abbildung 17 Graf der Wurzelfunktion

Sinusfunktionen

Hat eine Funktion die Form

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$$

nennt man $f(x)$ eine Sinusfunktion.

Lehrbeispiel 5

Untersuchen Sie die Sinusfunktion $f(x) = 2 \cdot \sin(2x)$ hinsichtlich ihrer Definitionsmenge, Nullstellen, Symmetrie, Extremwerte und Wendepunkte!

Lösung

1. Definitionsmenge und Nullstellen

Die Sinusfunktion ist für beliebige Werte (Winkel) bestimmbar. Die **Definitionsmenge** ist daher die Menge der reellen Zahlen $D(f) = \mathbb{R}$.

Die einfache Sinusfunktion $\sin(x)$ ist periodisch im Bereich von 0 bis 2π und hat Nullstellen bei $x = n \cdot \pi$, $n \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Bei der Beispielfunktion ist das Argument der Sinusfunktion $2x$, daher gilt für die Nullstellen der Beispielfunktion:

$$2x = n \cdot \pi$$

$$x = \frac{n}{2} \cdot \pi \quad \text{mit} \quad n \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Die **Nullstellen** der Sinusfunktion $f(x) = 2 \cdot \sin(2x)$ liegen bei $x_0 = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm3\pi/2, \pm2\pi$, usw. Die Beispielfunktion hat doppelt so viele Nullstellen im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ wie die einfache Sinusfunktion (doppelte Frequenz).

2. Symmetrie

Die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(2x)$ ist eine ungerade Funktion, da für sie

$$f(-x) = -f(x)$$

gilt. Die Beispielfunktion ist daher **punktsymmetrisch** zum Nullpunkt.

3. Extremwerte

Die Bestimmung der Extremwerte erfolgt mithilfe der ersten Ableitung von $f(x) = 2 \cdot \sin(2x)$ und unter Anwendung der Kettenregel.

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

Als erste Ableitung erhält man eine Kosinusfunktion. Die Funktion $f'(x) = 4 \cdot \cos(2x)$ hat ihre Nullstellen bei

$$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2} \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + n \right) \quad \text{mit } n \in \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

Zur weiteren Untersuchung der Extremwerte wird die zweite Ableitung der Beispielfunktion gebildet.

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f''(x) = (4 \cos(2x))'$$

$$f''(x) = -4 \sin(2x) \cdot 2$$

$$f''(x) = -8 \sin(2x)$$

An den Nullstellen der ersten Ableitung mit $x_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + n \right)$ erhält man für geradzahlige Werte von n einen negativen Funktionswert der zweiten Ableitung, z.B. für $n = -4$

$$f''(x) = -8 \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 4 \right) \right)$$

$$f''(x) = -8 \cdot \sin \left(-\pi \frac{7}{2} \right)$$

$$f''(x) = -8 \cdot 1 = -8$$

An den Stellen $x_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + n\right)$ mit geradzahligem Wert für n liegen Maxima vor.

Setzt man für n ungeradzahlige Werte in die zweite Ableitung ein, ergeben sich positive Funktionswerte für $f''(x)$. An diesen Stellen hat die Ausgangsfunktion ihre Minima. Die der Ausgangsfunktion weist daher **abwechselnd ein Maximum und Minimum in periodischen Abständen** von $\pi/2$ auf.

4. Wendepunkte

Wendepunkte liegen vor, wenn die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion den Wert 0 annimmt, d.h. $f''(x) = 0$ gilt. Für die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(2x)$ erhält man als zweite Ableitung:

$$f''(x) = -8 \sin(2x)$$

Die zweite Ableitung ist wieder eine Sinusfunktion wie die Ausgangsfunktion. Sie hat ihre Nullstellen an den gleichen Werten für x_0 wie die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(2x)$. Diese Nullstellen der Ausgangsfunktion bei $x_0 = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm3\pi/2, \pm2\pi$, usw. sind daher auch gleichzeitig ihre **Wendepunkte**.

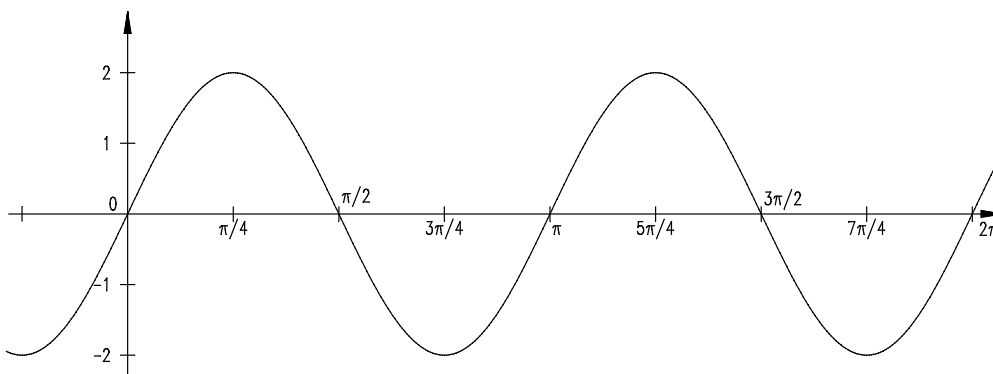


Abbildung 18 Graf der Sinusfunktion

Exponentialfunktionen

Hat eine Funktion die Form

$$f(x) = a^{bx}$$

bei der die Funktionsvariable x im Exponenten auftritt, heißt die Funktion Exponentialfunktion. Exponentialfunktionen sind nur für positive Werte von a ($a > 0$) definiert. Eine wichtige Exponentialfunktion ist die Funktion $f(x) = e^{kx}$ mit der Euler'schen Zahl $e = 2,71828\dots$ als Basis.

Lehrbeispiel 6

Untersuchen Sie die Exponentialfunktion $f(x) = e^{-2x^2}$ hinsichtlich ihrer Definitionsmenge, Nullstellen, Symmetrie, Extremwerte und Wendepunkte!

Lösung

1. Definitionsmenge und Nullstellen

Die Exponentialfunktion

$$f(x) = e^{-2x^2} = \frac{1}{e^{2x^2}}$$

ist für beliebige Werte von x bestimmbar. Die **Definitionsmenge** ist daher die Menge der reellen Zahlen $D(f) = \mathbb{R}$. Wie jede Exponentialfunktion hat auch die Beispielfunktion $f(x) = e^{-2x^2}$ **keine Nullstellen**.

2. Symmetrie

Für die Ausgangsfunktion $f(x) = e^{-2x^2}$ gilt

$$f(-x) = e^{-2(-x)^2} = e^{-2(x)^2} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

Da die Funktionsvariable x im Exponent quadriert wird, ist die Funktion $f(x) = e^{-2x^2}$ eine gerade Funktion und somit **symmetrisch** zur y -Achse.

3. Extremwerte

Zur Bestimmung der Extremwerte wird wieder die erste Ableitung der Ausgangsfunktion mithilfe der Kettenregel gebildet.

$$f(x) = e^{-2x^2} = f(g(x))$$

$$f(g(x)) = e^{-2x^2} = e^z$$

$$f'(g(x)) = f'(z) = (e^z)' = e^z = e^{-2x^2}$$

$$g(x) = -2x^2 \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot -2x = -4x$$

und mit $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = -4x \cdot e^{-2x^2}$$

Für Extremwerte gilt $f'(x) = 0$.

$$\Rightarrow -4x \cdot e^{-2x^2} = 0$$

$$\Rightarrow -4x = 0 \quad \text{oder} \quad e^{-2x^2} = 0$$

Da die e -Funktion für alle x nie den Wert 0 annimmt, wird die erste Ableitung nur dann gleich 0, wenn der Faktor $-4x$ zu 0 wird. Diese Bedingung ist nur an der Stelle $x_0 = 0$ erfüllt.

Zur weiteren Untersuchung der Extremstelle bildet man die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion. Mit der Produktregel kann die zweite Ableitung wie folgt bestimmt werden:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f'(x) = -4x \cdot e^{-2x^2} = g(x) \cdot h(x)$$

$$f''(x) = (f'(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f''(x) = (-4) \cdot (e^{-2x^2}) + (-4x) \cdot (-4x \cdot e^{-2x^2})$$

$$f''(x) = (16x^2 - 4) \cdot e^{-2x^2}$$

Das Einsetzen von $x_0 = 0$ in die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion ergibt den Wert -4 . Die zweite Ableitung ist damit negativ und der Extremwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist ein **Maximum**.

4. Wendepunkte

Die zweite Ableitung $f''(x) = (16x^2 - 4) \cdot e^{-2x^2}$ der Ausgangsfunktion wird gleich 0, wenn der Ausdruck $16x^2 - 4$ den Wert 0 annimmt.

$$16x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Die Ausgangsfunktion $f(x) = e^{-2x^2}$ besitzt **zwei Wendepunkte** an den Stellen $x_1 = 0,5$ und $x_2 = -0,5$.

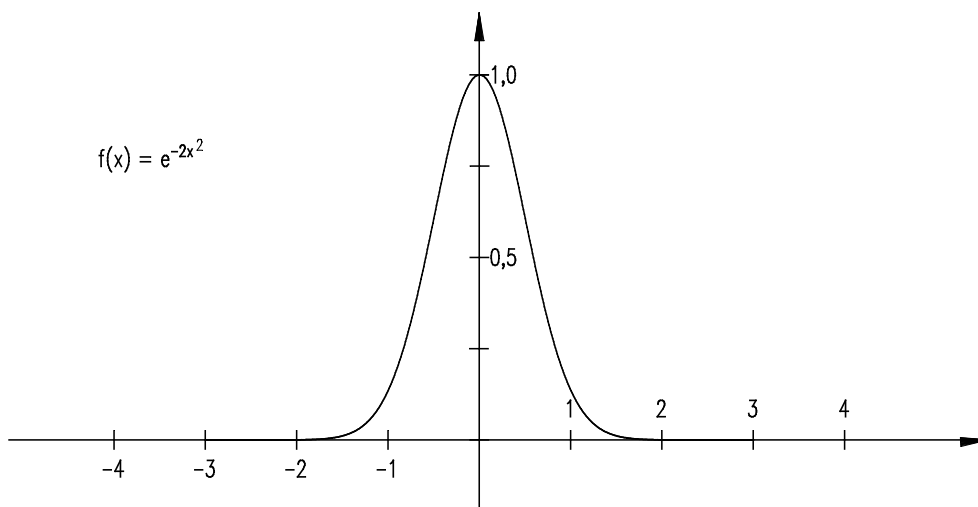


Abbildung 19 Graf der Exponentialfunktion

Logarithmusfunktionen

Hat eine Funktion die Form

$$f(x) = \log_b x$$

bei der der Logarithmus zur Basis b von der Funktionsvariable x gebildet wird, nennt man die Funktion Logarithmusfunktion. Logarithmusfunktionen sind nur für positive reelle Basen mit $b \neq 1$ definiert. Logarithmusfunktionen mit den Basen 2, $e = 2,71828\dots$ und 10 haben eine besondere Bedeutung und werden entsprechend gekennzeichnet.

$$\log_2(x) = \text{lb}(x)$$

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

$$\log_{10}(x) = \lg(x)$$

Lehrbeispiel 7

Untersuchen Sie die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln \sqrt{x^3}$ hinsichtlich ihrer Definitionsmenge, Nullstellen, Symmetrie, Extremwerte und Wendepunkte!

Lösung

1. Definitionsmenge und Nullstellen

Die Ausgangsfunktion kann durch Anwendung der Logarithmengesetze zu

$$f(x) = \ln \sqrt{x^3} = \frac{1}{2} \cdot \ln x^3 = \frac{3}{2} \ln x$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \ln x$$

umgeformt werden. Die Ausgangsfunktion ist damit proportional zur einfachen Logarithmusfunktion $\ln x$ und hat damit den selben Definitionsbereich. Die **Definitionsmenge** der Logarithmusfunktion $\ln x$ umfasst alle positiv reellen Zahlen größer 0. Für die Ausgangsfunktion gilt damit ebenfalls $D(f) = \mathbb{R}^{>0}$.

$f(x) = \frac{3}{2} \ln x$ besitzt wie die einfache Logarithmusfunktion $\ln x$ eine **Nullstelle** bei $x = 1$.

2. Symmetrie

Für die Ausgangsfunktion $f(x) = \ln \sqrt{x^3}$ gilt

weder

$$f(-x) = f(x)$$

noch

$$f(-x) = -f(x),$$

da x^3 für $x < 0$ einen negativen Wert ergeben würde und die Quadratwurzel nur für positive reelle Zahlen gebildet werden kann. Die Ausgangsfunktion weist **keine Symmetrie** auf.

3. Extremwerte

Die erste Ableitung der Ausgangsfunktion ergibt:

$$f'(x) = (\ln \sqrt{x^3})' = \left(\frac{3}{2} \cdot \ln x\right)'$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

Da die Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{3}{2x}$ für beliebige Werte von x nie null wird, hat die Ausgangsfunktion **keine Extremwerte**.

4. Wendepunkte

Zur Bestimmung der Wendepunkte wird die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion gebildet.

$$f''(x) = \left(\frac{3}{2} \cdot x^{-1}\right)'$$

$$f''(x) = -1 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{-2}$$

$$f''(x) = \frac{-3}{2x^2}$$

Auch die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion wird für beliebige Werte von x nie null. Die Funktion $f(x) = \ln \sqrt{x^3}$ hat daher **keine Wendepunkte**.

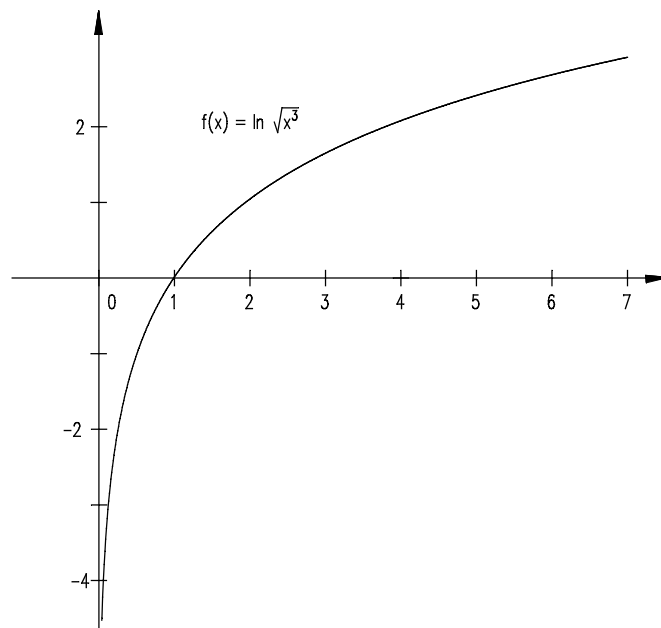


Abbildung 20 Graf der Logarithmusfunktion

2.2 Integralrechnung

Eine **Differenzialrechnung** stellt ein Hilfsmittel zur Berechnung des **Anstiegs der Tangente** einer Funktion an einer bestimmten Stelle zur Verfügung. Sie dient also zur Bestimmung einer **lokalen** Eigenschaft.

Die **Integralrechnung** stellt Hilfsmittel zur Verfügung, den **Flächeninhalt** zu berechnen, den Funktionen einschließen. Dies ist eine **globale** Eigenschaft einer Funktion.

2.2.1 Inhalt krummlinig begrenzter Flächen

Bisher wurden Flächen von Körpern berechnet, indem die Fläche in verschiedene Bereiche eingeteilt wurde, die aus Flächen bestanden, deren ‚Berechnungsformel‘ bekannt war.

(Die Summanden sind bekannte Formeln für den Flächeninhalt einfacher Flächen.)

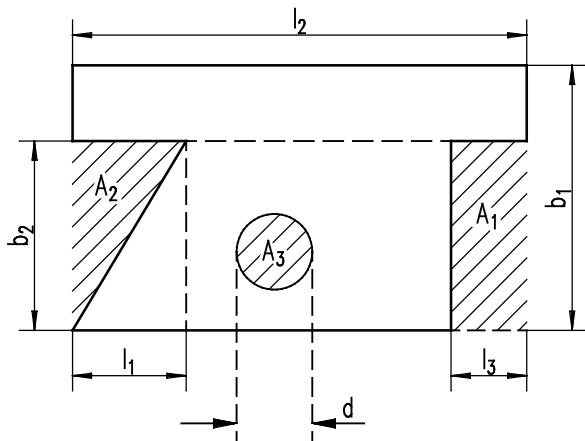


Abbildung 21 Flächenberechnung an einem Formteil

$$A = A_{\text{gesamt}} - A_1 - A_2 - A_3$$

$$A = l_2 \cdot b_1 - l_3 \cdot b_1 - \frac{l_1 \cdot b_2}{2} - \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Ähnliches galt für die Volumenberechnung. Auch hier konnten für „einfache“ Körper deren Volumen bestimmt werden. Dieses Verfahren ist für geradlinig begrenzte Flächen und für kreisförmig begrenzte Flächen praktikabel, denn hier sind die Formeln für die Teilflächen bzw. -volumen bekannt. Durch geeignetes Zerlegen kann die Gesamtfläche bzw. das Gesamtvolumen bestimmt werden.

Die Integralrechnung stellt nun Hilfsmittel zur Verfügung, mit deren Hilfe auch Flächen bzw. Volumen mit beliebiger krummliniger Begrenzung berechnet werden können.

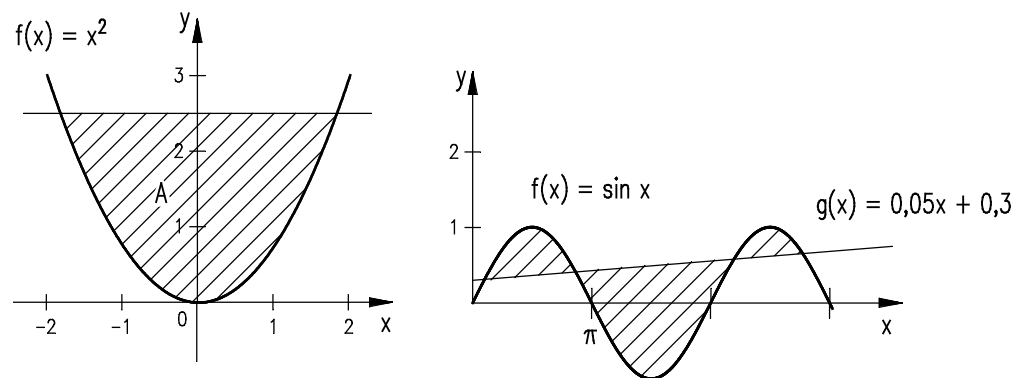
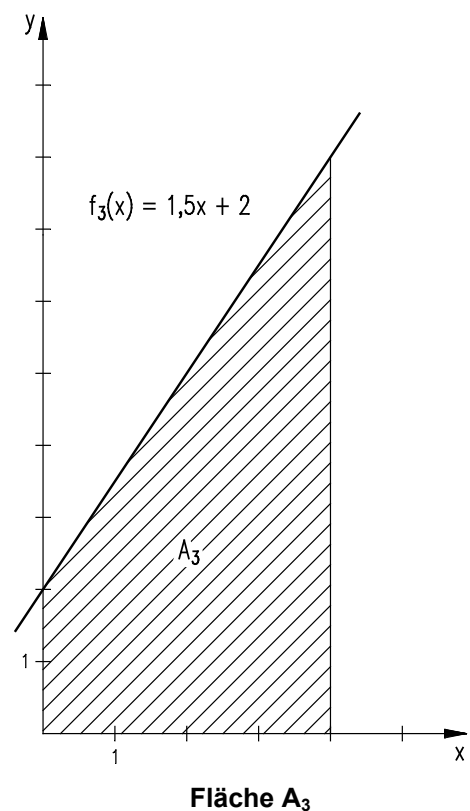
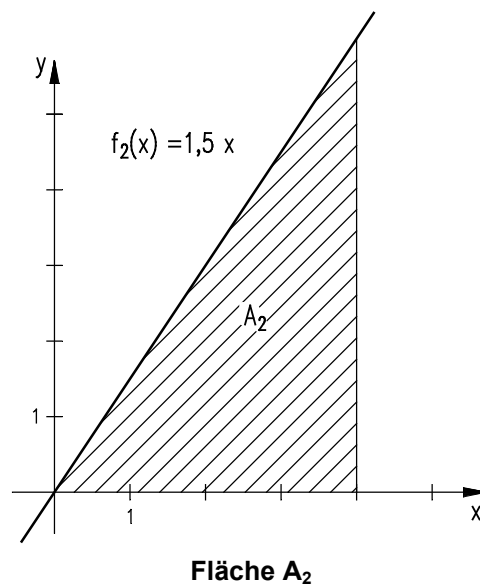
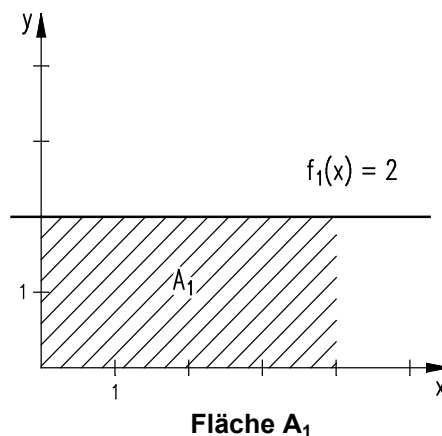


Abbildung 22 Krummlinig begrenzte Flächen

Die Idee bei dieser neuen Art der Flächenberechnung ist zunächst, dass der **Rand** der Fläche als **Funktion** aufgefasst wird. Dann lässt sich eine Flächenmaßzahlfunktion, das sog. **Integral** angeben, mit dem man die Fläche ausrechnen kann.

Lehrbeispiel 1

Wie groß sind die Inhalte der folgenden Flächen?



Lösung**Fläche A₁:**

Wie leicht abgelesen werden kann, ist der Inhalt 8.

Würde nun die Grundseitenlänge des Rechtecks verändert werden, so erhält man in Abhängigkeit dieser Länge verschiedene Maßzahlen für die einzelnen Flächeninhalte; dabei bleibt die Rechteckbreite erhalten.

Diese Inhalte der Flächen können durch eine Funktion ausgedrückt werden: $A_1(x) = 2x$. Wird in diese Funktion ein bestimmter x -Wert eingesetzt, so gibt der Funktionswert den Flächeninhalt der Fläche mit einer Grundseite der Länge x an.

Beispiel: $A_1(4) = 2 \cdot 4 = 8$. Das Rechteck mit der Grundseite 4 hat also den Inhalt 8.

Fläche A₂:

Der Inhalt dieser Fläche ist 12.

Auch hier kann der Inhalt durch eine Funktion ausgedrückt werden.

$$A_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1,5x = \frac{3}{4}x^2$$

Beispiel: $A_2(4) = 12$

Fläche A₃:

Diese Fläche setzt sich aus A_1 und A_2 zusammen. Also ist ihr Inhalt 20.

Die zugehörige Flächeninhaltsfunktion lautet:

$$A_3(x) = f_1(x) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot f_2(x) = 2x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1,5x = 2x + \frac{3}{4}x^2 = 2x + \frac{3}{4}x^2$$

Damit ist $A_3(4) = 2 \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 4^2 = 20$

In der folgenden Tabelle werden jeweils die Ausgangsfunktion und die Flächeninhaltsfunktion nebeneinander gestellt:

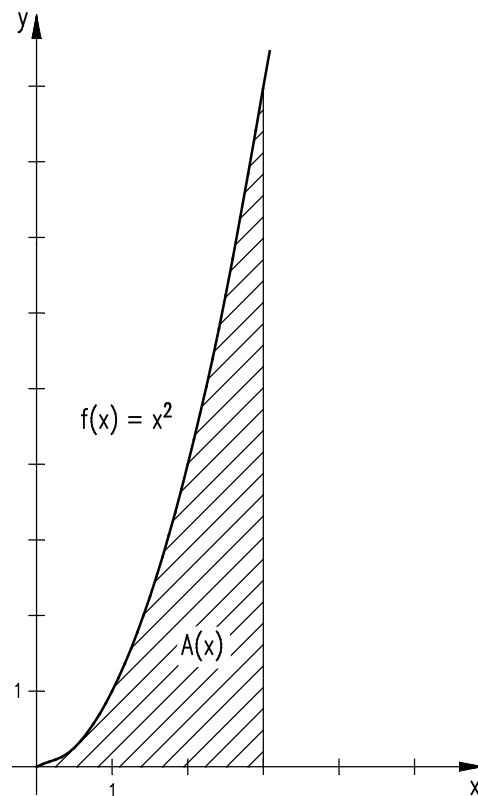
$f(x)$	$A(x)$	$A'(x)$
$f_1(x) = 2$	$A_1(x) = 2x$	$A'_1(x) = 2$
$f_2(x) = 1,5x$	$A_2(x) = \frac{3}{4}x^2$	$A'_2(x) = \frac{3}{4} \cdot 2x = \frac{3}{2}x$
$f_3(x) = 1,5x + 2$	$A_3(x) = 2x + \frac{3}{4}x^2$	$A'_3(x) = 2 + \frac{3}{2}x$

Tabelle 7 Vergleich von Randfunktion und Flächeninhaltsfunktion

Wie leicht nachvollzogen werden kann, ist $A'(x) = f(x)$, d.h. die Randfunktion ist die erste Ableitungsfunktion der Flächeninhaltsfunktion. Oder umgekehrt ausgedrückt: Die Flächeninhaltsfunktion ist die Funktion, deren erste Ableitung die Randfunktion ergibt. An einem Beispiel mit einem krummlinigen Rand wird überprüft, ob diese Eigenschaft auch für andere Flächen gilt.

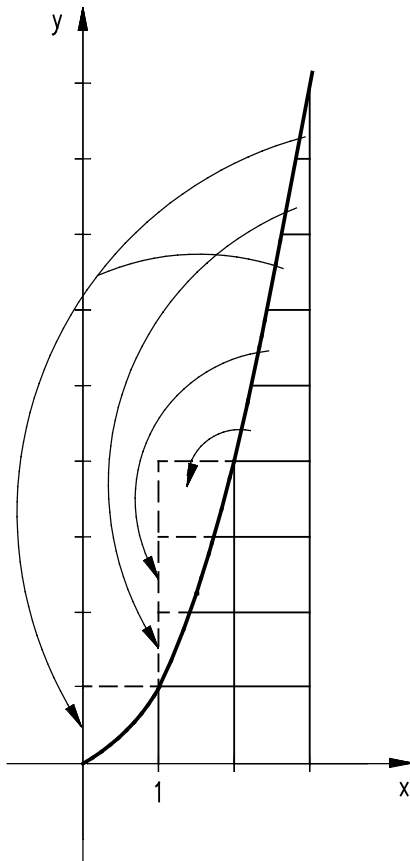
Lehrbeispiel 2

Bestimmen Sie die Fläche unter dem Grafen von $f(x) = x^2$ im Intervall $[0;3]$ und überprüfen Sie, ob das Ergebnis plausibel ist, indem Sie die Fläche näherungsweise durch Auszählen von Kästchen bestimmen!



Lösung

- Zunächst wird eine Funktion gesucht, deren erste Ableitung die Randfunktion ist. Durch Probieren erhält man $A(x) = \frac{1}{3}x^3$. $A(x)$ ist die Flächeninhaltsfunktion dieser Fläche, denn $A'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ ist die Randfunktion.
- Dann wird die Obergrenze des Intervalls eingesetzt $A(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$. Der Flächeninhalt ist also 9.
- Wie in der folgenden Grafik angedeutet, können die Flächenstücke näherungsweise anders zusammengelegt werden. Dadurch ergibt sich auch ein Flächeninhalt von etwa 9. Das Ergebnis erscheint also plausibel.

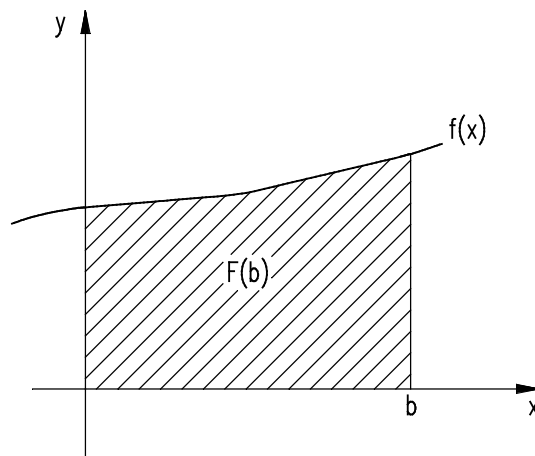
**Definition:**

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion einer Funktion $f(x)$, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{Definition der Stammfunktion})$$

Die Ergebnisse der obigen Beispiele lassen sich verallgemeinern.

Die Stammfunktion $F(b)$ gibt die Fläche an, die von dem Grafen von $f(x)$ als oberem Rand, der x -Achse als unterem Rand, der y -Achse als linkem Rand und der Parallelen zur y -Achse durch b als rechtem Rand begrenzt wird.



Diese Verallgemeinerung gilt nur, wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, b]$ ganz oberhalb der x -Achse liegt, und wenn die y -Achse die linke Grenze ist.

Diese Einschränkungen sollen im Folgenden aufgehoben werden.

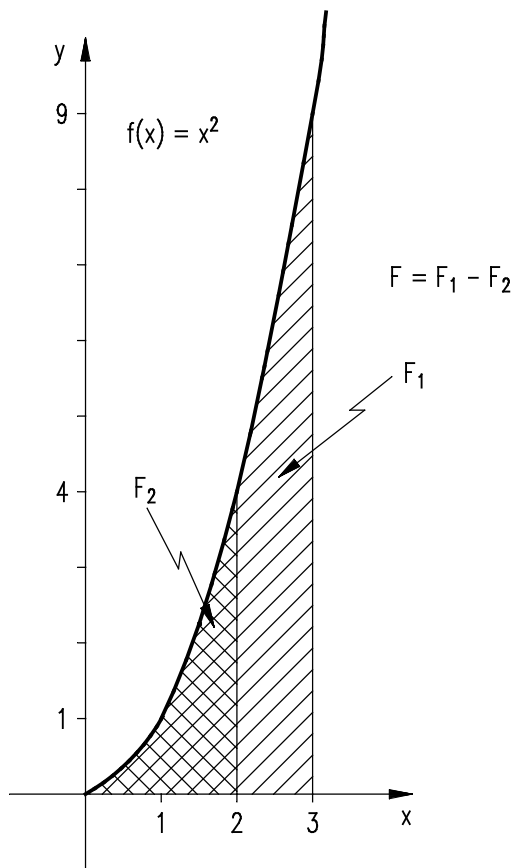
Die linke Grenze ist nicht die y -Achse.

Lehrbeispiel 3

Bestimmen Sie die Fläche unter der Normalparabel im Intervall $[2; 3]$!

Lösung

Soll die Fläche unter der Normalparabel im Intervall $[2, 3]$ berechnet werden, so kann diese bestimmt werden, indem zunächst die Fläche im Intervall $[0, 3]$ berechnet wird. Von dem Ergebnis wird dann die Fläche im Intervall $[0, 2]$ abgezogen.

 **F_1 -Bestimmung**

- Suchen einer Stammfunktion von $f(x)$
 $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist eine Stammfunktion, denn $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ ist wieder $f(x)$
- Bilde $F(3) = \frac{1}{3}3^3 = 9$

also ist $F_1 = 9$

 F_2 -Bestimmung

- Die Stammfunktion ist wieder $F(x) = \frac{1}{3}x^3$
- Bilde $F(2) = \frac{1}{3}2^3 = \frac{8}{3}$

$$F = F_1 - F_2 = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

Antwort: Die Fläche unter der Normalparabel im Intervall $[2;3]$ beträgt $\frac{19}{3}$.

Die Flächenberechnung unter einer positiven Kurve in einem Intervall benutzt also die Differenz $F(3) - F(2)$. Diese Differenz kommt in der Mathematik sehr häufig vor. Deshalb bekommt sie einen neuen Namen und eine besondere Schreibweise.

Definition:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, dann heißt die Zahl $F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral über die Funktion f im Intervall $[a;b]$** und wird mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet. Es gilt also:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Lehrbeispiel 4

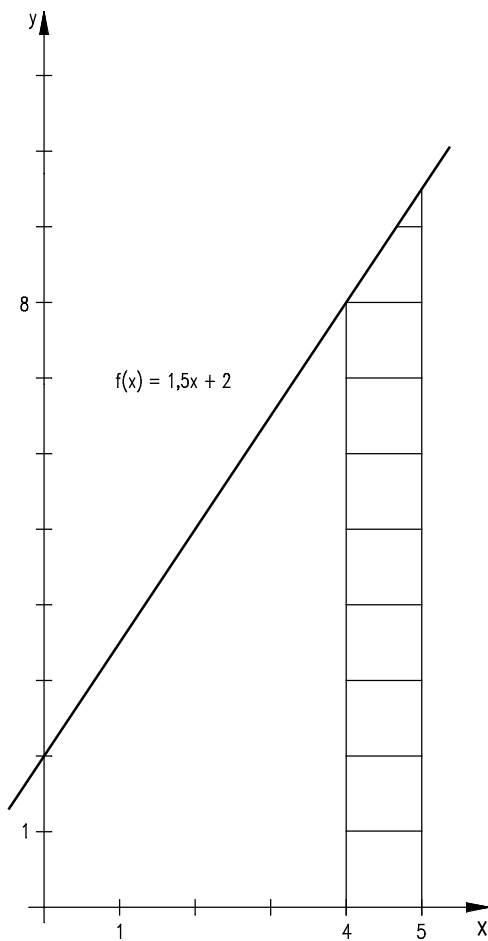
Bestimmen Sie $\int_4^5 (1,5x + 2) dx$ und interpretieren Sie die Zahl als Flächeninhalt!

Lösung

Zunächst wird die Stammfunktion zu $f(x) = 1,5x + 2$ gesucht. Diese wurde oben schon hergeleitet:

$$F(x) = 2x + \frac{3}{4}x^2$$

$$\int_4^5 (1,5x + 2) dx = F(5) - F(4) = 2 \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 5^2 - \left(2 \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 4^2 \right) = 8,75$$



Das bestimmte Integral gibt den Flächeninhalt zwischen dem Grafen, der x-Achse und den beiden Parallelen zur y-Achse durch 4 und 5 als linke und rechte Grenze an.

Nicht alle Funktionen liegen ganz oberhalb der x-Achse. Im betrachteten Intervall können sie ganz unterhalb der x-Achse liegen, oder auch Nullstellen haben, sodass sie zum Teil oberhalb, zum Teil unterhalb der x-Achse verlaufen.

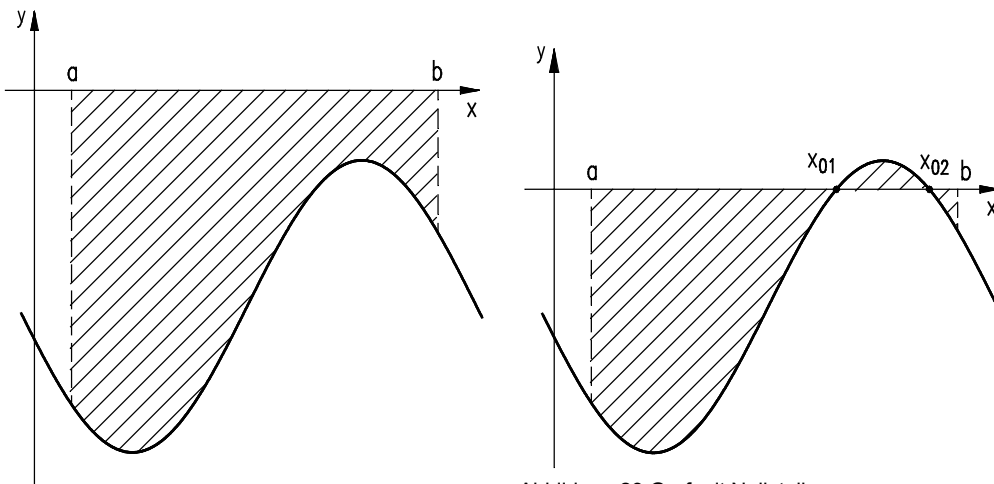
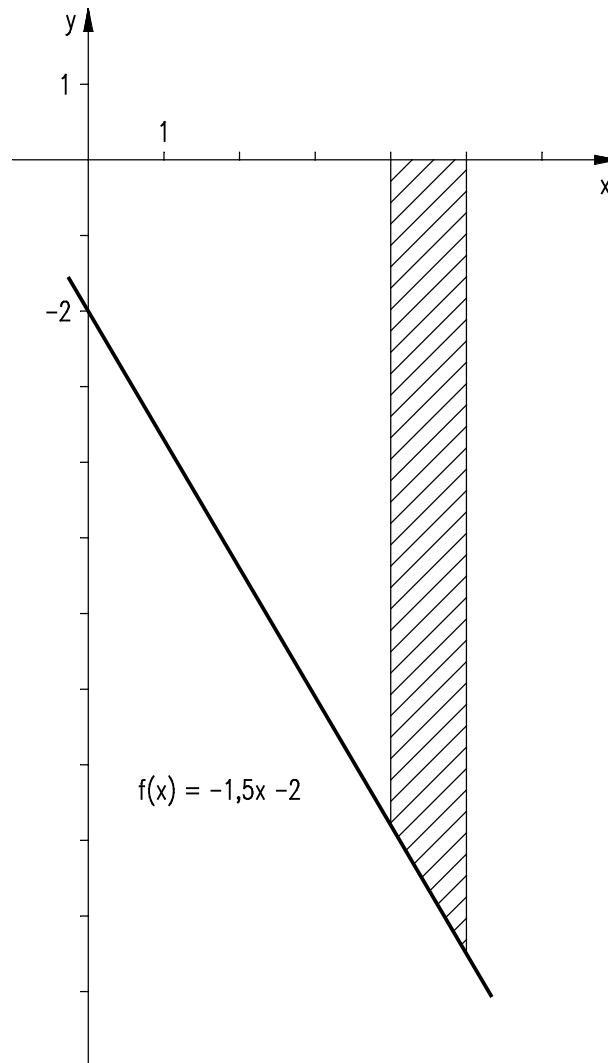


Abbildung 23 Graf mit Nullstellen

Um die Zusammenhänge zu untersuchen, wird die Funktion $f(x) = -1,5x - 2$ betrachtet. Das ist die mit einem negativen Vorzeichen versehene Funktion aus Lehrbeispiel 4. Als Intervall wird wieder $[4;5]$ genommen.



Als Stammfunktion wird $F(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 2x$ angenommen, denn

$$F'(x) = -\frac{3}{4} \cdot 2x - 2 = -\frac{3}{2}x - 2 = f(x).$$

Nun wird das bestimmte Integral gebildet

$$\int_4^5 f(x) \, dx = \int_4^5 (-1,5x - 2) \, dx = F(5) - F(4) = -\frac{3}{4} \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 - \left(-\frac{3}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 \right) = -8,75$$

Offensichtlich liefert das bestimmte Integral zwar die korrekte Flächenmaßzahl aber mit negativem Vorzeichen.

Das kann verallgemeinert werden.

Die Flächenmaßzahl für Flächen, die unterhalb der x-Achse liegen, werden durch

$$-\int_a^b f(x) dx \text{ bestimmt.}$$

Das hat Konsequenzen für Flächen, die teils unter, teils oberhalb der x-Achse liegen. Hier muss das Intervall an den Nullstellen getrennt werden. Abbildung 23 ist also der Flächeninhalt

$$A = -\int_a^{x_{01}} f(x) dx + \int_{x_{01}}^{x_{02}} f(x) dx - \int_{x_{02}}^b f(x) dx,$$

da die erste und letzte Teilfläche unterhalb der x-Achse liegen.

Lehrbeispiel 5

Weisen Sie durch Ableiten nach, dass $F(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)^2$ ist und bestimmen Sie den Flächeninhalt, den der Graf mit der x-Achse im Intervall $[-1;2]$ einschließt! Skizzieren Sie dazu auch die Funktion und die entstehenden Teilflächen!

Lösung

1. Nachweis, dass $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Es ist zu zeigen: $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = \left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x\right)' = \frac{1}{6} \cdot 4x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)^2 = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 1) = \frac{2}{3}\left(x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Also gilt $F'(x) = f(x)$ und damit ist $F(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x$ eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)^2.$$

2. Bestimmung der Nullstellen von $f(x)$

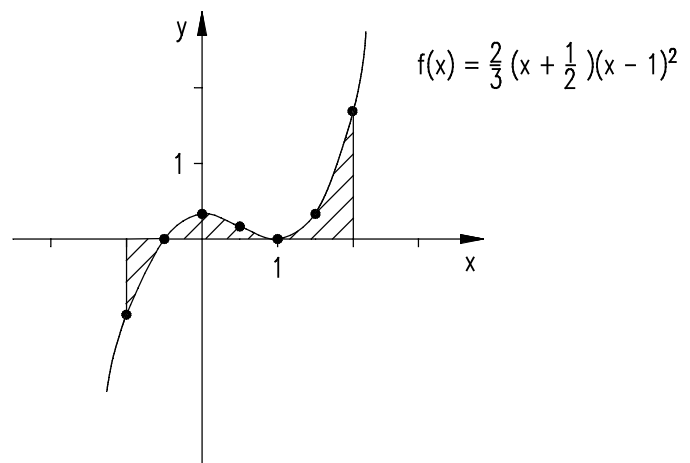
Bed.: $f(x_0) = 0$

d.h. $\frac{2}{3} \left(x_0 + \frac{1}{2} \right) (x_0 - 1)^2 = 0$

Diese Gleichung stimmt für $x_{01} = -\frac{1}{2}$ und $x_{02} = 1$, denn dann wird jeweils ein Faktor null und somit auch das Produkt null.

3. Graf

x	f(x)
-1	$-\frac{4}{3}$
$-\frac{1}{2}$	0
0	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{5}{3}$



4. Fläche

$$\begin{aligned}
 A &= - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x) \, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^2 f(x) \, dx = - \left(F\left(-\frac{1}{2}\right) - F(-1) \right) + F(2) - F\left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= -2 \cdot F\left(-\frac{1}{2}\right) + F(-1) + F(2) \\
 &= -2 \cdot \left(\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{6} (-1)^4 - \frac{1}{3} (-1)^3 + \frac{1}{3} (-1) + \frac{1}{6} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 2 \\
 &= \frac{17}{16} \approx 1,06
 \end{aligned}$$

Antwort: Der Flächeninhalt beträgt also 1,06.

Bisher bestand die Aufgabenstellung darin, den Flächeninhalt eines Flächenstückes zu berechnen, das einerseits vom Funktionsgraphen und der x-Achse, andererseits von zwei Parallelen zur y-Achse begrenzt wird. Mit den bisher gewonnenen Ergebnissen lassen sich aber auch Flächen berechnen, die von zwei Funktionsgraphen begrenzt werden. In Abbildung 22 sind solche Flächen zu sehen. Die Idee dabei ist sehr einfach: Es werden jeweils die Flächen bis zur x-Achse berechnet und dann voneinander abgezogen.

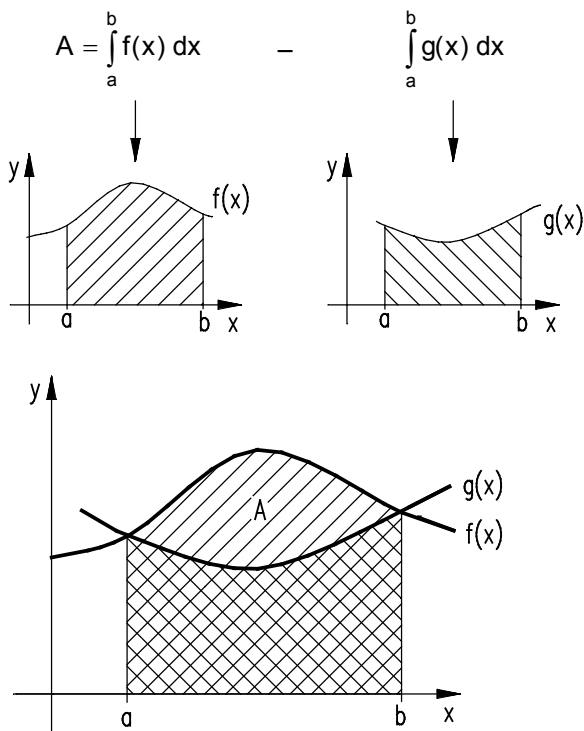


Abbildung 24 Fläche zwischen 2 Grafen

Anmerkungen

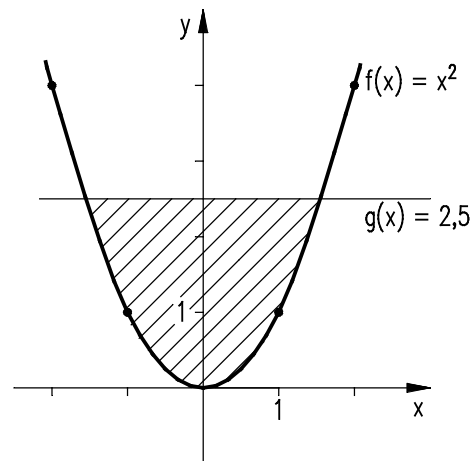
- Die Berechnung ist nur dann richtig, wenn im ganzen Intervall $f(x) \geq g(x)$ ist. D.h. man muss an den Schnittpunkten trennen.
- Es spielt keine Rolle, ob die Fläche die x-Achse überstreicht.

Lehrbeispiel 6

Berechnen Sie die Fläche, welche die Grafen der Funktion $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2,5$ einschließen! Zeichnen Sie die Grafen!

Lösung

1. Skizze



2. Berechnung der Schnittpunkte

$$\text{Bed.: } f(x_s) = g(x_s)$$

$$\text{d.h.: } x_s^2 = 2,5 \Leftrightarrow x_{s1} = +\sqrt{2,5} = 1,581 \quad \text{und} \quad x_{s2} = -\sqrt{2,5} = -1,581$$

3. Stammfunktionen

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3, \text{ denn } \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

$$G(x) = 2,5x, \text{ denn } (2,5x)' = 2,5 = g(x)$$

4. Fläche

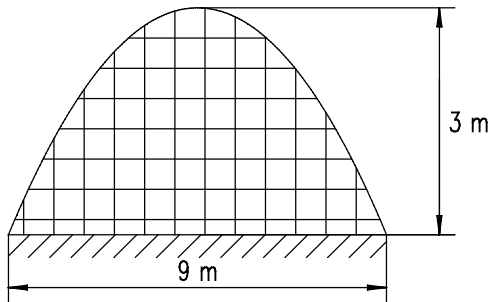
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1,581}^{1,581} g(x) \, dx - \int_{-1,581}^{1,581} f(x) \, dx = G(1,581) - G(-1,581) - [F(1,581) - F(-1,581)] \\ &= 2,5 \cdot 1,581 - 2,5 \cdot (-1,581) - \left[\frac{1}{3}(1,581)^3 - \frac{1}{3}(-1,581)^3 \right] = 5 \cdot 1,581 - \frac{2}{3}1,581^3 = 5,27 \end{aligned}$$

Antwort: Die Fläche hat einen Inhalt von 5,27.

Lehrbeispiel 7

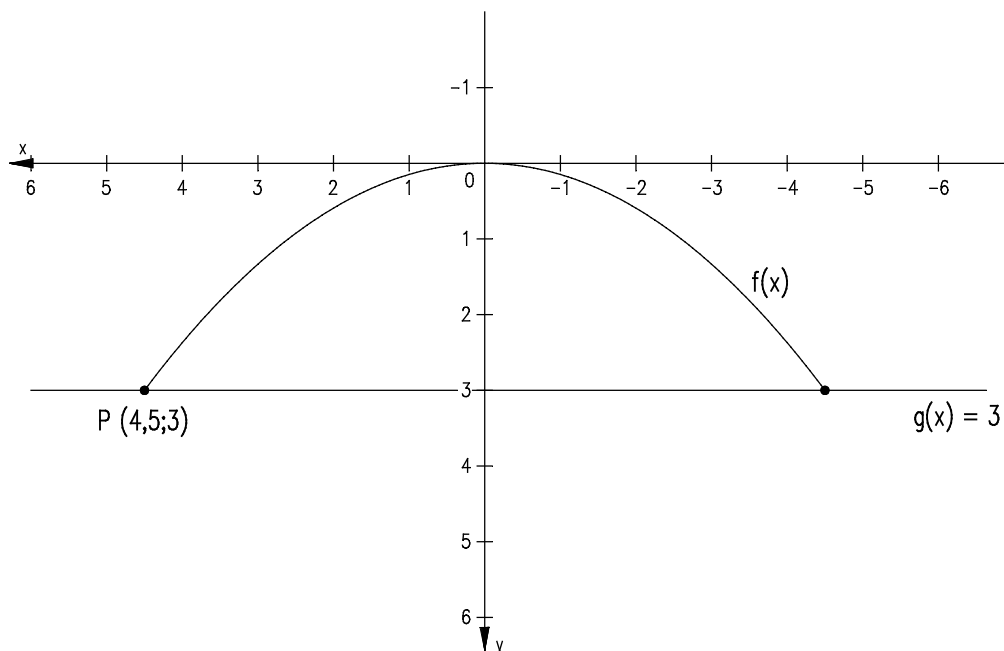
Ein Gewächshaus ist laut unten stehender Abbildung 25 m lang. Seine Querschnittsfläche kann annähernd als Parabel aufgefasst werden.

Bestimmen Sie für eine Wärmebedarfsberechnung das umschlossene Volumen!

**Lösung**

1. Bestimmung der Funktionsgleichung der Randfunktion

Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems wird die Funktionsgleichung sehr einfach.



Wird der Ursprung in den Scheitelpunkt der Vorderfront, die x-Achse nach links und die y-Achse nach unten gelegt, so ergibt sich für den Ansatz der Parabel $f(x) = a \cdot x^2$, denn es liegt dann keine Verschiebung der Parabel vor, sondern nur eine Stauchung. Der Parameter a lässt sich aus der Bedingung, dass die Parabel durch den Punkt $P(4,5;3)$ geht, d.h. $f(4,5) = 3$,

also

$$a \cdot 4,5^2 = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4,5^2} = 0,148.$$

$$\text{D.h. } f(x) = 0,148 \cdot x^2$$

2. Bestimmung der Stammfunktion

$$F(x) = \frac{0,148}{3} x^3, \text{ wie sich durch Ableiten zeigen lässt.}$$

3. Bestimmung der Fläche

Die Fläche kann als Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x) = 3$ aufgefasst werden. Die Schnittpunkte der beiden Kurven liegen bei $-4,5$ und $4,5$. Also gilt

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4,5}^{4,5} g(x) \, dx - \int_{-4,5}^{4,5} f(x) \, dx = G(4,5) - G(-4,5) - [F(4,5) - F(-4,5)] \\ &= 3 \cdot 4,5 - 3 \cdot (-4,5) - \left[\frac{0,148}{3} 4,5^3 - \frac{0,148}{3} (-4,5)^3 \right] = 18 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt also $18 \, \text{m}^2$.

4. Bestimmung des Volumens

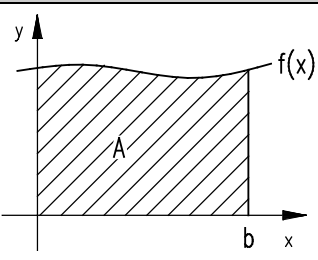
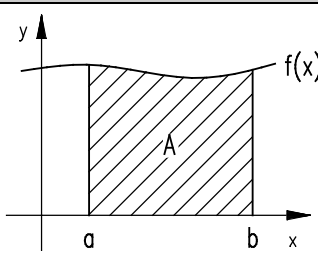
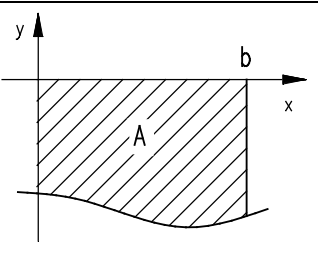
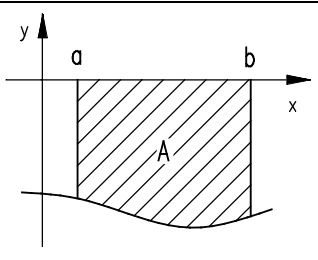
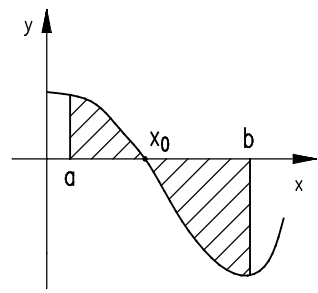
Das Volumen berechnet sich aus Stirnfläche mal Länge.

$$V = 18 \, \text{m}^2 \cdot 25 \, \text{m} = 450 \, \text{m}^3$$

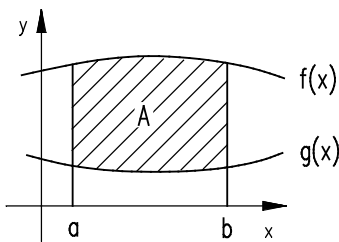
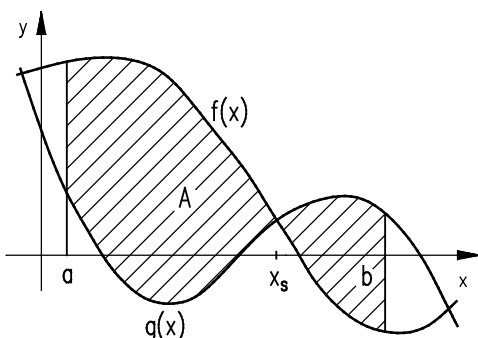
Das Volumen beträgt also $450 \, \text{m}^3$.

Zusammenfassung Flächenberechnung

1. x-Achse ist Randlinie

	linke Grenze y-Achse	linke Grenze $a < b$
positive Fläche	 $A = \int_0^b f(x) \, dx$	 $A = \int_a^b f(x) \, dx$
negative Fläche	 $A = -\int_0^b f(x) \, dx$	 $A = -\int_a^b f(x) \, dx$
Nullstelle in $[a;b]$	 $A = \int_a^{x_0} f(x) \, dx - \int_{x_0}^b f(x) \, dx$	

2. $g(x)$ ist Randlinie

$f(x) \geq g(x)$ in $[a ; b]$	Schnittpunkt in $[a ; b]$
 $A = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$	 $A = \int_a^{x_s} [f(x) - g(x)] \, dx + \int_{x_s}^b [g(x) - f(x)] \, dx$

2.2.2 Bestimmte Integrale

Eine der Hauptanwendungen der Integralrechnung ist die Flächenberechnung. Um beliebige Flächen berechnen zu können, ist es Voraussetzung, dass zu einer gegebenen Funktion die Stammfunktion berechnet werden kann, um das bestimmte Integral zu bestimmen. In diesem Abschnitt geht es darum, einige Verfahren kennen zu lernen, wie Stammfunktionen berechnet werden.

Die Idee bei diesen Berechnungen ist Folgende:

1. Wie ein Baukastensystem werden die Stammfunktionen einiger Grundfunktionen bestimmt.
2. Wie bei einer Gebrauchsanweisung werden Regeln für das Integrieren von zusammengesetzten Funktionen hergeleitet. Damit lässt sich dann die Stammfunktion einer Funktion herleiten, die aus den Grundfunktionen zusammengesetzt ist.

Stammfunktionen einiger Grundfunktionen

1. $f(x) = c$, wobei c eine konstante reelle Zahl ist.
Die Stammfunktion ist $F(x) = c \cdot x$, denn deren Ableitung ist c .
Beispiel: $f(x)=365$, dann ist $F(x)=365x$.
2. $f(x) = x$
Die Stammfunktion ist $F(x) = 1/2 \cdot x^2$, denn deren Ableitung ist x .
3. $f(x) = x^2$
Die Stammfunktion ist $F(x) = 1/3 \cdot x^3$, denn deren Ableitung ist x^2 .
4. $f(x) = \sin x$
Die Stammfunktion ist $F(x) = -\cos x$, denn deren Ableitung ist $\sin x$.
5. $f(x) = \cos x$
Die Stammfunktion ist $F(x) = \sin x$, denn deren Ableitung ist $\cos x$.
6. $f(x) = e^x$
Die Stammfunktion ist $F(x) = e^x$, denn deren Ableitung ist e^x .

7. $f(x) = \ln x$

Die Stammfunktion ist $F(x) = x \cdot (\ln x - 1)$, wie durch folgenden Beweis gezeigt werden kann.

Sei $F(x) = x \cdot (\ln x - 1)$

$$\begin{aligned}
 \text{Bilde} \quad F'(x) &= [x \cdot (\ln x - 1)] \\
 &\quad \uparrow \quad \uparrow \\
 &\quad u \quad v \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad + \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 &= 1 \cdot (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} \\
 &= \ln x - 1 + 1 \\
 &= \ln x
 \end{aligned}$$

Rechenregeln für zusammengesetzte Funktionen

1. Faktorregel

Viele Funktionen $f(x)$ lassen sich als das Produkt einer Grundfunktion mit einer konstanten Zahl schreiben, wie zum Beispiel $f(x) = 220 \cdot \sin x$, oder allgemein $f(x) = c \cdot g(x)$. Wenn sich eine Funktion so schreiben lässt, dann kann die Stammfunktion dadurch bestimmt werden, dass nur die Funktion $g(x)$ integriert wird und deren Stammfunktion dann mit der Konstanten multipliziert wird.

Also ist $F(x) = 220 \cdot (-\cos x) = -220 \cdot \cos x$ eine Stammfunktion von $f(x) = 220 \cdot \sin x$.

Oder allgemein:

Ist $f(x) = c \cdot g(x)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, sowie c eine konstante reelle Zahl, dann ist $F(x) = c \cdot G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beweis:

Sei $F(x) = c \cdot g(x)$, c eine reelle Zahl und $g(x)$ die erste Ableitung von $G(x)$,

dann gilt

$$\begin{aligned}
 f(x) = F'(x) &= (c \cdot G(x))' && | \text{ Faktorregel der Differentialrechnung} \\
 &= c \cdot G'(x) && | G'(x) = g(x) \text{ nach Voraussetzung} \\
 &= c \cdot g(x)
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 1

Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = 20 \cdot x^2$!

Lösung

$f(x)$ hat die Form $c \cdot g(x)$ mit $g(x) = x^2$ und $c = 20$. Die Stammfunktion von x^2 ist $\frac{1}{3} \cdot x^3$. Nach der Konstantenregel ist damit

$$\begin{aligned} F(x) &= 20 \cdot \frac{1}{3} x^3 \\ &= \frac{20}{3} x^3 \end{aligned}$$

2. Summenregel

Viele Funktion $f(x)$ lassen sich als Summe von zwei Funktionen schreiben, wie zum Beispiel $f(x) = x^2 + x$, oder allgemein $f(x) = g(x) + h(x)$. Wenn sich eine Funktion so schreiben lässt, dann kann die Stammfunktion dadurch bestimmt werden, dass die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ integriert werden und deren Stammfunktion summiert werden. Also ist $F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^2 + x$.

Oder allgemein:

Ist $f(x) = g(x) + h(x)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, sowie $H(x)$ eine Stammfunktion von $h(x)$, dann ist $F(x) = G(x) + H(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beweis:

Sei $F(x) = G(x) + H(x)$ und $g(x) = G'(x)$ sowie $h(x) = H'(x)$

dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ &= (G(x) + H(x))' && | \text{ Summenregel der Differentialrechnung} \\ &= G'(x) + H'(x) && | G'(x) = g(x) \text{ und } H'(x) = h(x) \text{ nach Voraussetzung} \\ &= g(x) + h(x) \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 2

Berechnen Sie die Stammfunktion zu $f(x) = \ln x + e^x$!

Lösung

$f(x) = \ln x + e^x$ hat die Form $g(x) + h(x)$ mit $g(x) = \ln x$ und $h(x) = e^x$. Die Stammfunktion von $g(x)$ ist $G(x) = x (\ln x - 1)$ und die Stammfunktion von $h(x)$ ist $H(x) = e^x$. Nach der Summenregel ist $F(x) = G(x) + H(x) = x (\ln x - 1) + e^x$.

Antwort: Die Stammfunktion lautet $F(x) = x (\ln x - 1) + e^x$.

Beide Regeln können auch kombiniert werden, wie folgendes Lehrbeispiel zeigt.

Lehrbeispiel 3

Bestimmen Sie die Stammfunktion zu $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$!

Lösung

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 3 \quad \left| \begin{array}{ll} g(x) = 3x^2 & \Rightarrow G(x) = 3 \cdot 1/3x^3 = x^3 \\ h(x) = -2x & \Rightarrow H(x) = -2 \cdot 1/2x^2 = -x^2 \\ i(x) = 3 & \Rightarrow I(x) = 3x \end{array} \right. \text{ nach Faktorregel}$$

$$F(x) = G(x) + H(x) + I(x)$$

$$= x^3 - x^2 + 3x$$

Antwort: Die Stammfunktion lautet $F(x) = x^3 - x^2 + 3x$

In vielen Anwendungsaufgaben und Anwendungsgebieten der Integralrechnung kommt es vor, dass die Differenz zweier Stammfunktionen mit bestimmten x-Werten bestimmt werden muss. Deshalb bekommt sie einen neuen Namen und eine besondere Schreibweise.

Definition

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, dann heißt die Differenz $F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral** über der Funktion f im Intervall $[a; b]$ und wird mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet. Es

gilt also:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Anwendungen des bestimmten Integrals

Die Arbeit als bestimmtes Integral.

Für eine konstante Kraft F , die längst eines Weges s auf einen Körper in Wegrichtung wirkt, berechnet sich die verrichtete Arbeit $W = F \cdot s$.

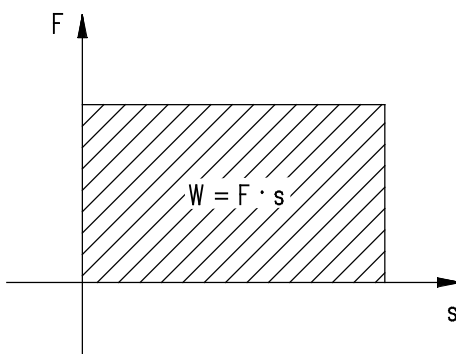


Abbildung 25 Verrichtete Arbeit

Für beliebige Kräfte wird die Arbeit über das bestimmte Integral berechnet.

Wirkt eine Kraft $F(x)$ - nicht zu verwechseln mit der Stammfunktion - längs eines Weges s in Wegrichtung, so wird die Arbeit durch

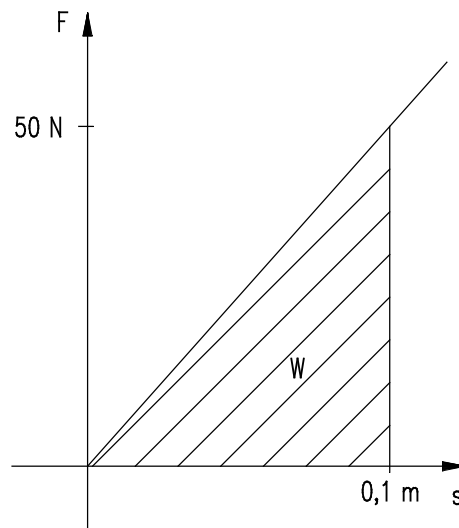
$$W = \int_0^s F(x) dx \text{ berechnet.}$$

Lehrbeispiel 4

Ein Körper wird durch eine Feder auf einer Strecke von 0,10 m beschleunigt. Für die Feder gilt das Hookesche Gesetz $F(x) = D \cdot x$, wobei die Federkonstante $D = 500 \text{ N/m}$ ist.

Berechnen Sie die verrichtete Arbeit W !

Lösung



$$\begin{aligned} W &= \int_0^{0,1\text{m}} F(x) dx \\ &= \int_0^{0,1\text{m}} 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x \, dx \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von $500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x$ ist

$$500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{1}{2} x^2 = 250 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2$$

$$= 250 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,1 \text{ m})^2 - 250 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0^2$$

$$= 250 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,01 \text{ m}^2$$

$$= 2,5 \text{ Nm}$$

$$= 2,5 \text{ J}$$

Antwort: Die verrichtete Arbeit beträgt 2,5 J.

Diese und weitere physikalisch-technische Bedeutungen zeigt folgende Tabelle:

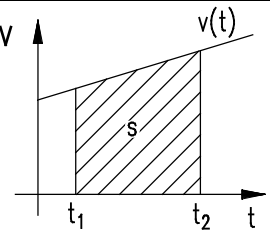
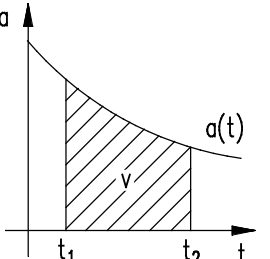
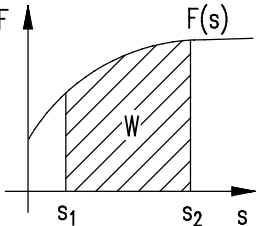
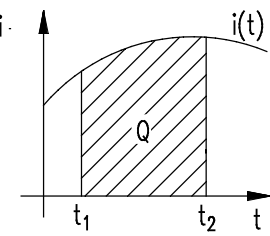
Ausgangsfunktion	Integral	Skizze	Zusammenhang
Geschwindigkeit $v(t)$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$		Der Flächeninhalt entspricht dem im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ zurückgelegten Weg.
Beschleunigung	$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$		Der Flächeninhalt entspricht der im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ erreichten Geschwindigkeit.
Kraft $F(s)$	$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds$		Der Flächeninhalt entspricht der im Wegintervall $[s_1; s_2]$ verrichteten mechanischen Arbeit.
Stromstärke $i(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$		Der Flächeninhalt entspricht der im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ durch den Strom transportierte Ladung.

Tabelle 8 Einige physikalisch-technische Bedeutungen des bestimmten Integrals

Aufgaben
Aufgabe 1

Eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung werde beschrieben durch

$$s(t) = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 30 \text{ m}.$$

Ermitteln Sie die Momentangeschwindigkeit nach 5 s rechnerisch und überprüfen Sie Ihre Berechnung durch den Funktionsgrafen!

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die erste Ableitung von:

2.1 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

2.2 $f(x) = e^x(x^2 - 1)$

2.3 $f(x) = \ln x \cdot \cos x$

2.4 $f(x) = \sin(3x + 2)$

2.5 $f(x) = (1 - \cos x)^3$

2.6 $f(x) = e^{x+1} \sin(2x + 2)$

Aufgabe 3

Leiten Sie folgende Funktion so oft ab, bis die Ableitungsfunktion eine konstante Funktion ist!

3.1 $f(x) = 0,125x^8 - 30x^4$

3.2 $f(x) = 0,25ax^4 + bx^5 - c$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Hoch- und Tiefpunkte folgender Funktionen!

4.1 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 3x + 6$

4.2 $f(x) = -x^4 + 2x^3$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass $F(x) = 1/8x^4 - 1/3x^3 - 5/4x^2 + 6x$ eine Stammfunktion von $f(x) = 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 6$ ist und bestimmen Sie die Fläche unter dem Grafen von $f(x)$ im Intervall $[-2;3]$! (Hinweis: Im Intervall liegen keine Nullstellen der Funktion)

Aufgabe 6

Gegeben ist $f(x) = -1/3x^3 + 2x^2 - 5/3x$.

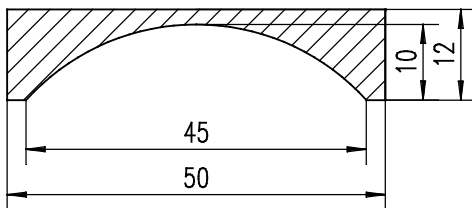
- 6.1 Zeigen Sie, dass $F(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^2$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist!
- 6.2 Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$!
- 6.3 Skizzieren Sie $f(x)$!
- 6.4 Bestimmen Sie die Fläche, die der Graf mit der x -Achse einschließt!

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 6x + 5$ und $g(x) = 2,5x - 10$!

Aufgabe 8

Berechnen Sie den Materialverbrauch einer 30 m breiten Brücke mit parabelförmigem Bogen!

Aufgabe 9

Ein Kondensator wird mit einem Ladestrom der Stärke $i(t) = 5,56 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t}{1,08}}$ geladen (i in A und t in s).

- 9.1 Skizzieren Sie $i(t)$ im Intervall $[0; 6s]$!
- 9.2 Zeigen Sie durch Bilden der Ableitung, dass $Q(t) = -6,0048 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t}{1,08}}$ eine Stammfunktion von $i(t)$ ist!
- 9.3 Berechnen Sie die in den ersten 4s transportierte Ladung!

**Realisierung
Komplexaufgabe
„Konservendose“**Aufgabe 1

Leiten Sie mithilfe der Differenzialrechnung eine allgemeine Beziehung zur Berechnung der minimalen Oberfläche in Abhängigkeit vom Radius einer zylindrischen Blechdose bei vorgegebenem Volumen her!

Wenden Sie die hergeleitete Beziehung für ein Volumen von 0,75 l an, und ermitteln Sie die entsprechende Oberfläche sowie den dazugehörigen Radius!

Aufgabe 2

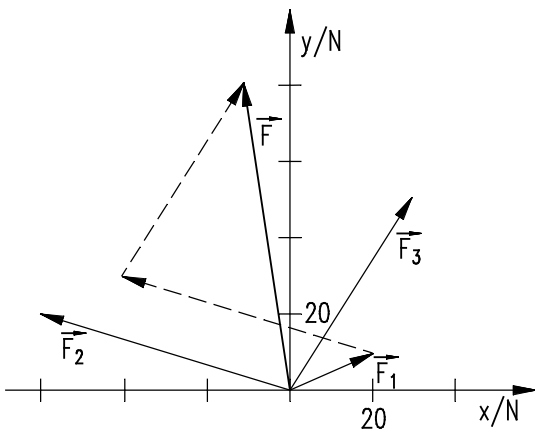
Leiten Sie mithilfe der Differenzialrechnung eine allgemeine Beziehung zur Berechnung des maximalen Volumens in Abhängigkeit vom Radius einer zylindrischen Blechdose bei vorgegebener Oberfläche her!

Wenden Sie die hergeleitete Beziehung für eine Oberfläche von 500 cm^2 an, und ermitteln Sie das entsprechende Volumen sowie den dazugehörigen Radius!

Lösungsanhang**Lösungen****1 Vektoren und Matrizen****Aufgabe 1****1. Rechnung**

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 20 \text{ N} \\ 10 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -60 \text{ N} \\ 20 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \text{ N} \\ 50 \text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \text{ N} \\ 80 \text{ N} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

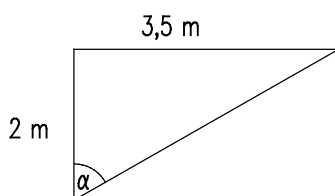
$$|\vec{F}| = \sqrt{(-10 \text{ N})^2 + (80 \text{ N})^2} \approx 80,623 \text{ N}$$

2. Zeichnung

Antwort: $\vec{F} = \begin{pmatrix} -10 \text{ N} \\ 80 \text{ N} \end{pmatrix}$ und die Größe der Kraft beträgt 80,62 N.

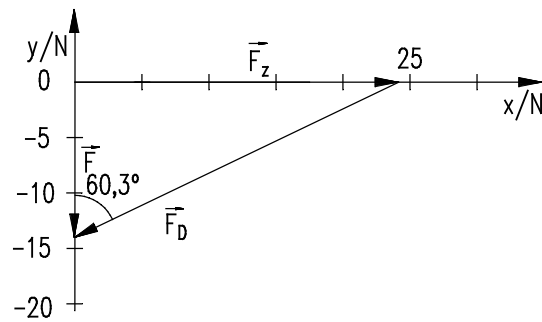
Aufgabe 2

Geometrie



$$\tan \alpha = \frac{3,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 1,75 \Rightarrow \alpha = 60,255^\circ \approx 60,3^\circ$$

Kräfte



$$1. \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \text{ kN} \end{pmatrix}$$

2. \vec{F}_Z : Für die Länge von F_Z ergibt sich nach dem Dreisatz.

$$\frac{3,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} = \frac{|F_Z|}{14 \text{ kN}} \Rightarrow F_Z = 1,75 \cdot 14 \text{ kN} = 24,5 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_Z = \begin{pmatrix} 24,5 \text{ kN} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \Rightarrow \vec{F}_D = \begin{pmatrix} -24,5 \text{ kN} \\ -14 \text{ kN} \end{pmatrix}$$

4. \vec{F} und \vec{F}_D belasten auf Druck, \vec{F}_Z auf Zug.

Antwort: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \text{ kN} \end{pmatrix}$; $\vec{F}_Z = \begin{pmatrix} 24,5 \text{ kN} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{F}_D = \begin{pmatrix} -24,5 \text{ kN} \\ -14 \text{ kN} \end{pmatrix}$

\vec{F} und \vec{F}_D belasten auf Druck, \vec{F}_Z auf Zug.

Aufgabe 3

1. Differenzvektor zwischen den Bohrlöchern

$$\vec{d} = \frac{1}{5}(\vec{p}_8 - \vec{p}_3) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 305 \text{ mm} - 130 \text{ mm} \\ 185 \text{ mm} - 85 \text{ mm} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 175 \text{ mm} \\ 100 \text{ mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \text{ mm} \\ 20 \text{ mm} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_3 - 2 \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 130 \text{ mm} \\ 85 \text{ mm} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 35 \text{ mm} \\ 20 \text{ mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \text{ mm} \\ 45 \text{ mm} \end{pmatrix} \Rightarrow P_1(60 \text{ mm}; 45 \text{ mm})$$

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_3 - \vec{d} = \begin{pmatrix} 130 \text{ mm} \\ 85 \text{ mm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 \text{ mm} \\ 20 \text{ mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \text{ mm} \\ 65 \text{ mm} \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(95 \text{ mm}; 65 \text{ mm})$$

analog:

P_4 (165 mm;105 mm)

P_5 (200 mm;125 mm)

P_6 (235 mm;145 mm)

P_7 (270 mm;165 mm)

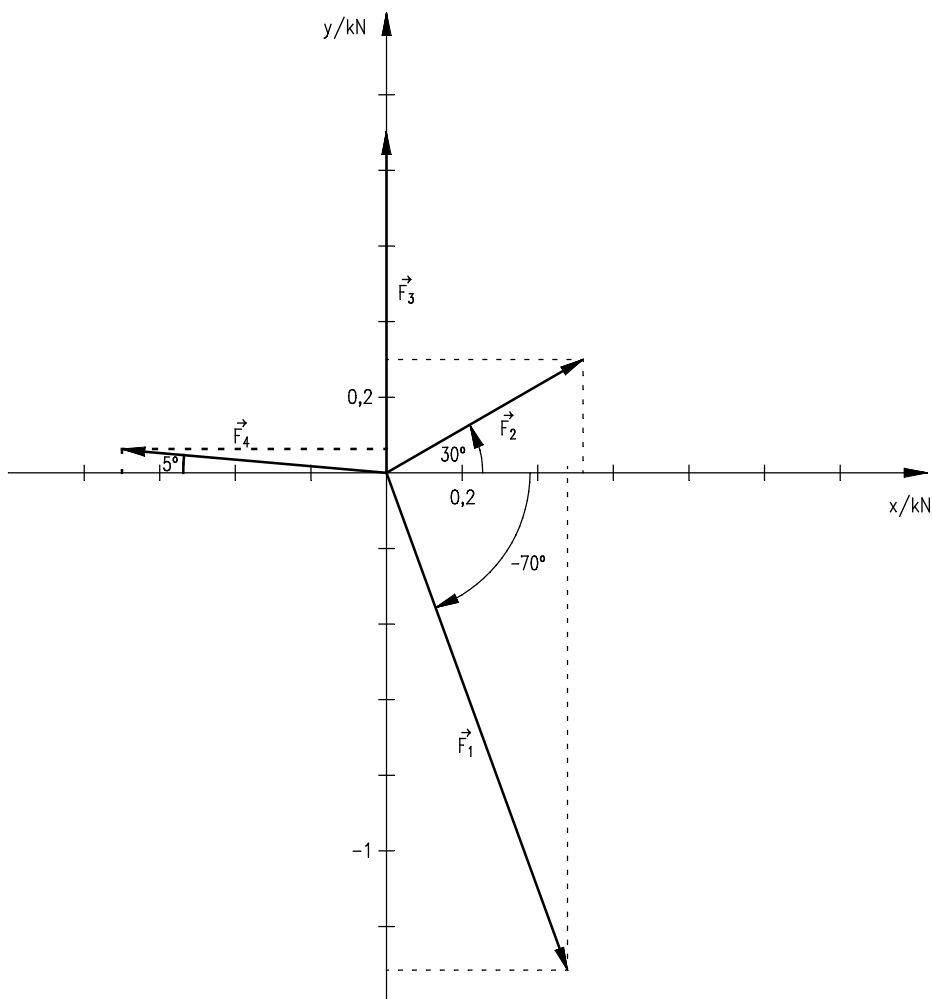
P_9 (340 mm;205 mm)

2. Weg

$$\vec{s} = 8 \cdot |\vec{d}| = 8 \cdot \sqrt{(35 \text{ mm})^2 + (20 \text{ mm})^2} = 8 \cdot 40,31 \text{ mm} = 322,48 \text{ mm} \\ \approx 0,32 \text{ m}$$

Aufgabe 4

1. vektorielle Darstellung der Einzelkräfte



$$F_{1x} = |\vec{F}_1| \cdot \cos 70^\circ = 1,4 \text{ kN} \cdot \cos 70^\circ = 0,4788 \text{ kN} \quad \Rightarrow \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0,4788 \text{ kN} \\ -1,316 \text{ kN} \end{pmatrix}$$

$$F_{1y} = -|\vec{F}_1| \cdot \sin 70^\circ = -1,4 \text{ kN} \cdot \sin 70^\circ = -1,316 \text{ kN}$$

$$F_{2x} = |\vec{F}_2| \cdot \cos 30^\circ = 0,6 \text{ kN} \cdot \cos 30^\circ = 0,5196 \text{ kN} \quad \Rightarrow \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0,5196 \text{ kN} \\ 0,3 \text{ kN} \end{pmatrix}$$

$$F_{2y} = |\vec{F}_2| \cdot \sin 30^\circ = 0,6 \text{ kN} \cdot \sin 30^\circ = 0,3 \text{ kN}$$

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,9 \text{ kN} \end{pmatrix}$$

$$F_{4x} = -|\vec{F}_4| \cdot \cos 5^\circ = -0,7 \text{ kN} \cdot \cos 5^\circ = -0,6973 \text{ kN} \quad \Rightarrow \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} -0,6973 \text{ kN} \\ 0,06101 \text{ kN} \end{pmatrix}$$

$$F_{4y} = |\vec{F}_4| \cdot \sin 5^\circ = 0,7 \text{ kN} \cdot \sin 5^\circ = 0,06101 \text{ kN}$$

2. Summenkraft

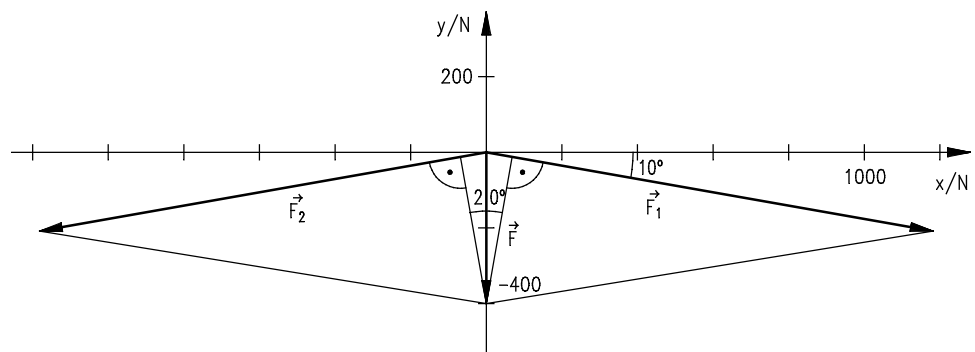
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} 0,3011 \text{ kN} \\ -0,05499 \text{ kN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,301 \text{ kN} \\ -0,055 \text{ kN} \end{pmatrix}$$

3. Betrag

$$|\vec{F}| = \sqrt{(0,3011 \text{ kN})^2 + (-0,05499 \text{ kN})^2} = 1,0013 \text{ kN} \approx 1 \text{ kN}$$

Antwort: Die Gesamtkraft ist $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0,301 \text{ kN} \\ -0,055 \text{ kN} \end{pmatrix}$ und hat einen Betrag von 1 kN.

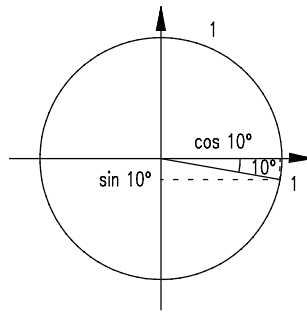
Aufgabe 5



1. Bestimmung von Einheitsvektoren

$$\vec{e}_{F_1} = \begin{pmatrix} \cos 10^\circ \\ -\sin 10^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9848 \\ -0,1736 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{F_2} = \begin{pmatrix} -\cos 10^\circ \\ -\sin 10^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,9848 \\ -0,1736 \end{pmatrix}$$



2. Bestimmung der Kräfte

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} \quad | \quad \vec{F}_1 = a \cdot \vec{e}_{F_1}; \vec{F}_2 = a \cdot \vec{e}_{F_2}, \text{ da aus Symmetriegründen} \\ |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|.$$

$$a \cdot \vec{e}_{F_1} + a \cdot \vec{e}_{F_2} = \vec{F}$$

$$a (\vec{e}_{F_1} + \vec{e}_{F_2}) = \vec{F} \quad | \quad \text{Achtung! Es darf jetzt nicht durch } (\vec{e}_{F_1} + \vec{e}_{F_2}) \text{ dividiert} \\ \text{werden, da die Division von Vektoren nicht definiert ist.}$$

$$a \begin{pmatrix} 0,9848 & -0,9848 \\ -0,1736 & -0,1736 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -460 \text{ N} \end{pmatrix}$$

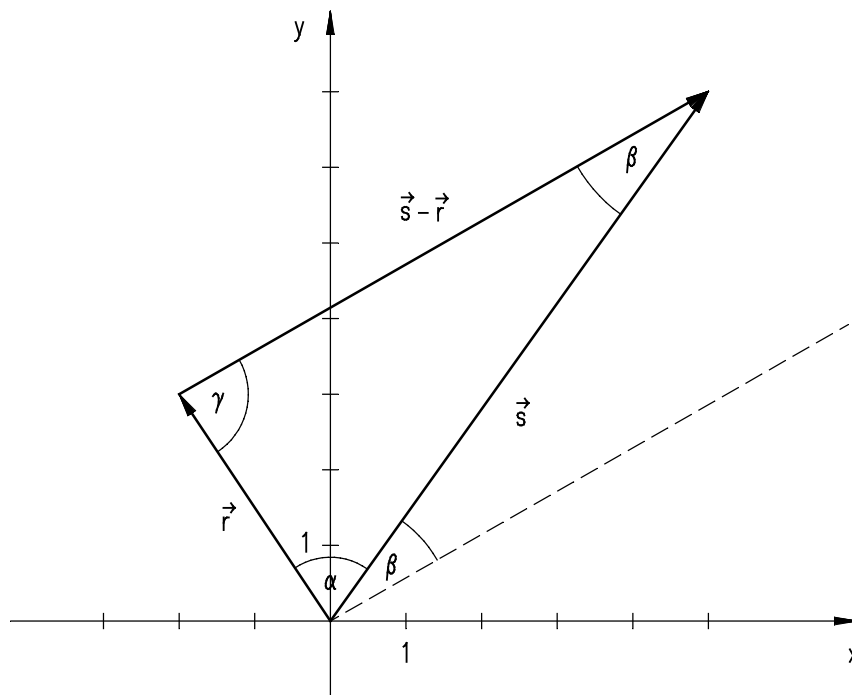
$$a \begin{pmatrix} 0 \\ -0,3473 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -460 \text{ N} \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{-460 \text{ N}}{-0,3473} = 1324,5 \text{ N}$$

$$\text{damit: } \vec{F}_1 = 1324,5 \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} 0,9848 \\ -0,1736 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1304 \text{ N} \\ -230 \text{ N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1304 \text{ N} \\ -230 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Antwort: Die Wangenkräfte lauten $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1304 \text{ N} \\ -230 \text{ N} \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1304 \text{ N} \\ -230 \text{ N} \end{pmatrix}$ und haben eine Größe von 1,325 kN.

Aufgabe 6



1. Winkel α

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{s}|} =$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 11$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{74}} = 0,3547 \Rightarrow \alpha = 69,23^\circ \approx 69,2^\circ$$

2. Winkel β

β ist der Winkel zwischen $\vec{s} - \vec{r}$ und \vec{s}

$$\cos \beta = \frac{(\vec{s} - \vec{r}) \cdot \vec{s}}{|\vec{s} - \vec{r}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\vec{s} - \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{s} - \vec{r}) \cdot \vec{s} = 7 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 63$$

$$|\vec{s} - \vec{r}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{74}$$

$$= \frac{63}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{74}} = 0,9084 \Rightarrow \beta = 24,72^\circ \approx 24,7^\circ$$

3. Winkel γ

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 86,05^\circ \approx 86,1^\circ$$

Antwort: Die Winkel betragen $69,2^\circ$, $24,7^\circ$ und $86,1^\circ$.

Aufgabe 7

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad \left| \quad \begin{aligned} \vec{F} &= \begin{pmatrix} 6 \text{ kN} \\ 2 \text{ kN} \end{pmatrix} \\ \vec{s} &= p_1 - p_0 = \begin{pmatrix} 670 \text{ m} - 550 \text{ m} \\ 350 \text{ m} - 300 \text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \text{ m} \\ 50 \text{ m} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \text{ kN} \\ 2 \text{ kN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \text{ m} \\ 50 \text{ m} \end{pmatrix} = 6 \text{ kN} \cdot 120 \text{ m} + 2 \text{ kN} \cdot 50 \text{ m} = 820 \text{ kNm}$$

Antwort: Die verrichtete Arbeit beträgt 820 kNm.

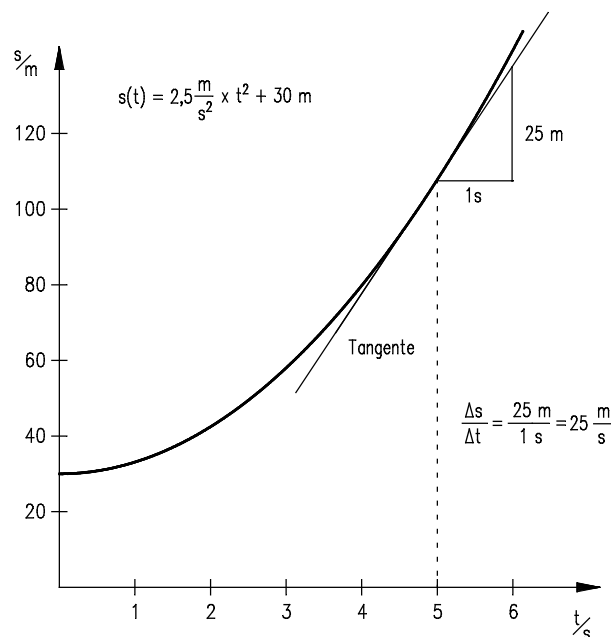
2 Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung

Aufgabe 1

Differenzenquotient

$$\begin{aligned}
 \frac{s(5\text{ s} + h) - s(5\text{ s})}{h} &= \frac{2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5\text{ s} + h)^2 + 30\text{ m} - \left[2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (5\text{ s})^2 + 30\text{ m} \right]}{h} \\
 &= \frac{2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (25\text{ s}^2 + 10\text{ sh} + h^2) + 30\text{ m} - 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 25\text{ s}^2 - 30\text{ m}}{h} \\
 &= \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot h + 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot h^2}{h} \\
 &= \frac{h \left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot h \right)}{h} \\
 &= 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot h
 \end{aligned}$$

Differentialquotient $\frac{ds}{dt} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \hat{=}$ Momentangeschwindigkeit



Antwort: Die Momentangeschwindigkeit nach 5 Sekunden beträgt $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Aufgabe 2.1

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\ln x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (e^x)' \cdot (x^2 - 1) + e^x (x^2 - 1)' \\
 &= e^x \cdot (x^2 - 1) + e^x \cdot 2x \\
 &= e^x (x^2 + 2x - 1)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\ln x)' \cdot \cos x + \ln x \cdot (\cos x)' \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \cos x + \ln x (-\sin x) \\
 &= \frac{1}{x} \cos x - \ln x \cdot \sin x
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \underbrace{\cos(3x+2)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\uparrow \\ \text{innere} \\ \text{Ableitung}}} \\
 &= 3 \cos(3x+2)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \underbrace{3(1 - \cos x)^2}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\sin x}_{\substack{\uparrow \\ \text{innere} \\ \text{Ableitung}}} \\
 &= 3 \sin x (1 - \cos x)^2
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.6

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (e^{x+1})' \cdot \sin(2x+2) + e^{x+1} \cdot (\sin(2x+2))' \\
 &= e^{x+1} \cdot 1 \cdot \sin(2x+2) + e^{x+1} \cdot \cos(2x+2) \cdot 2 \\
 &= e^{x+1} (\sin(2x+2) + 2 \cos(2x+2))
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

$$f'(x) = x^7 - 120x^3$$

$$f''(x) = 7x^6 - 360x^2$$

$$f'''(x) = 42x^5 - 720x$$

$$f^{IV}(x) = 210x^4 - 720$$

$$f^V(x) = 840x^3$$

$$f^{VI}(x) = 2520x^2$$

$$f^{VII}(x) = 5040x$$

$$f^{VIII}(x) = 5040$$

Aufgabe 3.2

$$f'(x) = ax^3 + 5bx^4$$

$$f''(x) = 3ax^2 + 20bx^3$$

$$f'''(x) = 6ax + 60bx^2$$

$$f^{IV}(x) = 6a + 120bx$$

$$f^V(x) = 120b$$

Aufgabe 4.1

 1. Bestimmung von $f'(x)$

$$f'(x) = -x^2 - \frac{4}{3}x + 3$$

 2. Bestimmung der Nullstellen x_E von $f'(x)$

$$\text{Bedingung: } f'(x_E) = 0$$

d.h.:

$$-x_E^2 - \frac{4}{3}x_E + 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x_E^2 + \frac{4}{3}x_E - 3 = 0$$

$$x_{E_{1,2}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{27}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{31}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{31}}{3}$$

$$x_{E_1} = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{31}}{3} = \frac{\sqrt{31} - 2}{3} \approx 1,189$$

$$x_{E_2} = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{31}}{3} = -\frac{\sqrt{31} + 2}{3} \approx -2,52$$

3. Bestimmung der Funktionswerte der Extremstellen

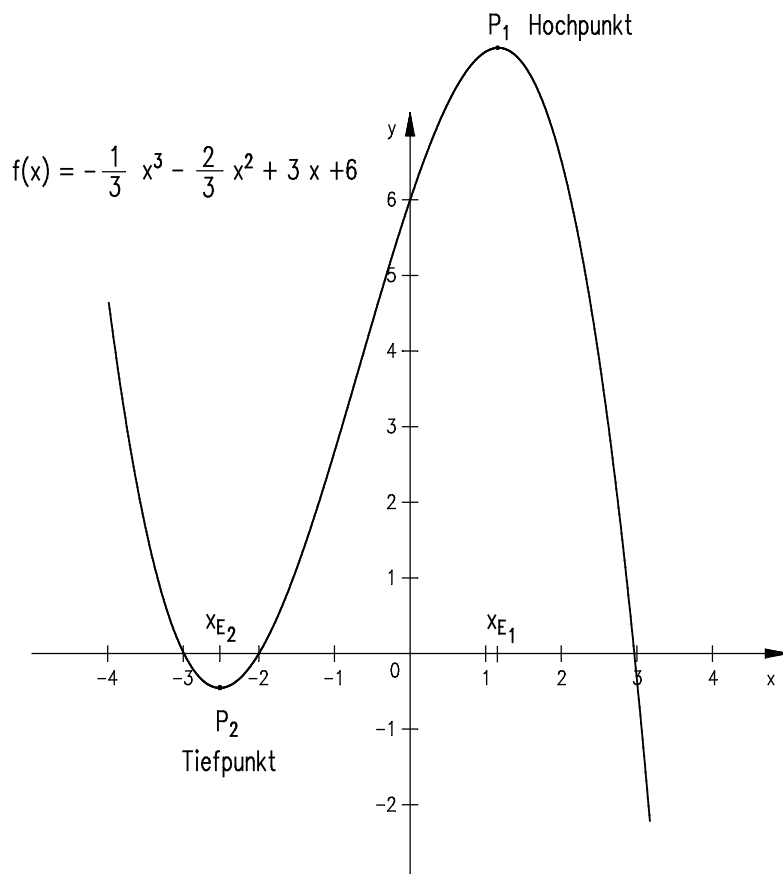
$$x_{E_1} = 1,189 \quad : \quad f(1,189) = -\frac{1}{3}(1,189)^3 - \frac{2}{3}(1,189)^2 + 3(1,189) + 6$$

$$= 8,06 \quad P_1 (1,189; 8,06)$$

$$x_{E_2} = -2,52 \quad : \quad f(-2,52) = -\frac{1}{3}(-2,52)^3 - \frac{2}{3}(-2,52)^2 + 3(-2,52) + 6$$

$$= -0,459 \quad P_2 (-2,52; -0,459)$$

4. Bestimmung der Art der Extrema aus dem Grafen



Antwort: Die Funktion hat in $P_1 (1,189; 8,06)$ einen Hochpunkt und in $P_2 (-2,52; -0,459)$ einen Tiefpunkt.

Aufgabe 4.2

1. Bestimmung von $f'(x)$

$$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$$

2. Bestimmung der Nullstellen x_E von $f'(x)$

Bedingung: $f'(x_E) = 0$

d.h.:

$$-4x_E^3 + 6x_E^2 = 0$$

$$-2x_E^2(2x_E - 3) = 0$$

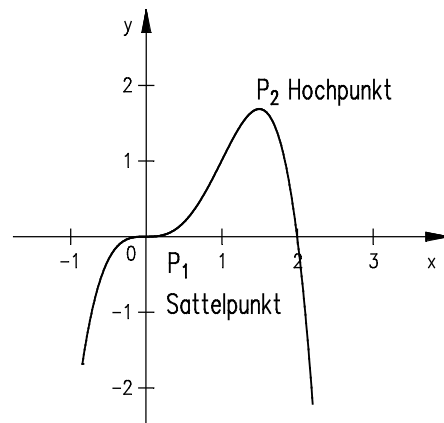
$$x_{E_1} = 0 \quad \vee \quad x_{E_2} = \frac{3}{2}$$

3. Bestimmung der Funktionswerte der Extremstellen

$$x_{E_1} = 0 : f(0) = 0 \quad P_1 (0;0)$$

$$x_{E_2} = \frac{3}{2} : f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 1,688 \quad P_2 (1,5;1,688)$$

4. Bestimmung der Art der Extrema aus dem Grafen



Aufgabe 5

1. Nachweis, dass $F'(x) = 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 6$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 6x \right)' \\ &= \left(\frac{1}{8}x^4 \right)' - \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' - \left(\frac{5}{4}x^2 \right)' + (6x)' \\ &= \frac{4}{8}x^3 - \frac{3}{3}x^2 - \frac{5 \cdot 2}{4}x + 6 \\ &= 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 6 \end{aligned}$$

2. Fläche

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^3 f(x) \, dx \\
 &= F(3) - F(-2) \\
 &= \frac{1}{8}3^4 - \frac{1}{3}3^3 - \frac{5}{4} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - \left(\frac{1}{8}(-2)^4 - \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{5}{4}(-2)^2 + 6 \cdot (-2) \right) \\
 &= \frac{485}{24} \\
 &\approx 20,2
 \end{aligned}$$

Antwort: Die Fläche beträgt 20,2.

Aufgabe 6.1

Nachweis, dass $F'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{3}x$

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^2 \right)' \\
 &= \left(-\frac{1}{12}x^4 \right)' + \left(\frac{2}{3}x^3 \right)' - \left(\frac{5}{6}x^2 \right)' \\
 &= -\frac{1}{12} \cdot 4x^3 + \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{6} \cdot 2x \\
 &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{3}x
 \end{aligned}$$

Antwort: $f(x)$ ist die Ableitung von $F(x)$.

Aufgabe 6.2

Nullstellen von $f(x)$

Bedingung: $f(x_0) = 0$

d.h.:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{3}x_0^3 + 2x_0^2 - \frac{5}{3}x_0 &= 0 & | \cdot (-3) \\
 x_0^3 - 6x_0^2 + 5x_0 &= 0 & | x_0 \text{ ausklammern} \\
 x_0(x_0^2 - 6x_0 + 5) &= 0
 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6x + 5 &= 0 \\
 x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 \\
 x_1 &= 3 + 2 = 5 \\
 x_2 &= 3 - 2 = 1
 \end{aligned}$$

also: $x_0(x_0 - 5)(x_0 - 1) = 0$

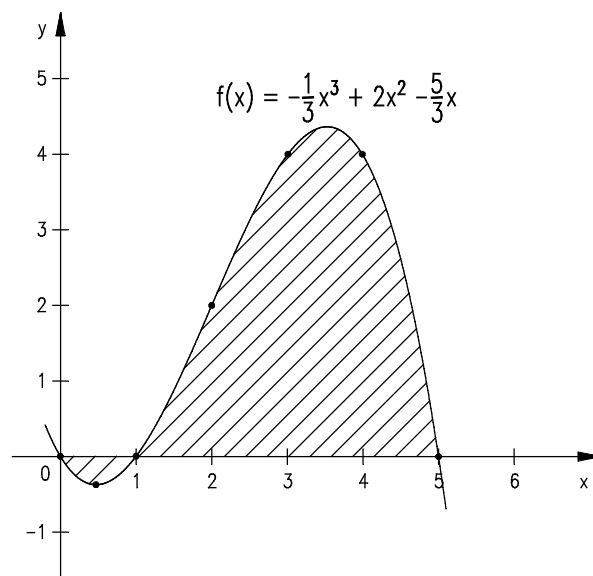
d.h. $x_{0_1} = 0$ $x_{0_2} = 1$ $x_{0_3} = 5$

Antwort: $f(x)$ hat Nullstellen bei 0, 1 und 5.

Aufgabe 6.3

Wertetabelle

x	f(x)
0,5	-0,375
2	2
3	4
4	4



Aufgabe 6.4

$$\begin{aligned}
 A &= -\int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^5 f(x) \, dx \\
 &= -[F(1) - F(0)] + F(5) - F(1) \\
 &= -F(1) + F(0) + F(5) - F(1) \\
 &= F(5) + F(0) - 2 \cdot F(1) \\
 &= -\frac{1}{12} 5^4 + \frac{2}{3} 5^3 - \frac{5}{6} 5^2 + 0 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right) \\
 &= 10,9\overline{16} \\
 &\approx 10,92
 \end{aligned}$$

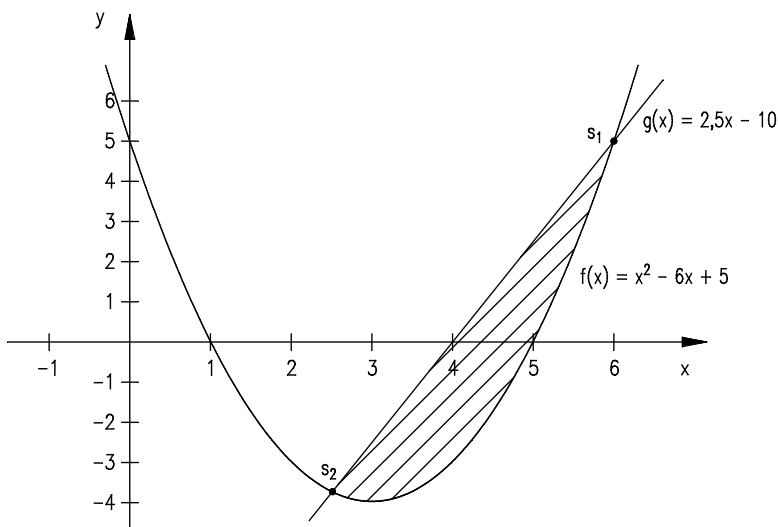
Antwort: Die Fläche beträgt 10,92.

Aufgabe 7**1. Berechnung der Schnittpunkte**Bedingung: $f(x_s) = g(x_s)$

d.h.:

$$\begin{aligned} x_s^2 - 6x_s + 5 &= 2,5x_s - 10 & | -2,5x_s + 10 \\ x_s^2 - 8,5x_s + 15 &= 0 & | p - q - \text{Formel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{s1,2} &= \frac{8,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8,5}{2}\right)^2 - 15} \\ &= 4,25 \pm \sqrt{3,0625} \\ &= 4,25 \pm 1,75 \\ x_{s1} &= 4,25 + 1,75 = 6 \\ x_{s2} &= 4,25 - 1,75 = 2,5 \end{aligned}$$

 $s_1 (6; 5)$ $s_2 (2,5; -3,75)$ **2. Skizze****3. Berechnung der Stammfunktion**

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 5x = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$$

$$G(x) = 2,5 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 10x = \frac{5}{4}x^2 - 10x$$

4. Flächenberechnung

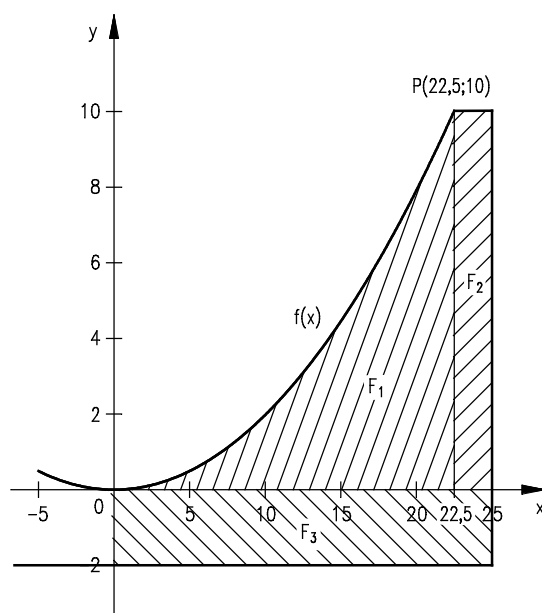
$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{2,5}^6 f(x) - g(x) \, dx \right| = |F(6) - G(6) - (F(2,5) - G(2,5))| \\
 &= \left| \frac{1}{3} \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 - \left(\frac{5}{4} \cdot 6^2 - 10 \cdot 6 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 2,5^3 - 3 \cdot 2,5^2 + 5 \cdot 2,5 - \left(\frac{5}{4} \cdot 2,5^2 - 10 \cdot 2,5 \right) \right) \right| \\
 &= \left| -\frac{343}{48} \right| \approx 7,15
 \end{aligned}$$

Antwort: Der Flächeninhalt beträgt 7,15.

Aufgabe 8

1. Aufstellen der Funktionsgleichung

Zunächst muss ein geeignetes Koordinatensystem festgelegt werden, sodass die Funktionsgleichungen möglichst einfach werden. Dabei kann zusätzlich die Fläche noch geeignet zerlegt werden.



Ansatz: $F(x) = a \cdot x^2$, da das Koordinatensystem so gelegt wurde, dass der Scheitelpunkt des Parabelbogens im Koordinatenursprung liegt.

Bedingung: Mit den Angaben der Zeichnung liegt $P(22,5;10)$ auf der Parabel.

d.h.: $f(22,5) = 10$ also:

$$\begin{aligned}
 a \cdot 22,5^2 &= 10 \\
 a &= \frac{10}{22,5^2} = \frac{10}{506,25} = \frac{8}{405}
 \end{aligned}$$

damit ist $f(x) = \frac{8}{405} \cdot x^2$

2. Querschnittsflächenberechnung

Um den Materialverbrauch bestimmen zu können, wird die Querschnittsfläche A benötigt. Nach der Einteilung in der Zeichnung gilt:

$$A = 2 \cdot (F_1 + F_2 + F_3)$$

$$F_1 = \int_0^{22,5} f(x) \, dx = \int_0^{22,5} \frac{8}{405} x^2 \, dx$$

$$= \frac{8}{405} \cdot \frac{1}{3} \cdot 22,5^3 - 0 = 75$$

$$F_2 = 2,5 \cdot 10 = 25$$

$$F_3 = 25 \cdot 2 = 50$$

$$A = 2 \cdot (75 + 25 + 50) = 300$$

Da alle Angaben in Meter waren, beträgt die Querschnittsfläche $300 \, \text{m}^2$.

3. Materialverbrauch

Der Materialverbrauch ist proportional zum Volumen.

$$V = A \cdot b \quad | \, b = 30 \, \text{m}$$

$$= 300 \, \text{m}^2 \cdot 30 \, \text{m}$$

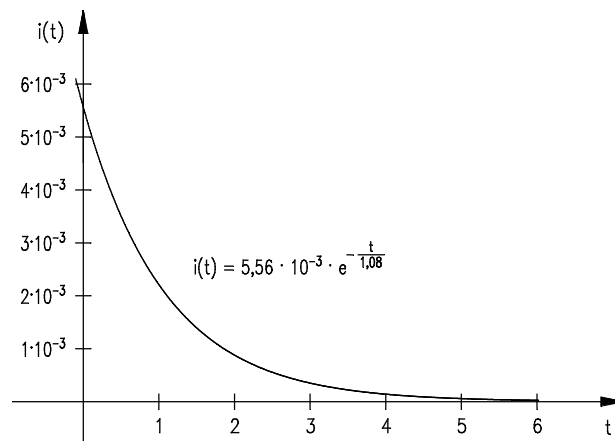
$$= 9000 \, \text{m}^3$$

Antwort: Der Materialverbrauch beträgt $9000 \, \text{m}^3$.

Aufgabe 9.1

Wertetabelle

t	i(t)
0	$5,56 \cdot 10^{-3}$
1	$2,20 \cdot 10^{-3}$
2	$0,873 \cdot 10^{-3}$
3	$0,346 \cdot 10^{-3}$
4	$0,137 \cdot 10^{-3}$
5	$0,054 \cdot 10^{-3}$
6	$0,021 \cdot 10^{-3}$



Aufgabe 9.2

$$\begin{aligned}
 Q'(t) &= \left(-6,0048 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t}{1,08}} \right)' && | \text{Faktorregel der Differentialrechnung} \\
 &= -6,0048 \cdot 10^{-3} \cdot \left(e^{-\frac{t}{1,08}} \right)' && | \text{Kettenregel der Differentialrechnung} \\
 &= -6,0048 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t}{1,08}} \cdot \left(-\frac{1}{1,08} \right) && | \text{Zusammenfassen} \\
 &= 5,56 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t}{1,08}} = i(t)
 \end{aligned}$$

Antwort: Es gilt $Q'(t) = i(t)$.

Aufgabe 9.3

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^4 i(t) dt \\
 &= Q(4) - Q(0) \\
 &= -6,0048 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{4}{1,08}} - \left(-6,0048 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{0}{1,08}} \right) \\
 &= -0,1479 \cdot 10^{-3} + 6,0048 \cdot 10^{-3} \\
 &= 5,8569 \cdot 10^{-3} \\
 &\approx 5,86 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

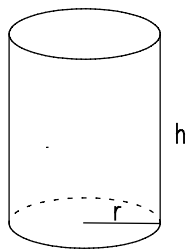
Antwort: Die transportierte Ladung beträgt $Q = 5,86 \text{ mC}$.

Komplexaufgabe „Konservendose“

Aufgabe 1

Idealisierungen

- Die Dose ist in beiden Fällen ein idealer Zylinder
- Es gibt keine Falzkanten - sowohl für Decken- und Bodenbefestigung, als auch für den Mantel
- Es gibt bei der Produktion keinen Abfall
- Die Dose ist vollständig mit dem Lebensmittelprodukt gefüllt
- Es gibt keine Rillen („Sicken“) auf Mantel und Boden



$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$O = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot r^2}_{\text{Boden + Deckel}} + \underbrace{2\pi \cdot r \cdot h}_{\text{Mantel}}$$

Mathematisierung

Für die Oberfläche gilt

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Das Volumen ist fest vorgegeben, deshalb sind r und h nicht unabhängig: je größer r , desto kleiner wird h .

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad | \quad \text{nach } h \text{ umzustellen}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \quad | \quad \text{Einsetzen in Oberflächenformel}$$

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2}$$

$$O = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

In dieser Gleichung ist nur noch r variabel.

Gesucht ist nun dasjenige r , bei dem O maximal wird.

Das ist aus der ersten Ableitung berechenbar.

$$\begin{aligned}
 O'(r) &= 4\pi r + 2V \cdot \left(\frac{1}{r}\right)' \\
 &= 4\pi r + 2V \left(-\frac{1}{r^2}\right) \\
 &= 4\pi r - \frac{2V}{r^2}
 \end{aligned}$$

Extremwerte erhält man aus den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\text{Bed.: } O'(r) = 0$$

d.h.:

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad | \cdot r^2$$

$$\begin{aligned}
 4\pi r^3 - 2V &= 0 \\
 4\pi r^3 &= 2V \\
 r^3 &= \frac{2V}{4\pi} \\
 r^3 &= \frac{V}{2\pi} \\
 r &= \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}
 \end{aligned}$$

In der Aufgabenstellung wurde $V = 0,75 \text{ l} = 0,75 \text{ dm}^3$ vorgegeben.

$$r = \sqrt[3]{\frac{0,75 \text{ dm}^3}{2\pi}} = 0,4924 \text{ dm}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{0,75 \text{ dm}^3}{\pi \cdot (0,4924 \text{ dm})^2} = 0,9847 \text{ dm}$$

$$\begin{aligned}
 O &= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h) \\
 &= 2\pi \cdot 0,4924 \text{ dm} (0,4924 \text{ dm} + 0,9847 \text{ dm}) \\
 &= 4,57 \text{ dm}^2
 \end{aligned}$$

Es fehlt noch der Nachweis, dass es sich wirklich um ein Minimum handelt. In diesem Falle ist dies einfach mit dem Argument möglich, dass andere r -Werte einen größeren Materialverbrauch bedingen würden, denn in jedem Falle liegt ja an der berechneten Stelle ein Extremwert vor. Es reicht also, wenn **ein** anderer r -Wert links und rechts von dem berechneten r einen größeren Materialverbrauch liefern würde (damit auch die Möglichkeit des Sattelpunktes ausgeschaltet wird).

Die Berechnung wird wiederholt für z.B. $r = 0,2 \text{ dm}$ und $r = 0,6 \text{ dm}$

$$r = 0,2 \text{ dm}$$

$$h = \frac{0,75 \text{ dm}^3}{\pi (0,2 \text{ dm})^2}$$

$$= 5,968 \text{ dm}$$

$$O = 2\pi \cdot 0,2 \text{ dm} (0,2 \text{ dm} + 5,968 \text{ dm})$$

$$= 7,751 \text{ dm}^2$$

$$r = 0,6 \text{ dm}$$

$$h = \frac{0,75 \text{ dm}^3}{\pi (0,6 \text{ dm})^2}$$

$$= 0,6631 \text{ dm}$$

$$O = 2\pi \cdot 0,6 \text{ dm} (0,6 \text{ dm} + 0,6631 \text{ dm})$$

$$= 4,762 \text{ dm}^2$$

Beide Oberflächen sind größer, also liegt der geringste Materialverbrauch bei $r = 0,492 \text{ dm}$.

Aufgabe 2

Mathematisierung

Die Oberfläche ist vorgegeben und das maximale Volumen gesucht.

1) Für das Volumen gilt:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

2) Oberflächenformel nach h umstellen

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$h = \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{O}{2\pi r} - r$$

3) Einsetzen

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{O}{2\pi r} - r \right) \\ &= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot O}{2\pi \cdot r} - \pi \cdot r^3 \\ &= \frac{O \cdot r}{2} - \pi \cdot r^3 \end{aligned}$$

4) Ableiten

$$V'(r) = \frac{O}{2} - 3\pi r^2$$

5) Nullstellen $v'(r) = 0$

$$V'(r) = \frac{O}{2} - 3\pi r^2$$

$$3\pi r^2 = \frac{O}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}$$

 6) Wert aus der Aufgabenstellung einsetzen $O = 500 \text{ cm}^2$

$$r = \sqrt{\frac{500 \text{ cm}^2}{6\pi}} = 5,150 \text{ cm}$$

 7) h berechnen

$$h = \frac{O}{2\pi r} - r$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{500 \text{ cm}^2}{2\pi \cdot 5,150 \text{ cm}} - 5,150 \text{ cm} \\ &= 10,30 \text{ cm} \end{aligned}$$

 8) V berechnen

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot r^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot (5,150 \text{ cm})^2 \cdot 10,30 \text{ cm} \\ &= 858,2 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

 9) Probe auf Maximum mit $r = 2$ und $r = 7 \text{ cm}$

$$r = 2 \text{ cm}$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

$$h = \frac{500 \text{ cm}^2}{2\pi \cdot 2 \text{ cm}} - 2 \text{ cm} = 37,79 \text{ cm}$$

$$h = 4,386 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot 37,79 \text{ cm} \\ &= 474,9 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot (7 \text{ cm})^2 \cdot 4,368 \text{ cm} \\ &= 672,4 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

 Damit ist für $r = 5,15 \text{ cm}$ das maximale Volumen erreicht.